Дж.Л.Синг

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

М.: ИЛ, 1963, 432 стр.

Содержание

Предисловие редактора 5
Предисловие 7
Глава I. Основные тензорные формулы для риманова пространства — времени 11
§ 1. Метрический тензор и допустимые координаты 11
§ 2. Производные и геодезические 13
§ 3. Ортонормированные реперы и формулы Френе — Серре 17
§ 4. Параллельный перенос и перенос Ферми — Уолкера 20
§ 5. Тензоры Римана, Риччи и Эйнштейна 23
§ 6. Отклонение геодезических 26
§ 7. Гамильтонова теория лучей и волн 31
§ 8. Гауссовы координаты 39
§ 9. Условия соединения на трехмерной гиперповерхности разрыва 42
§ 10. Теоремы Стокса и Грина 47
Глава II. Мировая функция \Omega 51
§ 1. Мировая функция \Omega и ее ковариантные производные как двухточечный инвариант и двухточечные тензоры 51
§ 2. Пределы совпадения 53
§ 3. Вычисление вторых производных мировой функции с помощью оператора параллельного переноса 59
§ 4. Вычисление ковариантных производных от оператора параллельного переноса 64
§ 5. Вычисление высших производных мировой функции 66
§ 6. Решение конечных геодезических треугольников в пространстве — времени с малой кривизной 69
§ 7. Решение бесконечно малых геодезических треугольников 72
§ 8. Квазидекартовы координаты 74
§ 9. Изменение начала квазидекартовых координат 78
§ 10. Координаты Ферми и оптические координаты 80
§ 11. Метрики для координат Ферми и оптических координат 82
§ 12. Геодезические в координатах Ферми и оптических координатах 86
§ 13. Мировая функция и ее производные для двух точек на временноподобной кривой 90
§ 14. Мировая функция в координатах Ферми для двух точек на смежных временноподобных кривых 93
Глава III. Хронометрия в римановом пространстве — времени 97
§ 1. Физические наблюдения (ФН) и математические наблюдения (МН) 97
§ 2. Хронометрия и римановы гипотезы 99
§ 3. Гипотезы геодезических 102

§ 4. Пространственная мера, ортогональность и скалярные произведения 104
§ 5. Жесткость в смысле Борна и системы отнесения 106
§ 6. Измерение направления 109
§ 7. Относительная скорость и эффект Допплера 110
§ 8. Перенос Ферми и отражающийся фотон 113
§ 9. Падающее яблоко 121
§ 10. Проблема баллистического самоубийства 127
§ 11. Статическое измерение гравитационных полей 130
§ 12. Перенос Ферми — Уолкера вдоль пространственноподобной кривой и его физический смысл 134
§ 13. Физический смысл абсолютного дифференцирования и систематическое измерение гравитационных полей 140
Глава IV. Материальные среды 142
§ 1. Статистическая модель 142
§ 2. Законы сохранения в статистической модели 146
§ 3. Кинематика континуума 150
§ 4. Тензор энергии континуума 153
§ 5. Уравнения поля и сравнение с теорией Ньютона 157
§ 6. Обсуждение уравнений поля и координатных условий 161
§ 7. Замечания о движении изолированного тела 169
Глава V. Некоторые свойства полей Эйнштейна 174
§ 1. Основная формула для запаздывающего (или опережающего) потенциала 174
§ 2. Линейное приближение 176
§ 3. Статическое поле Эйнштейна в присутствие тел 178
§ 4. Две леммы 183
§ 5. Проблема Коши в нормальных гауссовых координатах 184
§ 6. Проблема Коши в нормальных гауссовых координатах для случая идеальной жидкости 189
§ 7. Характеристики и ударные волны 193
Глава VI. Интегральные законы сохранения и уравнения движения 198
§ 1. Понятие об интегральных законах сохранения 198
§ 2. Интегральные законы сохранения, связанные с тензором Эйнштейна 200
§ 3. Пространство — время, допускающее группу движений 202
§ 4. Интегральные законы сохранения, связанные с тензором Римана 204
§ 5. Пространство — время, рассматриваемое с евклидовой точки зрения 209
§ 6. Уравнения движения изолированного тела 213
§ 7. Псевдовектор 217
Глава VII. Поля со сферической симметрией 221
§ 1. Пространство — время постоянной кривизны (пространство де Ситтера) 221
§ 2. Метрические формы в случае сферической симметрии 228
§ 3. Различные формулы для случая сферической симметрии 232
§ 4. Внешнее поле Шварцшильда 236

§ 5. Полное поле в случае сферически симметричного распределения материи 239
§ 6. Масса звезды конечного радиуса и теорема Гаусса 241
§ 7. Поле жидкости, обладающей сферической симметрией, и полное поле Шварцшильда 244
§ 8. Орбиты и лучи в поле Солнца 248
§ 9. Спектральные смещения и мировая функция 255
Глава VIII. Некоторые специальные пространства 264
§ 1. Аксиальная симметрия 264
§ 2. Конформно соответствующие я конформно плоские пространства 270
§ 3. Космологическое красное смещение 274
§ 4. Пространства типа Геделя 280
§ 5. Статические пространства 286
Глава IX. Гравитационные волны 290
§ 1. Плоские гравитационные волны 290
§ 2. Мировая функция для плоской гравитационной волны и квази-декартовы координаты 293
§ 3. Плоская гравитационная волна специального вида и замечания о цилиндрических и сферических волнах 295
Глава X. Электромагнетизм 299
§ 1. Уравнения Максвелла и тензор электромагнитной энергии 299
§ 2. Проблема Коши для некогерентной заряженной жидкости 303
§ 3. Интегральные теоремы электромагнетизма 306
§ 4. Пространства электровакуума 309
Глава XI. Геометрическая оптика 314
§ 1. Кинематика волн в пространстве — времени 314
§ 2. Волны, лучи и фотоны в диспергирующей среде 317
§ 3. Вариационные принципы в геометрической оптике 320
§ 4. Геометрическая оптика в статической вселенной 325
§ 5. Астрономические наблюдения 329
§ 6. Звездная аберрация 331
§ 7. Дифференциальная хронометрия 337
§ 8. Пятиточечный детектор кривизны 342
§ 9. Спектральное смещение в среде 344
Дополнение А. Обозначения 348
Переход от сигнатуры (+2) к сигнатуре (—2) 349
Дифференцирование 350
Перечень основных символов с указанием параграфов, где эти символы вводятся 350
Дополнение Б. Численные значения некоторых физических величин, выраженные в секундах 354
Библиография 358
Именной указатель 418
Предметный указатель 420

Предметный указатель

Аберрация (звездная) 30, 331
- постоянная 332
- уравнение 336
Адиабатическое равновесие 150, 155
Ангстрем 356
Атмосфера 178, 357
Афелий 251
Базисная линия 80
- - временноподобная 81
Баллистическое самоубийство 127
Бар 178, 357
Бианки тождества 24, 58
Биркгоффа теорема 237, 297
Бихарактеристика 196, 304
Будущего область 27, 99, 175
Вариационный принцип 16
Вариационные принципы в геометрической оптике 320—328
Ватерпас 132
Вектор, бесконечно малая мера 12, 104
- бесконечно малый, 12, 104
- - - величина 12
- - - длина 105
- - - конечная мера 12
- - - условие ортогональности 105
- временноподобный 12, 101, 106, 137, 280
- дуальный 48
- изотропный 101, 106
- индикатор 12
- касательный 19, 20, 21, 137
- Киллинга 203
- магнитный трехмерный 300, 309
- нулевой 12
- отклонения 26, 106
- первой кривизны 334
Вектор пространственноподобный 12, 102, 106, 163
- спина 152
- частоты волны четырехмерный 315, 316
- числовой 145
- электрический трехмерный 300, 309
Векторный базис 74, 75
Весы и меры 354
Винтовая линия 20
Внутренние взаимодействия 142
Волн гравитационных общая теория 187
Волна 33—36, 187
- в гамильтоновой теории 33
- - геометрической оптике 314
- - диспергирующей среде 317
- вектор, частоты, 4, 315, 316
- временноподобная 316
- гравитационная 187, 290
- - плоская 290
- гребень 99, 314
- единичная 38, 290
- изотропная 37, 316
- кинематика в пространстве — времени 314
- период 314
- пространственноподобная 316
- световая 304
- скорость 314
- - обратная 316
- трехмерная 314
- ударная 193, 194, 304
- - гравитационная 196
- - объемная и необъемная 290
- - электромагнитная в вакууме 304
- фазовая 314
- цилиндрическая 295, 297
- частота 314
- электромагнитная 304
Волновая функция 176
Волновое уравнение обобщенное 302
Вращение Земли 126, 356, 357
- и перечос Ферми 22, 120, 153, 341
- - эффект Саньяка 342
- перигелия 251
- с постоянными коэффициентами 81
- тела 132, 171, 264

- угловая скорость 108
Временная последовательность 99
Время 99, 104, 354
- абсолютное 248
- измерение 99, 125, 337, 354
- координатное 99
- путешествия 107
- собственное 99, 243, 248, 249
Вселенная 166, 206, 274
- возраст 279, 356
- зарождение 279
- расширяющаяся 274
- статическая 325
- Эйнштейна — де Ситтера 273
Газ 150, 155
Галактики масса 161
- спектр 274
Гамильтона теория 31
- функция главная (характеристическая) 33
Гамильтона — Якоби метод 317
- - уравнение 319
Гаусса—Остроградского теорема 44, 166, 241, 243, 309
- - для звезды конечного радиуса 241
- - - статического пространства 288
- - обобщение 48, 244
Геодезическая 14, 15, 69, 139, 258
- в гамильтоновой теории 35
- - координатах Ферми 86
- - оптических координатах 86
- - поле Солнца 248
- временноподобная 35, 38, 223
- в слабом поле 257
- дифференциальное уравнение 40
- замкнутая 224
- пространственноподобная 23, 35, 38
- уравнение 89
Геодезические линии тока 155
Геодезический треугольник бесконечно малый 72, 74
- - конечный 69, 74
Геодезическое отклонение 78
- - уравнение 26, 330
- - инвариантное 28
Гипербола постоянной кривизны 20
Гиперповерхность изотропная 36
- разрыва 11, 42, 236
Гипотезы геодезических 102, 146, 249, 303, 329
- о согласованности 100
- Римана 101
Год 125
Гравитационная постоянная 159, 357
Гравитационное поле 121, 221, 331, 347
- - в вакууме (пустом пространстве) 159, 161, 187, 196, 236, 247, 248
- - Земли и Солнца 248, 254, 260
- - напряженность 133, 243
- - с аксиальной симметрией 265
- - систематическое измерение 140
- - слабое 165, 176, 209, 248, 257
- - статистическое измерение 130
- - статическое 178, 237, 260, 331
- - стационарное 237, 256
- - сферически симметричное 221, 236, 247, 249
Гравитон 197
Грамм 279
Грина теорема 44, 148, 201, 206
- - обобщение 48
Группа движений 202, 297
Давление 146
- атмосферное 178, 357
- в Земле 156
- и гравитационное натяжение 178
- изотропное 285
- и плотность 189, 245
- как собственное значение 155
- положительное 163
- постоянное вдоль линии тока 190
Движение жесткое 153, 157, 347
- без источников и стоков 153, 190
- в электромагнитном поле 302
- идеальной жидкости 154, 167, 189
- изолированного тела 169
- континуума 150, 153

- невращательное 153
Дельта-функция 12, 25, 300
Динамический метод 130
Дисперсия 324
Дифференцирование 23, 350
- абсолютное 140, 350
- ковариантное 13, 51
- правила коммутации 23
- - оператор 42
Длина 101, 161
- Ферми 341
Допплера эффект 110, 112, 255
Жесткость в смысле Борна 106, 153
Жидкая сфера однородная 246
Жидкость заряженная 300
- идеальная 155, 163, 244, 281
- масса 164, 173, 244
- некогерентная 154, 155, 159, 303
- со сферической симметрией 244, 269
Закон движения 130
Заряд, плотность относительная 300
- полный 312
- собственная плотность 299
- скорость, 4, 299
- электрический, сохранение 309
Земли масса 161, 357
- орбита и скорость 356, 357
- радиус орбиты 134
Излучение атома или частицы 99, 319
- Черенкова 320
- электромагнитное 100
Измерение направления 108
Изотропная геодезическая 15, 27—30, 37, 69
- - в когерентной системе 37
- - - поле Солнца 248, 254
- - - пространстве де Ситтера 223, 226
- - - расширяющейся вселенной 275
- - - случае заряженной жидкости 304
- - и аберрация 330
- - - дифференциальная хронометрия 337
- - - спектральное смещение 110, 255
- - как бихарактеристика 196
- - - гравитационный луч 197
- - - мировая линия фотона 103
- - отклонение 27, 223
- - при модифицированной метрике в оптике 324
Изотропный конус 27, 101
- - в импульсном пространстве 143
Икарус (астероид) 253
Импульс внутренний 142
- - отталкивания 142
- - притяжения 142
- пространство четырехмерное 143
- статистика 143
- четырехмерный 143, 146
Импульс четырехмерный гравитационный 208
- - дифференциальное уравнение сохранения 148
- - механический 208
- - полный 208
Инвариант двухточечный 51, 80
- малый 121
- трехточечный 71
Инвариантности принципы 215
Инвариантные компоненты 300
- - дуального тензора 308
Интерферометр 337
- Майкельсона и Морли 337
Искусственный спутник 121, 128
Источники 298
Каноническая форма 32
Канонические уравнения 37
Канонический параметр 15, 20, 27, 37
Касательная единичная 202
Квадруполь 269
Киллинга уравнения 203
Коммутации правила 23
Континуум, вращение 151
- динамика 150, 153
- кинематика 150
- скорость, 4, 154
Координаты гауссовы 39, 238
- - косоугольные 39, 304

- - нормальные 39, 40, 184, 189
- - полярные 229
- декартовы 82
- допустимые 11, 39, 40, 43, 291
- изотермические 232
- изотропно-полугеодезические 40
- изотропные 230
- квазидекартовы 74, 78, 293
- - закон преобразования при переносе начала 79
- кривизн 230, 231, 238
- логарифмические 239
- мнимые 349
- нормальные 75
- нулевые 164
- однородные 232
- оптические 80
- - ковариантные 81
- - контравариантные 81
- - метрика 82
- полугеодезические 40
- Ферми 80, 94, 124, 126, 151, 230, 339
- - ковариантные 80
- - контравариантные 80
- - метрика 82
- цилиндрические 264
Координатные условия 161
Космологическая постоянная 158, 221, 236, 273
- теория 279
Коши данные 94, 186, 187, 191, 292
- проблема 167, 184, 302
- - в нормальных гауссовых координатах 189
- - для жидкости идеальной 189
- - - некогерентной заряженной жидкости 303
Красная линия кадмия 100, 125
Кривая временноподобная 20, 134
- пространственноподобная 20, 134, 137, 139
Кривизна вторая 19
- гауссова 249
- детектор пятиточечный 342
- измерение 337
- линии тока 155, 157, 170, 172
- малая 29, 59, 69, 73, 74
- первая 19, 115, 139
- пространства 29, 30, 72
- риманова 24
- - для двумерного элемента в пространстве—времени 115, 134, 346
- - пространства — времени 73
- скалярная 271
- субинвариантная 42
- третья 19
Кривизны инвариант 24, 180
- - в проблеме Коши 186, 190
- - - случае электромагнитного поля 324
- - для гауссовых координат 41
- - - конформно-связанных пространств — времен 271
- - - пространства — времени типа Геделя 282
- - - статического пространства — времени 180
- - и изменение сигнатуры 349
- полосы 30
- радиус 125, 357
Лагранжа метод 150
- множитель 316
- уравнения 274
- функция 32
Лагранжиан 249, 274, 293
Лапласа уравнение 194
- - в случае аксиальной симметрии (в цилиндрических координатах) 265, 267
Линейное приближение 167, 176
Линии тока 150
- - геодезические 155
- - некогерентной жидкости 155
- - нормальная конгруэнция 153
- - расширение трубки 153
- - трубка 153
Лоренца индексы 18, 146

- матрица 18, 75
- преобразования 17, 75
Луна 121
- масса 161, 356, 357
- радиус 356, 357
- расстояние от Земли 356
- скорость 357
Лучевая скорость 318
Лучи 33, 36
- в диспергирующей среде 317
- - римановом пространстве — времени 35
- временноподобные 38, 318
- гравитационные 197
- изотропные 36, 318
- оптические 318
- пространственноподобные 38
- света, отклонение 254
- скорость относительно среды 326
- уравнения 249, 317
Майкельсона — Морли эксперимент 338, 342, 344
Максвелла уравнения 299, 301, 307, 309
Малость 59
Марс 329
Масса 158
- в секундах 161
- галактики 161
- звезды 241
- Земли 161, 357
- инертная и гравитационная, эквивалентность 154
- Луны 161, 356, 357
- осциллирующая 298
- положительная и отрицательная 167
- частицы инвариантная (собственная) 102
Материальная частица 99, 102, 142
Материальные среды, статистическая модель 142
Матрица Лоренца 18, 75, 90
- натяжений 146, 151
- распространения натяжений 151
- спина (вращений) 151
Мера вектора 12
Мера кривой 12
- пространственная 104
Меркурий 253
Метод динамический 130
- итераций 59, 179
- обратной связи 169
- операционный 98
- последовательных приближений 167
Метод g 165, 185
Метод T 167, 185
Методы теории групп в общей теории относительности 182, 184, 264
Метрика в квазидекартовых координатах 77
- - координатах Ферми 72
- - случае аксиальной симметрии 264
- - - сферической симметрии 228
- - оптических координатах 72
- для жидкой сферы 247
- - поля Солнца 249
- - пространства электровакуума 310
- конформно-плоская 271
- конформно-статическая 288
- Минковского 176
- ортогональная 232
- плоская 312
- положительно определенная 70
- статическая 237
- стационарная 237
- - и изменение сигнатуры 349
- физическая 312
- Шварцшильда 237
Мировая линия 99, 110, 206
- - прямая 137
- - регулируемая 107
- - свободной частицы 102
- - центра масс 217
Мировая функция 14, 16, 50, 74, 93, 203, 255, 330
- - в координатах Ферми 93

- - - плоском пространстве — времени 50
- - для плоской гравитационной волны 293
- - - поля Солнца 260
- - - слабого поля 257
- - и временноподобная кривая 89, 93
- - - главная функция Гамильтона 38
- - - группа движений 202
- - - дифференциальная хронометрия 339
Мировая функция и интегральные законы сохранения 204
- - - отражающийся фотон 115
- - - спектральное смещение 113, 250, 255, 261, 341
- - ковариантные производные 63, 67, 68
- - пределы совпадения 54, 58
- - производные 90
- - трансформационные свойства 51
- - уравнение в частных производных 53, 261
Молекула 155
Наблюдения астрономические 329
- контролируемые 97
- математические 97
- неконтролируемые 97
- оптические 331
- физические 97
Направление 109
- измерение 109
Направляющие косинусы (коэффициенты) 110, 135, 136, 333
- - для излучения и приема 117, 135, 136
- - телескопа для звездной аберрации 333
Натяжение 132, 146, 163
Натянутая струна 138
Начало координат 74
Небесная механика 158
Нормаль вторая 19
- первая 19, 139
- третья 19
Ньютона второй закон 159
Ньютоновская астрономия 248, 251, 329
- гидродинамика 155, 164
- теория 137, 138
- - гравитации 248
- - сравнение с теорией относительности 137, 138, 157, 161, 189, 244, 248, 329
Одновременность абсолютная, физический смысл 137
Окружность временноподобная 19
Оператор Даламбера 174
- - обобщенный 301
- Лапласа 237
- Лапласа тензорный 188
- параллельного переноса 52, 58, 60, 64, 66, 79, 110, 223
Оператор параллельного переноса, ковариантная производная 64, 66
- проектирования 152, 334
Операции управляемые 108
Оптика 315
- геометрическая 314
- - в статическом пространстве 325, 331
- физическая 195
Орбитальное уравнение 251
Орбиты 248
- гиперболического типа 248
- релятивистские 252
- эллиптического типа 248
Ортогональность векторов 105
Осциллирующие массы 298
Падающее яблоко (тело) 121, 130, 244
Парадокс Даламбера 59
- часов 128
Парсек 356
Передача информации 318
Перенос параллельный 20, 21, 110

- - уравнение 60
- Ферми 22, 92, 109, 113, 342
- - физическая интерпретация 120
- Ферми — Уолкера 21, 61, 80, 134
Пересечение геодезических 51, 59, 62, 78, 193
Перигелий 251
- смещение 252, 255
Пифагора теорема 105, 315
Планка постоянная 113, 314
Плотность 161, 278, 280
- в расширяющейся вселенной 279
- импульса, 3, 146
- импульса, 4, 208
- массы собственная 154
- момента, импульса, 4, 208
- ньютоновская и в теории относительности 161
- положительная и отрицательная 163, 166, 185, 193, 272, 280, 284
- тензорная 213
- электрического заряда собственная 300
- энергии 146
- - собственная 154
Поверхность гамильтонова 31
- изотропная 37, 194, 304
- ориентируемая 46
Показатель преломления 317
Поле жидкости 244
- полное 239
- Солнца 248
- тензорное симметричное 183
- - сопряженное 183
- Шварцшильда внешнее 236, 289, 332
- - полное 244
- электромагнитное 299
Поля со сферической симметрией 221
- Эйнштейна 174
- - линейное приближение 176
- - статические 178
Поляризация поверхности 147
Поляризованная мишень 143
Поляризованное число частиц 144
Поляризованный множитель 144
Потенциал 313
- гравитационный 133, 159, 264
- запаздывающий 174, 182, 298
- ньютоновский 133, 134, 159, 160, 167, 180, 181
- - аналоги в теории относительности 12
- опережающий 174
- четырехмерный 301
Поток величины q 144
- гравитационного момента импульса 208
- магнитного вектора 309
- полного момента импульса 205, 208
- полного импульса, 4, 145, 154, 205
- числовой 145
- электрического вектора 309
- энергии поляризованный 146
Правило перестановок 52
- суммирования Эйнштейна 348
Пределы совпадения 53, 54, 58, 59, 123, 208
Притяжение 142
Причинность 228, 318
Проблема двух тел 162, 165, 267
Произведение скалярное 20
Производные абсолютные 13
- - физический смысл 140
- ковариантные 13, 52, 64, 66
- частные 13
Пространство антиподное 224
- де Ситтера 225
- - - метрическая форма 273
- замкнутое двумерное 309
- - евклидово 46
- постоянной кривизны 24
- пустое (вакуум) 159, 187, 196, 236, 247, 300
- - для электромагнитного поля 299
Пространство статическое 237
- стационарное 237

- типа Геделя 230
- электровакуума 309
Пространство—время 11, 99, 138, 202
- конформно-плоское 270
- конформно-соответствующее 270
- кривизна 89, 91, 102, 223, 342
- - риманова, см. Кривизна
- метрическая форма в квазидекартовых координатах 77
- Минковского 221
- плоское 24, 30
- постоянной кривизны 221
- риманово 34, 99
- с евклидовой точки зрения 209
- - малой кривизной 71, 83
- статическое 286, 310
- Ферми 338
Прошедшего область 27, 99, 175, 279
Прямые линии 212, 258
Псевдорасстояние 275
Псевдотензор 217
- энергии 219
Пуассона уравнение 159, 166, 194
Пульсирующая звезда 239
Радиоволны 103
Разрывы непрерывности 42, 245, 291
Распределения функция 144
- - моменты 145
Расстояние 276
- астрономическое 277
- оптическое 343
- пространственное 12, 101, 105
- Ферми 338
- функция 50
Релятивистская проблема многих тел 254
Репер ортонормированный 17, 28
- условие ортонормируемости 17
Ряды бесконечные 54
- степенные, разложение по малому параметру 120
Саньяка эффект 342
Сведение к точке 48
Светимость собственная 277
Свободное падение 121
Секунда 125, 158, 161, 279, 354
Сигнал 109
Сигнатура 11, 101, 165, 169, 210, 237, 280, 292, 349
Сила 130, 132
- гравитационная 102, 161, 178
Сила пондеромоторная 303
Символ Кристоффеля 13, 180, 233, 270, 281
- Кронекера 12
- - обобщенный 25, 300
Симметрия аксиальная 264
- сферическая 221
- тензора и псевдотензора энергии 145
- уравнения 23
- условия 167
Система координат 108
- отнесения 107
- отсчета инерциальная 159
- - невращающаяся 22
- покоя 149
- Ферми 108, 111, 120
Скалярное произведение 104
Скорость групповая 319, 327
- луча относительно среды 318, 326
- относительная 110, 113
- радиальная 111
- света 88, 114, 319
- средняя динамическая 149
- - кинематическая 149
- угловая 127
- удаления 111
- фундаментальная 319
- четырехмерная континуума 154
Смещение космологическое 274, 322, 331
- - и эффект Допплера 110, 112, 255, 257, 262
- - формула 256, 347
- красное 112, 128, 255, 326
- - - среде 344

- - для спутника Сириуса 257
- спектральное 111
- - и мировая функция 225, 261
- - - частота 112
- - - энергия 111
- в поле Солнца или в статическом поле 254, 255, 261
Событие 99
Солнечная система 162, 193, 321
Сохранение, законы 24
- - в статистической модели 146
- - дифференциальные 201
- - для тензора Эйнштейна 200
- - интегральные 198
- - с вектором Киплинга 204
- - евклидовой точки зрения 212
- - - псевдотензором 218, 219
- - - тензором Римана 204
- заряда уравнения 303, 309
Сохранение импульса 198
- - и энергии, законы 24
- массы, уравнения 303
- момента импульса 198
- уравнения 154, 301
- импульса, уравнение, 4, 148
- числа частиц, уравнение 149
Спектр галактик 274
Спектрометр 330
Спектроскопия 100
Специальная теория относительности 107, 221, 222, 229
Спин 171
Спутник Сириуса 257
Среда 317
- диспергирующая 317
- недиспергирующая 319, 324
- прозрачная 319
- уравнение 317
Статистическое равновесие 150, 155
Стационарного времени принцип 329
Стокса теорема 44, 307
- - обобщенная 45, 199
- формула 47, 48
Субтензор Римана 42
- Риччи 42
- Эйнштейна 42
Тейлора формула 70
Телескоп 330
Тело абсолютно жесткое 137
- вращающееся 171
- заряженное 310
- изолированное 213
- невращающееся 267
Тензор аберрации 333
- абсолютно антисимметричный 25
- двухточечный 52
- дивергенция 302
- дискриминантный 24, 45
- Киллинга 203
- ковариантный 306
- контравариантный 306
- кососимметричный 25, 301
- Леви-Чивита 25
- метрический 11, 158, 183, 215, 270, 299, 324
- натяжений 154, 163
- относительный 213
- перестановок 300
- распространения натяжений 157, 347
- Римана (кривизны) 23, 41, 62, 71, 134, 141, 160, 204, 233, 241, 271, 281, 286, 291, 329, 332, 349
Тензор Римана в пустом пространстве — времени 285
- - - гауссовых координатах 41
- - - случае сферической симметрии 233
- - дважды дуальный 25, 207
- - для гравитационной волны 292
- - - конформно-статической метрики 288
- - - конформных пространств — времен 271
- - - плоского пространства — времени 24
- - - пространства типа Геделя 281, 282

- - - статического поля 180
- - - сферической симметрии 234
- - и законы сохранения 204
- - - изменение сигнатуры 350
- - - измерение гравитационного поля 102, 121, 124, 130, 140, 160
- - симметризованный 56, 58, 93
- - собственный тензор 205
- Риччи 24, 41, 180, 233, 265, 282, 292, 349
- - в гауссовых координатах 41
- - - случае аксиальной симметрии 265
- - - - сферической симметрии 233
- - для гравитационной волны 292
- - - конформно-статической метрики 288, 289
- - - конформных пространств — времен 271
- - - плоского пространства — времени 24
- - - пространств типа Геделя 282
- - - статического поля 180
- - и изменение сигнатуры 350
- - при разрывах 42
- симметричный 215
- спина (вращений) 152
- фундаментальный 11
- Эйнштейна 24, 41, 43, 158, 180, 200, 234, 271, 283, 287
- - второе расширение 56
- - для гауссовых координат 41
- - - конформной метрики 271
- - - конформно-статической метрики 288, 289
- - - пространств типа Геделя 283
- - - статических пространств 180
- - - сферической симметрии 234
- - и законы сохранения 200
- - - изменение сигнатуры 350
Тензор Эйнштейна и уравнения поля 158
- - при разрыве 42
- - собственные значения и собственные векторы 163
- электромагнитной энергии 299
- электромагнитный дуальный 300
- энергии 145, 150, 158, 221, 239, 244
- энергии-импульса 153
- энергии континуума 153
Тензорный вес относительный 213
Теория поля, единая 299
Топология 224
Точка 32
- базисная 205
- —событие) 101
Точки идентифицируемые и симметрия 229
- сопряженные 59
Трубка мировых линий 215
Угол 109
- азимутальный 230
- измерение 109
- полярный 230
- фаза 314
Уравнения гидродинамики 162
- движения 198, 302
- - в вакууме 288
- - заряженной частицы 303
- - изолированного тела 213
- - произвольной сплошной среды 157
- - центра масс 215
- поля 157, 161, 169, 221, 236, 239, 287, 302, 309
Ускорение абсолютное 155, 157, 170, 172
- в гравитационном поле 126
- силы тяжести 334
Условия интегрируемости 153
- ортогональности 105
- ортонормированности 17
- связанности 44, 236
- совместности 186
- соединения 42, 44, 163, 170, 181, 236
Ферма принцип 320, 324

- - релятивистский аналог 328
Ферми закон 109
- репер, и, репер, 3, 4, 22, 80, 108, 123, 151
Фиолетовое смещение 347
Форма изотермическая 265
- квадратичная 101, 230, 349
- метрическая 11, 41, 84, 211
- - внешняя 243
- - внутренняя 243
Форма метрическая в случае сферической симметрии 228, 232, 241
- - - статической вселенной 325
- - для координат Ферми 84
- - - конформно-статического пространства 288
- - - пространства де Ситтера 273
- - - - типа Геделя 281
- - - - Эйнштейна—де Ситтера 278
- - - статического пространства 286
- - изотропный вид 239
Фотон 102, 103, 109, 134, 142, 304, 319, 330
- в диспергирующей среде 317
- импульс, 4, 330
- отражающийся 113
- статистика 143
- траектория 104
- энергия 111
Фотонная пушка 113
Френе—Серре формулы 17, 89, 118, 126, 139
Функция аналитическая 54, 265
- гармоническая 167, 265, 288, 311
- характеристическая или главная 32—33
Фурье-преобразования 290
Хабла постоянная 278
Характеристики 193, 304
Характеристическая кривая 193
- функция 50
Хрометрическое уравнение 105
Хронометрия 99
- в римановом пространстве — времени 97
- дифференциальная 337
Хэвисайда — Лоренца закон 303
Центр масс изолированного тела 214
- - траектория 206
Циклическая перестановка 307
Циркуляция 33
Частица материальная 99, 103, 142
- импульс, 4, 102
- скорость, 4, 102
- пробная 244, 303
- свободная 102, 109
- собственная масса 102
- траектория 104
Частицы, аннигиляция и порождение 146
- отождествимые 150
Часы 100
- атомные 100, 354
- стандартные 99
Эйлера метод 150
- углы 75
Эйлера — Лагранжа уравнения 322, 324
Эйнштейна формула для отклонения луча света 256
Эквивалентность 288
- инертной и гравитационной масс 154
Экстремалей связная система 33
Экстремаль 32, 33, 324
- гамильтонова 35
Экстремум 32
Эксцентриситет 252
Электромагнетизм 298
- интегральные теоремы 306
Электрон 161, 356
Элемент действия 318
Элементарная евклидовость 267
Эмиссия 111, 112
Энергия 106, 142, 158, 163, 201
- положительная плотность 273
- поток 273

Эфир 329
Якоби эллиптическая функция 251
Ячейка ориентированная 45
- элементарная 45
- - ребро 45
- - тензорный объем 45, 47

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

В научной и учебной литературе по общей теории относительности книга Синга «Общая теория относительности» занимает особое положение, отличается своеобразным стилем изложения материала, подходом к постановке проблем и применяемым математическим аппаратом. Ее появление отражает те новые тенденции, которые характерны для современного состояния общей теории относительности — более внимательный анализ основ теории, применение новых методов исследования, постановка конкретных проблем гравитации.

Широко применяемый автором аппарат «мировой функции» в некоторых случаях позволяет, сохраняя преимущество метода разложения функций в ряды, получить результаты в тензорной форме. Очень полезным оказывается также в некоторых задачах метод перенесения Ферми и Уолкера (перенос Ферми — Уолкера). Может быть, в отдельных случаях применение таких методов и не приводит к лучшим результатам и возможны другие, более гибкие методы исследования (например, методы теории групп, или метод инвариантов)— это другой вопрос. Но, скажем, в вопросах хронометрии они явно выглядят эффективными. При выполнении различных математических выкладок автор каждый раз указывает на те подводные камни, которые приходится обходить и которые, будучи специфическими для релятивизма, иногда, при формальном применении математического аппарата, могут послужить причиной физически некорректных выводов.

Другой характерной особенностью книги является та решительность, с которой автор отказывается от некоторых традиционных, но по существу необязательных понятий и принципов, интересных скорее с исторической точки зрения. Например, принцип эквивалентности в общей теории относительности, справедливый строго локально и не имеющий смысла в конечной области, не обязателен для построения теории гравитации, как это, по-видимому, впервые отметил В.А. Фок, и в чем нетрудно убедиться, непосредственно прощупав логическую канву теории. Автор, придерживаясь только строго необходимых предпосылок, не пользуется этим принципом, отдавая предпочтение конструктивным методам (хронометрия). Наиболее полно разработаны в книге вопросы, связанные с измерением времени и геометрической оптикой в общей теории относительности, — проблемы, которыми автор много занимался ранее. Менее подробно, но так же тщательно рассмотрены вопросы, связанные с материальным континуумом, законами сохранения и электромагнетизмом в общей теории относительности. При этом автор рассматривает корректную постановку задачи Коши. Что касается проблемы гравитационных волн, то этот раздел имеет предварительный характер, так как наиболее интересные разработки в этом направлении стали появляться, по-видимому, уже после выхода книги в свет и не могли быть

в ней отражены, в противоположность например, только что вышедшей книге Вебера «Общая теория относительности и гравитационные волны», где этому вопросу уделяется максимум внимания.

Общий стиль изложения различных вопросов в книге отличается живостью языка, образностью выражений и, как отмечает сам автор, может быть охарактеризован как «геометрический» и «иронический». Первая характеристика подчеркивает широкое использование геометрических представлений в четырехмерном многообразии пространства — времени, что при некоторых навыках позволяет значительно упростить изложение и легче получить физические следствия; вторая, не поддаваясь точному определению, сказывается, например, в обязательных оценках физической значимости той или иной решаемой задачи, в многочисленных критических (и даже самокритических) замечаниях, и т. д. Отчасти поэтому книга во всяком случае не принадлежит к числу тех сочинений, которые, по выражению Эдгара По, «не позволяют себя прочесть». Принятая автором форма изложения в сочетании с научностью делает книгу особенно привлекательной. И хотя, разумеется, можно указать целый ряд направлений в общей теории относительности, которые не представлены здесь вовсе или представлены в форме беглого упоминания, нужно иметь в виду, что книга и без того уже велика по объему, дальнейшее увеличение которого едва ли было бы полезным.

Очень ценной является помещенная в конце книги обширная библиография, которая содержит около полутора тысяч названий. Она, несомненно, окажется очень полезной читателям книги. Хотя она не является полной (так, в ней очень мало представлены работы советских ученых) и, естественно, не может претендовать на исчерпывающий характер, тем не менее значительно увеличивает ценность книги. Редактор и переводчик были вынуждены отказаться от соблазнительной мысли дополнить библиографию полным перечнем работ советских ученых, так как это потребовало бы большой дополнительной работы. Исключением из этого правила является упоминание некоторых работ в примечаниях редактора к тексту книги. Основная библиография приведена без изменений с той лишь разницей, что фамилии советских авторов и названия их работ даны на русском языке. В тех случаях, когда автор употребляет термины или выражения, малоупотребительные в русском языке или не получившие у нас распространения, переводчик в полном согласии с редактором позволял себе несколько отступать от буквального перевода, ставя на первое место правильность передачи мысли и интересы читателей.

Можно быть уверенным, что в связи с общим расширением фронта научных исследований по общей теории относительности у нас и за границей книга Синга будет полезной для широкого круга физиков и математиков, интересующихся проблемами гравитации.

А. Петров

ПРЕДИСЛОВИЕ

Среди всех физиков релятивист имеет меньше всех обязанностей перед обществом. Он является большим специалистом по теории гравитации, а гравитация играет в человеческом обществе существенную роль, но к нему не обращаются за советом, когда речь идет о сооружении башни, моста, корабля или самолета; даже космонавты могут обойтись без него, пока не заинтересуются вопросом, в каком эфире распространяются их сигналы.

Копаться в тонкостях, сидя в башне из слоновой кости — не каждому по вкусу, и, несомненно, многие релятивисты ждут будущего, предвидя день, когда правительства заинтересуются их мнением по важным вопросам. Но что значит «важным»? Наука преследует двоякую цель: познать природу и покорить ее. Для интеллектуальной жизни человека, несомненно, более важно первое. Так оставим же релятивисту его башню из слоновой кости, где он мирно размышляет о эйнштейновской теории до тех пор, пока хлопотливый мир еще удовлетворяет его неучастие в мирских делах. Пусть релятивиста удовлетворяет трудная задача узнать как можно больше и еще более трудная задача — передать другим лоскутки знаний, которые ему удалось приобрести.

Автору трудно отвлечься от своей книги и взглянуть на нее объективно. Но мне кажется, что дух этой книги лучше всего характеризуется словом *ирония*[1]), употребленном в смысле, который вкладывал в него Сократ; смысл же этот вообще нелегко объяснить. В книге много трудных вычислений, но есть и места, где читатель заметит, что я, вместо того чтобы лезть в драку, сижу на заборе и посвистываю. Не лучше ли было бы сделать хоть *что-нибудь*, даже если не совсем понятно *что*? Но именно этого-то и не допускает ирония. Ненасытная жажда вычислений должна умеряться периодами бездействия, когда машина полностью разбирается для новой сборки. Это — проветривание мозга. Вероятно, может показаться, что такого рода ирония учит лишь выбирать, а не создавать; однако во всей истории науки нет более поразительного примера иронии, чем утверждение Эйнштейна, что он не знал, что такое абсолютное время — того, что знал каждый.

Касаясь назначения этой книги, надо иметь в виду, что излагаемая здесь общая теория относительности означает ту теорию гравитации, которой Эйнштейн придал определенную форму в 1916 г. Однако здесь нет попытки дать обзор всех работ, сделанных в этой области за последние сорок с лишним лет. Мы пытаемся скорее в едином изложении с помощью применения нового метода представить наиболее важные темы. Упомянутый метод основан на использовании некоторой функции, введенной в тензорное исчисление Г. С. Рузе около тридцати лет назад, но с тех пор почти не при-

---

[1]) В оригинале — εἰρωνεία — ирония (греч.). — *Прим. ред.*

менявшейся. Эта функция (именуемая здесь мировой) представляет собой, с точностью до тривиального множителя, квадрат расстояния по геодезической между двумя событиями в пространстве — времени, рассматриваемый как функция восьми координат этих событий. Она оказывается мощным инструментом при вычислениях, так как позволяет использовать обычный метод приближения с помощью степенных рядов без отказа от удобств тензорного исчисления.

Чтобы скомпенсировать неполноту освещения нашего предмета, в книге приведена довольно обширная библиография. Однако чтобы она не оказалась слишком большой, нужно было провести отбор и за каждый пропуск источников, которые следовало бы включить, я заранее приношу искренние извинения. Для увеличения полезности библиографии почти во всех случаях приводятся ссылки на обзоры. Если бы такую библиографию расширить до объема одного или даже двух томов, с тем чтобы включить в нее не просто ссылки на обзоры, а сами обзоры, результат для изучающих общую теорию относительности был бы самым плодотворным.

Я охарактеризовал дух этой книги как иронический, но он является, кроме того, геометрическим. Возможно, то и другое шагают рядом, ибо простая пространственно-временна́я схема часто позволяет увидеть внутренний смысл множества вычислений. Одна из причин того, что общая теория относительности остается для столь многих физиков вещью в себе, очевидно, заключается в неумении последних понять, насколько легко построить качественное геометрическое представление того, что происходит. Действительно, легче иметь дело с пространственно-временными схемами, которые остаются фиксированными, чем с кинематическими картинами ньютоновской механики.

Если мы принимаем идею о том, что пространство — время является римановым четырехмерным пространством (а если мы релятивисты, так мы должны это сделать), то, очевидно, первая наша задача будет состоять в том, чтобы прочувствовать эту четырехмерность, подобно тому как мореплаватели далеких времен должны были ощутить сферичность океана. И первое, что нам нужно осмыслить — это тензор Римана, поскольку *этот тензор и есть* гравитационное поле: если он обращается в нуль (и только в этом случае) — поля не существует. И однако, что довольно странно, этот важнейший факт был отодвинут на задний план. Когда я начинал писать эту книгу, я не знал ни того, какими при этом были двадцать инвариантных компонент тензора Римана, ни того, какова величина первой кривизны моей мировой линии, не говоря уже о второй и третьей кривизнах. Теперь я знаю больше, и то, что я знаю, я вложил в эту книгу. Теперь я знаю, что, если поломаю себе шею, падая со скалы, в моей смерти будет повинна не сила гравитации (то, чего не существует, по необходимости невинно), а тот факт, что я не позаботился о первой кривизне моей мировой линии, променяв ее безопасность на полную опасностей геодезическую. Для иронического ума нет большой разницы между земным и возвышенным — несомненно, именно поэтому Сократ дожен был выпить чашу яда.

Я многим обязан хорошо известным книгам Паули, Эддингтона, Толмана, Бергмана, Мёллера и Лишнеровица, однако геометрический способ рассмотрения пространства — времени восходит непосредственно к Минковскому. Он протестовал против употребления слова «относительность» в применении к теории, основанной на «абсолютном» (пространство — время), и я уверен, что если бы он дожил до создания общей теории относительности, то повторил бы свой протест даже в более сильных выражениях. Однако нам незачем беспокоиться по поводу названия, ибо слово «относительность» означает теперь прежде всего теорию Эйнштейна и лишь во вторую очередь ту туманную философию, которая, может быть, первоначально применила

это слово. Именно затем, чтобы поддержать взгляды Минковского на принцип относительности, я, как видно, становлюсь на трудный путь миссионера. Когда во время дискуссий о релятивизме я пытаюсь сделать вещи более ясными с помощью пространственно-временной схемы, другие участники дискуссии смотрят на это с вежливой отрешенностью и после паузы смущения, словно они были свидетелями детской бестактности, возобновляют спор, опираясь на свои собственные понятия. Возможно, они имеют в виду Принцип эквивалентности. Если так, то наступает моя очередь вежливо не понимать, о чем идет речь, ибо я никогда не был в состоянии понять этот Принцип. Означает ли он, что сигнатура пространственно-временной метрики равна $+2$ (или -2, если предпочесть другое определение)? Если так, то это важно, но вряд ли можно назвать Принципом. Может быть, он значит, что эффекты гравитационного поля неотличимы от эффектов ускорения наблюдателя? Если так, то это неверно. В теории Эйнштейна в зависимости от того, отличен от нуля тензор Римана или равен нулю, гравитационное поле присутствует или отсутствует. Это свойство абсолютно; оно никак не связано с мировой линией какого-то наблюдателя. Пространство — время либо плоско, либо искривлено, и в нескольких местах этой книги я затратил немало усилий, чтобы отделить истинные гравитационные эффекты, обязанные искривлению пространства — времени, от эффектов, обусловленных искривлением мировой линии наблюдателя (в простейших случаях последние преобладают). Принцип эквивалентности выполнил важные обязанности повивальной бабки при рождении общей теории относительности, но, как заметил Эйнштейн, младенец никогда не вырос бы из пеленок, если бы не идея Минковского. Я предлагаю похоронить повивальную бабку с соответствующими почестями и посмотреть прямо в лицо фактам абсолютного пространства — времени.

Я хочу обратить внимание читателя на дополнения, помещенные в конце книги. В дополнении А поясняются обозначения, причем там приведены полемические замечания, направленные против некоторых условностей (разумеется, совершенно незначительных). В дополнении Б содержатся скромные предложения, касающиеся названий дробных и кратных единиц, а также перечень физических величин, выраженных в секундах. Я нахожу этот перечень очень полезным при быстром сравнении величин.

Читая в течение ряда лет лекции по теории относительности для выпускников университета в Торонто, я достиг некоторого понимания этой теории, объясняя ее другим, и это понимание расширилось и окрепло за последние одиннадцать лет благодаря многим семинарским занятиям и частным дискуссиям в школе теоретической физики при дублинском Институте исследований повышенного уровня. В особенности многим я обязан профессорам К. Ланчосу и Э. Шредингеру, несмотря на то (или, возможно, благодаря тому), что наши точки зрения часто были различными. Научные сотрудники пришли в нашу школу из разных стран и с весьма разнообразной и широкой подготовкой. Для меня это было настолько могучим стимулом, что, как мне кажется, я больше от них взял, чем был в состоянии им дать. Работы Балаца, Басса, Бертотти, Дэса, Израэля, Маста, О'Брайена, О'Райфертая, Пирани, Рейнера и Стретди цитируются в библиографии. Работая над этой книгой, я, чтобы устранить неясности и неправильности, подсознательно (а иногда даже сознательно) мысленно обращался к своим коллегам, бывшим и настоящим, как к неофициальному Совету Цензоров, требующему устранения всякой неясности и ошибок.

Я благодарен А. Дэсу и д-ру Ф. Пирани за их труд по прочтению корректуры настоящей книги. Но я признателен им не только за это. Во многих дискуссиях они помогали мне разобраться в областях, в которых я был либо частично, либо полностью несведущим. Благодаря А. Дэсу (и в некоторой сте-

пени также д-ру В. Боннору) я осмелился сбросить на время панцирь «геометрии» (что, сами понимаете, имеет смысл) и пытался без него справиться с формализмом аксиальной симметрии и теми космологическими решениями, которые здесь названы пространствами электровакуума (и то и другое — плод утонченного ума Г. Вейля). Д-р Пирани познакомил меня с правилом переноса Ферми, играющим в данной книге важную роль, и моя попытка превратить риманову геометрию в физику наблюдаемых (измерять тензор Римана!) родилась в основном в дискуссиях с ним и была в дальнейшем развита в дискуссиях с д-ром К. Мастом. Замечания Пирани, сделанные по поводу книги в момент, когда она находилась в стадии подготовки к изданию, были самыми полезными. Но я снимаю всякую ответственность как с него, так и с Дэса: все ошибки в этой книге — мои.

Дублин, 1960 г. *Дж. Л. Синг*

Глава I

ОСНОВНЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РИМАНОВА ПРОСТРАНСТВА—ВРЕМЕНИ

§ 1. Метрический тензор и допустимые координаты

Хотя знание тензорного исчисления и предполагается, однако представляется целесообразным выписать в первой главе некоторые основные тензорные формулы и вытекающие из них следствия. Вторая глава посвящена главным образом новой тензорной технике (мировая функция); физические же идеи начинают фигурировать, лишь начиная с гл. III. Для некоторых читателей может оказаться более предпочтительным начать чтение книги именно с этой главы и обращаться к двум первым по мере надобности.

Нам предстоит рассмотреть четырехмерное риманово пространство, которому мы дадим название *пространства — времени*. Используя латинские индексы[1]) для ряда значений 1, 2, 3, 4 (с обычным правилом суммирования), мы обозначим координаты через x^i, а *метрический* (или *фундаментальный*) *тензор* через g_{ij} $(= g_{ji})$. Инвариант

$$\Phi = g_{ij}\, dx^i\, dx^j \tag{1.1}$$

есть *метрическая* (или *фундаментальная*) *форма*. Она имеет сигнатуру $+2$, означающую, что в любой выбранной нами точке матрица g_{ij} приводится к диагональному виду $(1, 1, 1, -1)$.

Насколько гладкими являются десять функций g_{ij}? В физике такие вопросы обычно оставляют в стороне до тех пор, пока их рассмотрение не станет совершенно необходимым. Было бы заманчивым допустить экстремальную гладкость, т. е. дифференцируемость, бесконечное число раз. Однако для Солнца, Земли или какого-либо другого тела удобнее принять модель, в которой существует резкий переход от материи к вакууму и, как результат такого перехода, имеет место разрыв гладкости g_{ij}. Чтобы предусмотреть такую ситуацию, нужно принять некоторые гипотезы. Здесь мы будем следовать Лишнеровицу [671].

Предполагается, что пространство — время можно разбить на частично перекрывающиеся области с системой *допустимых координат* x^i в каждой из них, и что преобразования, связанные с переходом от одной системы координат к другой, относятся к классу C^3 [2]). Однако это не исключает случая, когда все пространство можно покрыть одной системой допустимых координат. Здесь важно лишь то обстоятельство, что каждая область допустимых координат может оказаться разделенной *трехмерными гиперповерхностями разрыва* на некоторое число подобластей. Во всей области g_{ij} относятся к функциям класса C^1, а в подобластях — класса C^3. Таким образом, мы допускаем возможность разрывов вторых производных g_{ij} при

---

[1]) См. дополнение А, касающееся обозначений. Они в основном совпадают с обозначениями Синга и Шилда [1190]. Все ссылки относятся к библиографии, помещенной в конце книги.

[2]) Преобразования с непрерывными третьими производными.

переходе через гиперповерхность разрыва. Это предположение может показаться слишком искусственным. В оправдание можно привести следующие соображения: во-первых, оно в процессе применения не противоречит физическим идеям и, во-вторых (хотя это соображение — до некоторой степени сомнительный аргумент), оно аналогично допущению, с которым мы встречаемся в теории потенциала, если величины g_{ij} принять за аналоги ньютоновского потенциала.

Читателю, пока у него не возникнет необходимости рассмотреть вопрос о гладкости функций g_{ij}, мы порекомендуем не вдаваться в упомянутые выше тонкости и считать, что g_{ij} дифференцируемы сколь угодно большое число раз.

Для некоторого контравариантного вектора V^i квадратичная форма $g_{ij}V^iV^j$ положительна, отрицательна или равна нулю. Если ее величина отлична от нуля, то определим *индикатор* вектора V^i [обозначим его $\varepsilon(V)$], равный ± 1, так, что

$$\varepsilon(V)\, g_{ij}V^iV^j > 0. \tag{1.2}$$

Мы используем следующую терминологию:

$g_{ij}V^iV^j < 0$, $\varepsilon(V) = -1$, временноподобный вектор;

$g_{ij}V^iV^j > 0$, $\varepsilon(V) = 1$, пространственноподобный вектор;

$g_{ij}V^iV^j = 0$, нулевой вектор[1]).

Иногда оказывается удобным приписать индикатор ± 1 нулевому вектору; какое значение из двух мы при этом выберем, не существенно, поскольку индикатор умножается на нуль.

Бесконечно малый вектор dx^i в точке x^i имеет *величину* (или *норму*)

$$ds = (\varepsilon g_{ij}dx^i dx^j)^{1/2} \geqslant 0, \tag{1.3}$$

где ε — индикатор dx^i. Величину ds можно также называть *бесконечно малой мерой* вектора dx^i. Для любой кривой C, соединяющей точки A и B, интеграл

$$L = \int_A^B ds = \int_A^B (\varepsilon g_{ij}dx^i dx^j)^{1/2} \tag{1.4}$$

определяет *конечную меру*[2]), зависящую, разумеется, от выбора кривой C.

Для облегчения ссылок приведем перечень некоторых хорошо известных формул (запятые в индексах означают частные производные):

$$\text{Символ Кронекера} = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases} \tag{1.5}$$

$$g = \det g_{ij} < 0. \tag{1.6}$$

$$g^{ij}g_{ik} = \delta^j_k. \tag{1.7}$$

---

[1]) При этом $V^i \neq 0$. Употребителен также термин «изотропный вектор». — *Прим. ред.*

[2]) Абстрактная геометрия заимствует понятия из элементарной физической геометрии, и это приводит к значительной семантической путанице. Геометр склонен для интеграла L употреблять понятие *длина*. Однако это опасно, так как слово *длина* уже приобрело некоторый физический смысл, который не всегда соответствует математическому определению этого термина. Здесь мы будем избегать понятия *длина* и введем его с необходимой осторожностью лишь в гл. III.

Символы Кристоффеля: $[ij, k]=\frac{1}{2}(g_{ik,j}+g_{jk,i}-g_{ij,k}),$

$$\Gamma^i_{jk}=\{{}_j{}^i{}_k\}=g^{ia}[jk, a],$$

$$\Gamma^a_{ai}=\frac{1}{2}[\ln(-g)]_{,i}=\frac{1}{2}g^{-1}g_{,i}, \qquad (1.8)$$

$$g_{ij,k}=g_{ia}\Gamma^a_{jk}+g_{ja}\Gamma^a_{ik}.$$

В любой заданной точке [1] [2] P можно выбрать координаты таким образом, чтобы в P было

$$g_{ij,k}=0,\ [ij, k]=0,\ \Gamma^i_{jk}=0. \qquad (1.9)$$

Это значительно облегчает некоторые алгебраические вычисления.

§ 2. Производные и геодезические

Для векторного и тензорного полей, определенных во всей области пространства – времени, *ковариантные производные* (обозначаемые вертикальной чертой) имеют следующий вид:

$$V^i_{|j}=V^i_{,j}+\Gamma^i_{ja}V^a, \qquad (1.10)$$

$$V_{i|j}=V_{i,j}-\Gamma^a_{ij}V_a, \qquad (1.11)$$

$$T^{ij}_{\ \ |k}=T^{ij}_{\ \ ,k}+\Gamma^i_{ka}T^{aj}+\Gamma^j_{ka}T^{ia}, \qquad (1.12)$$

$$T^i_{j|k}=T^i_{j,k}+\Gamma^i_{ka}T^a_j-\Gamma^a_{jk}T^i_a, \qquad (1.13)$$

$$T_{ij|k}=T_{ij,k}-\Gamma^a_{ik}T_{aj}-\Gamma^a_{jk}T_{ia}. \qquad (1.14)$$

Формулы для тензоров более высокого ранга имеют аналогичный вид. Тождественно имеем

$$g_{ij|k}=0,\ \delta^i_{j|k}=0,\ g^{ij}_{\ \ |k}=0. \qquad (1.15)$$

Для скаляра ковариантная производная совпадает с частной производной.

Для векторного и тензорного полей, определенных на кривой $x^i=x^i(u)$, *абсолютные производные* [3] имеют вид

$$\frac{\delta V^i}{\delta u}=\frac{dV^i}{du}+\Gamma^i_{ab}V^a\frac{dx^b}{du}, \qquad (1.16)$$

$$\frac{\delta V_i}{\delta u}=\frac{dV_i}{du}-\Gamma^a_{ib}V_a\frac{dx^b}{du}, \qquad (1.17)$$

$$\frac{\delta T^{ij}}{\delta u}=\frac{dT^{ij}}{du}+\Gamma^i_{ab}T^{aj}\frac{dx^b}{du}+\Gamma^j_{ab}T^{ia}\frac{dx^b}{du}, \qquad (1.18)$$

$$\frac{\delta T^i_j}{\delta u}=\frac{dT^i_j}{du}+\Gamma^i_{ab}T^a_j\frac{dx^b}{du}-\Gamma^a_{jb}T^i_a\frac{dx^b}{du}, \qquad (1.19)$$

$$\frac{\delta T_{ij}}{\delta u}=\frac{dT_{ij}}{du}+\Gamma^a_{ib}T_{aj}\frac{dx^b}{du}-\Gamma^a_{jb}T_{ia}\frac{dx^b}{du}, \qquad (1.20)$$

---

[1] Соотношения (1.9) могут также удовлетворяться вдоль заданной кривой или при некоторых условиях в заданном подпространстве (Ферми [324], О'Райфертай [840]).

[2] См. также: И. А. Схоутен и Д. Дж. Стройк, Введение в новые методы дифференциальной геометрии, М.— Л., 1939, т. 1, стр. 106.— *Прим. ред.*

[3] Любопытно отметить, что в работах по теории относительности формулы (1.10) — (1.15) занимали более важное положение, чем значительно более мощные формулы (1.16) — (1.21). Однако мы будем мало пользоваться как теми, так и другими в их явной форме. Наша цель должна состоять в том, чтобы по возможности работать с тензорами, как можно реже пользуясь в выражениях для ковариантных и абсолютных производных, а также для тензоров кривизны символами Кристоффеля, которые не являются компонентами тензора. Формулы (1.22) и (1.23) имеют фундаментальное значение.

причем формулы для тензоров более высокого ранга имеют аналогичный вид. Тождественно имеем

$$\frac{\delta}{\delta u} g_{ij} = 0, \quad \frac{\delta}{\delta u} \delta^i_j = 0, \quad \frac{\delta}{\delta u} g^{ij} = 0. \tag{1.21}$$

Для скаляра абсолютная производная совпадает с обычной.

Как для ковариантного, так и для абсолютного дифференцирований справедливо обычное правило дифференцирования произведений. Опуская индексы у тензоров A и B, можно следующим образом кратко сформулировать это важное обстоятельство:

$$(AB)_{|i} = A_{|i}B + AB_{|i}, \tag{1.22}$$

$$\frac{\delta}{\delta u}(AB) = \frac{\delta A}{\delta u} B + A \frac{\delta B}{\delta u}. \tag{1.23}$$

Операцию абсолютного дифференцирования можно применять по отношению к каждому из параметров векторных или тензорных полей, определенных в подпространстве двух или трех измерений. Рассмотрим двумерное пространство, заданное параметрическими уравнениями

$$x^i = x^i(u, v). \tag{1.24}$$

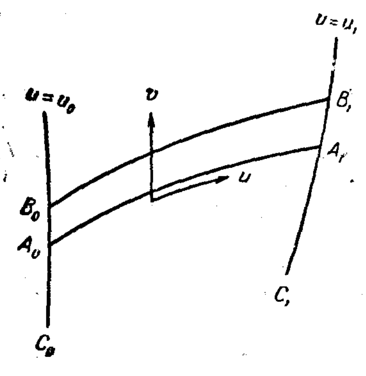
Мы имеем в нем два векторных поля:

$$U^i = \frac{\partial x^i}{\partial u}, \qquad V^i = \frac{\partial x^i}{\partial v}. \tag{1.25}$$

Если от этих векторных полей взять абсолютные производные по v и u соответственно, то с помощью (1.16) получим

$$\frac{\delta U^i}{\delta v} = \frac{\delta V^i}{\delta u}. \tag{1.26}$$

Этот результат очевиден, поскольку последнее уравнение является тензорным и справедливо для любой координатной системы, в которой символы Кристоффеля в рассматриваемой точке обращаются в нуль.



Фиг. 1. Вариационная задача для геодезических с незакрепленными конечными точками.

Уравнение (1.26) могло бы навести на мысль, что $\delta/\delta u$ и $\delta/\delta v$ коммутируют; однако в общем случае это неверно (см. § 5).

Теория геодезических (в частности, нулевых геодезических) хорошо известна из тензорного исчисления. Однако, имея в виду приложение этого понятия к мировой функции в гл. II, полезно изложить теорию геодезических заново, следуя плану, принятому Мёллером ([767], стр. 228).

Пусть C_0 и C_1 — две кривые (фиг. 1) и пусть они соединены множеством (∞^1) кривых, таких, как A_0A_1 и B_0B_1. Семейство соединяющих кривых образует двумерное пространство, определяемое уравнениями $x^i = x^i(u, v)$, где u — параметр, пробегающий все значения между фиксированными значениями на концах (u_0 на C_0 и u_1 на C_1), а v — параметр, принимающий на каждой из соединяющих кривых постоянное значение. Рассмотрим интеграл

$$I(v) = \frac{1}{2}(u_1 - u_0) \int\limits_{u_0}^{u_1} g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial u} \frac{\partial x^j}{\partial u} du, \tag{1.27}$$

взятый вдоль какой-либо из кривых $v = \text{const}$, или в обозначениях (1.25)

$$I(v) = \frac{1}{2}(u_1 - u_0)\int\limits_{u_0}^{u_1} g_{ij}U^iU^j\,du. \tag{1.28}$$

Тогда, используя (1.26), получаем

$$\frac{dI}{dv} = (u_1 - u_0)\int\limits_{u_0}^{u_1} g_{ij}U^i\,\frac{\delta V^j}{\delta u}\,du =$$

$$= (u_1 - u_0)\int\limits_{u_0}^{u_1}\frac{\partial}{\partial u}(g_{ij}U^iV^j)\,du - (u_1 - u_0)\int\limits_{u_0}^{u_1} g_{ij}\,\frac{\delta U^i}{\delta u}\,V^j\,du =$$

$$= (u_1 - u_0)\,[g_{ij}U^iV^j]_{u_0}^{u_1} - (u_1 - u_0)\int\limits_{u_0}^{u_1} g_{ij}\,\frac{\delta U^i}{\delta u}\,V^j\,du. \tag{1.29}$$

Рассмотрим теперь частный случай, когда кривые C_0, C_1 вырождаются в точки A_0, A_1 (фиг. 2), так что получается семейство кривых с фиксированными концами. Тогда на концах $V^j = 0$, и (1.29) принимает вид

$$\frac{dI}{dv} = -(u_1 - u_0)\int\limits_{u_0}^{u_1} g_{ij}\,\frac{\delta U^i}{\delta u}\,V^j\,du. \tag{1.30}$$

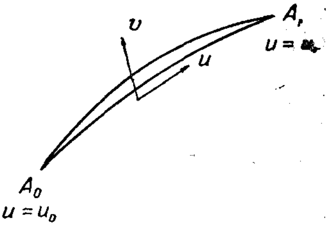
Мы определим *геодезическую* как такую кривую, на которой для вариаций, оставляющих фиксированными конечные точки, значение I стационарно. Это означает, что $dI/dv = 0$ для произвольных V^j везде, кроме конечных точек, и, таким образом, геодезическая удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\delta U^i}{\delta u} = \frac{\delta}{\delta u}\,\frac{dx^i}{du} = \frac{d^2x^i}{du^2} + \Gamma^i_{jk}\,\frac{dx^j}{du}\,\frac{dx^k}{du} = 0. \tag{1.31}$$

Эти уравнения допускают первый интеграл

$$g_{ij}\,\frac{dx^i}{du}\,\frac{dx^j}{du} = \varepsilon k^2, \quad \text{или} \quad ds = k\,du, \tag{1.32}$$

где k — константа, а ε — индикатор для временноподобной или пространственноподобной геодезической; геодезическую называют *изотропной*, если $k = 0$. Мы будем употреблять термин «геодезическая», включая в это понятие и «изотропную геодезическую».



Фиг. 2. Вариационная задача для геодезических с фиксированными конечными точками.

Каждая геодезическая имеет класс *канонических параметров*, для которых ее уравнения имеют вид (1.31), причем переход от одного канонического параметра к другому линеен[1]):

$$u' = au + b. \tag{1.33}$$

При других преобразованиях параметра в правой части появляется член, пропорциональный dx^i/du.

Для неизотропной геодезической можно подобрать канонические параметры так, чтобы $k = 1$, и, следовательно, для каждого такого параметра мы имеем $du = ds$. Таким образом, уравнения (1.31) можно записать в виде

$$\frac{\delta}{\delta s}\,\frac{dx^i}{ds} = \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk}\,\frac{dx^j}{ds}\,\frac{dx^k}{ds} = 0. \tag{1.34}$$

---

[1]) Величины a и b — постоянные.— *Прим. ред.*

Применяя вариационный принцип $\delta I = 0$ при фиксированных конечных точках, мы нашли не только класс кривых (геодезических), но также и класс канонических параметров для них. Чтобы интерпретировать интеграл I, заметим, что для любой неизотропной кривой $x^i = x^i(u)$ при $u_0 \leqslant u \leqslant u_1$ можно подобрать особый параметр, скажем u', определяемый соотношением

$$u' - u_0 = (u_1 - u_0)\frac{s}{L}, \tag{1.35}$$

где s — расстояние текущей точки от точки, в которой $u = u_0$, а L — значение s при $u = u_1$. Легко показать, что при таком выборе параметра интеграл I в (1.27) принимает значение

$$I(v) = \frac{1}{2}\varepsilon L^2. \tag{1.36}$$

Равенство (1.36) справедливо и для изотропных кривых, поскольку оно в этом случае обращается в тождество $0 \equiv 0$.

Таким образом, исходя из вариационного принципа, получаем

$$\delta(L^2) = 0. \tag{1.37}$$

Это соотношение содержит в себе и более привычное вариационное уравнение

$$\delta L = \delta \int ds = 0 \tag{1.38}$$

при условии, что $L \neq 0$. Преимущество принятого выше способа состоит в том, что он без какого-либо специального рассмотрения применим и к изотропным геодезическим; уравнению же (1.38) было бы, возможно, разумно оставить лишь историческое значение.

Рассмотренные выше вопросы тесно связаны с теорией мировой функции, которую нам предстоит обсудить в гл. II. Здесь же сделаем лишь один дальнейший шаг в нашем рассмотрении. Вернемся к фиг. 1 и уравнению (1.29). Пусть соединяющие кривые на фиг. 1 будут геодезическими, а u — каноническим параметром на каждой из них, пробегающим все значения между фиксированными значениями u_0, u_1 на концах. Тогда (1.29) сведется к следующему:

$$\frac{dI}{dv} = (u_1 - u_0)\left[g_{ij} U^i V^j\right]_{u_0}^{u_1}, \tag{1.39}$$

или в записи через вариации δ

$$\delta I = (u_1 - u_0)\left[g_{ij} U^i \delta x^j\right]_{u_0}^{u_1}. \tag{1.40}$$

Интеграл I оказывается теперь функцией координат A_0 (назовем их $x^{i'}$) и координат A_1 (назовем их x^i), а формула (1.40) для производных этой функции позволяет записать

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial x^i} &= (u_1 - u_0)\left(g_{ij}\frac{dx^j}{du}\right)_{A_1}, \\ \frac{\partial I}{\partial x^{i'}} &= -(u_1 - u_0)\left(g_{ij}\frac{dx^j}{du}\right)_{A_0}. \end{aligned} \tag{1.41}$$

Эти формулы имеют место также и для изотропной геодезической. Правые части инвариантны относительно преобразований канонического параметра. Для неизотропной геодезической мы имеем более простые формулы:

$$\frac{\partial I}{\partial x^i} = L\lambda_i, \qquad \frac{\partial I}{\partial x^{i'}} = -L\lambda_{i'}, \tag{1.42}$$

где $\lambda^{i'}$ и λ^{i} — единичные векторы, касательные к геодезической в точках A_0 и A_1 соответственно, так что они определяют ориентацию A_0A_1, а L — конечная мера кривой A_0A_1 [1]).

§ 3. Ортонормированные реперы и формулы Френе—Серре

Говорят, что четыре взаимно ортогональных единичных вектора образуют *ортонормированный репер* (сокращенно ОР). Векторы ОР можно обозначить через $\lambda^i_{(a)}$, где i — контравариантный тензорный индекс, а a — номер, позволяющий различать векторы ОР. Ковариантные компоненты того же самого ОР имеют вид

$$\lambda_{(a)i} = g_{ij}\lambda^j_{(a)}. \tag{1.43}$$

Три из четырех векторов ОР обязательно пространственноподобны, а один временноподобен. Мы будем всегда так нумеровать векторы, чтобы $\lambda^i_{(4)}$ был временноподобным.

Тогда условия ортонормируемости можно записать в виде

$$\lambda^i_{(a)}\lambda_{(b)i} = \eta_{(ab)}, \tag{1.44}$$

где

$$\eta_{(ab)} = \eta^{(ab)} = \operatorname{diag}(1,\ 1,\ 1,\ -1) \tag{1.45}$$

представляет собой инвариантную диагональную матрицу с указанными элементами. Она удовлетворяет соотношению

$$\eta^{(ab)}\eta_{(ac)} = \delta^b_c, \tag{1.46}$$

и, следовательно, с точки зрения матричного исчисления представляет собой корень квадратный из единицы.

Чтобы обеспечить простоту в дальнейшем, нам придется ввести здесь некоторые усложнения. Номера при векторах не имеют смысла тензорных индексов, и тем не менее мы будем поднимать и опускать их с помощью η-матрицы. Таким образом определим

$$\lambda^{(a)i} = \eta^{(ab)}\lambda^i_{(b)}, \qquad \lambda^{(a)}_i = \eta^{(ab)}\lambda_{(b)i}, \tag{1.47}$$

и с помощью (1.46) получим

$$\lambda^i_{(a)} = \eta_{(ab)}\lambda^{(b)i}, \qquad \lambda_{(a)i} = \eta_{(ab)}\lambda^{(b)}_i. \tag{1.48}$$

Теперь условия (1.44) можно записать более точно в виде

$$\lambda^i_{(a)}\lambda^{(b)}_i = \delta^b_a, \tag{1.49}$$

и как алгебраическое следствие этого соотношения получим

$$\lambda^i_{(a)}\lambda^{(a)}_j = \delta^i_j. \tag{1.50}$$

Два репера $\lambda^i_{(a)}$ и $\lambda^{(a)i}$ тесно связаны между собой [2]): их пространственноподобные векторы совпадают, а временноподобные — противоположно направлены.

Если в некоторой точке пространства — времени заданы два ОР, $\lambda^i_{(a)}$ и $\mu^i_{(a)}$, то они связаны друг с другом преобразованием Лоренца. Переходя

---

[1]) Конечная мера определена формулой (1.4). — *Прим. ред.*

[2]) Они образуют так называемые взаимные системы векторов. — *Прим. ред.*

к обсуждению этого преобразования, введем инвариантную *матрицу Лоренца*

$$L^{(a)}_{\cdot (b)} = \lambda^{(a)}_i \mu^i_{(b)}, \tag{1.51}$$

так что в матричных обозначениях $\mathbf{L} = 1$, если два ОР совпадают. Умножая (1.51) поочередно на $\mu^{(b)}_j$ и $\lambda^j_{(a)}$, получаем

$$\lambda^{(a)}_j = L^{(a)}_{\cdot (b)} \mu^{(b)}_j, \qquad \mu^i_{(b)} = L^{(a)}_{\cdot (b)} \lambda^j_{(a)}. \tag{1.52}$$

Эти соотношения эквивалентны выражениям для преобразования Лоренца. Нам нужно название для номеров, стоящих в круглых скобках; будем называть их *индексами Лоренца*, чтобы отличать их от обычных тензорных индексов.

Умножая второе соотношение в (1.52) на $\mu_{(c)j}$ и используя (1.44), получаем

$$\eta_{(bc)} = L^{(a)}_{\cdot (b)} \lambda^j_{(a)} \mu_{(c)j} = L^{(a)}_{\cdot (b)} \eta_{(ad)} \lambda^{(d)}_j \mu^j_{(c)} = L^{(a)}_{\cdot (b)} \eta_{(ad)} L^{(d)}_{\cdot (c)}. \tag{1.53а}$$

Рассматривая $L^{(a)}_{\cdot (b)}$ как четырехмерную матрицу, так что верхний индекс означает строку, нижний — столбец, имеем в матричном обозначении

$$\tilde{\mathbf{L}} \eta \mathbf{L} = \eta, \qquad \mathbf{L} \eta \tilde{\mathbf{L}} = \eta, \tag{1.53б}$$

причем второе уравнение вытекает из первого, так как $\eta^2 = 1$.

Любой вектор, так же как и любой тензор, можно разложить на компоненты по ОР $\lambda^i_{(a)}$. Эти компоненты инвариантны в тензорном смысле (т. е. относительно преобразований координат), однако они зависят от выбора ОР и оказываются либо контравариантными, либо ковариантными относительно преобразований Лоренца для ОР.

Мы имеем следующие стандартные формулы:

$$\begin{gathered}
V_{(a)} = V_i \lambda^i_{(a)}, \qquad V^{(a)} = V^i \lambda^{(a)}_i, \\
V_i = V_{(a)} \lambda^{(a)}_i, \qquad V^i = V^{(a)} \lambda^i_{(a)}, \\
T_{(ab)} = T_{ij} \lambda^i_{(a)} \lambda^j_{(b)}, \qquad T_{ij} = T_{(ab)} \lambda^{(a)}_i \lambda^{(b)}_j, \\
R_{(abcd)} = R_{ijkm} \lambda^i_{(a)} \lambda^j_{(b)} \lambda^k_{(c)} \lambda^m_{(d)}, \\
R_{ijkm} = R_{(adcd)} \lambda^{(a)}_i \lambda^{(b)}_j \lambda^{(c)}_k \lambda^{(d)}_m, \\
R^{ijkm} = R^{(abcd)} \lambda^i_{(a)} \lambda^j_{(b)} \lambda^k_{(c)} \lambda^m_{(d)}, \\
V_{(a)} = \eta_{(ab)} V^{(b)}, \qquad V^{(a)} = \eta^{(ab)} V_{(b)}, \\
T_{(ab)} = \eta_{(ac)} \eta_{(bd)} T^{(cd)}, \qquad T^{(ab)} = \eta^{(ac)} \eta^{(bd)} T_{(cd)}.
\end{gathered} \tag{1.54}$$

Читатель быстро достигнет уверенности в обращении с индексами Лоренца и поймет, как они взаимодействуют с тензорными индексами. Правило «опускания и поднятия» встречается повсеместно.

Представляют особый интерес ОР, связанные с каждой точкой кривой Г в пространстве — времени (мы будем рассматривать только временно-подобные кривые). Рассмотрим следующие уравнения:

$$\frac{\delta A^i}{\delta s} = b B^i, \tag{1.55а}$$

$$\frac{\delta B^i}{\delta s} = c C^i + b A^i, \tag{1.55б}$$

$$\frac{\delta C^i}{\delta s} = d D^i - c B^i, \tag{1.55в}$$

$$\frac{\delta D^i}{\delta s} = -d C^i \tag{1.55г}$$

вместе с условиями

$$A^iA_i = -1, \quad B^iB_i = C^iC_i = D^iD_i = 1. \tag{1.55д}$$

Коэффициенты b, c и d представляют собой неотрицательные[1]) скаляры. Пусть

$$A^i = \frac{dx^i}{ds} \tag{1.56}$$

есть единичный вектор, касательный к Г; формула (1.56) совместна с (1.55д). Тогда из уравнений (1.55а) и (1.55д) определяются B^i и b, из уравнений (1.55б) и (1.55д) определяются C^i и c, и из (1.55в) и (1.55д) можно найти D^i и d. В силу (1.55д) все четыре вектора — единичные. Установив их ортогональность, покажем, что они образуют OP, и, наконец, удовлетворим уравнению (1.55г).

Доказательство состоит в следующем. Согласно (1.55д), имеем

$$A_i \frac{\delta A^i}{\delta s} = 0, \tag{1.57}$$

и, следовательно, из (1.55а) вытекает, что

$$A_iB^i = 0. \tag{1.58}$$

Таким образом, B^i ортогонален A^i. Для доказательства того, что C^i ортогонален A^i и B^i, образуем из (1.55б) произведения

$$cA_iC^i = A_i \frac{\delta B^i}{\delta s} + b, \tag{1.59}$$

$$cB_iC^i = B_i \frac{\delta B^i}{\delta s}. \tag{1.60}$$

Дифференцируя (1.58) и учитывая (1.55а), получаем

$$A_i \frac{\delta B^i}{\delta s} = -B_i \frac{\delta A^i}{\delta s} = -b, \tag{1.61}$$

и, следовательно, согласно (1.59), имеем $A_iC^i = 0$. С учетом (1.55д) из (1.60) получаем $B_iC^i = 0$. Таким образом, C^i ортогонален A^i и B^i. Доказательство того, что D^i ортогонален A^i, B^i и C^i, проводится таким же путем. Чтобы доказать (1.55г), заметим, что любой вектор можно разложить по реперу (A, B, C, D), и поэтому можно записать

$$\frac{\delta D^i}{\delta s} = \alpha A^i + \beta B^i + \gamma C^i + \delta D^i. \tag{1.62}$$

Умножая это уравнение поочередно на A_i, B_i, C_i, D_i и используя (1.55а) — (1.55в) и уже доказанные условия ортогональности, получаем, что

$$\alpha = \beta = \delta = 0, \quad \gamma = -d, \tag{1.63}$$

и, следовательно, (1.55г) удовлетворено.

Уравнения (1.55) суть *формулы Френе—Серре*. Величины B^i, C^i, D^i представляют собой первую, вторую и третью нормали к Г соответственно, а b, c, d — первую, вторую и третью кривизны.

Простейшей из всех временноподобных кривых является геодезическая. Для нее $b = c = d = 0$. Следующая по сложности кривая — это временноподобная *окружность*[2]), определяемая условиями

$$b = \text{const}, \quad c = d = 0; \tag{1.64}$$

[1]) Если на Г имеют место нули для b, c и d, то лучше допустить для этих скаляров как положительные, так и отрицательные значения, чтобы сохранить непрерывность векторов B^i, C^i, D^i.

[2]) Эта окружность не является замкнутой кривой. Ее, возможно, естественнее назвать *гиперболой постоянной кривизны*.

Для нее формулы Френе—Серре сводятся к следующим:

$$\frac{\delta A^i}{\delta s} = bB^i, \quad \frac{\delta B^i}{\delta s} = bA^i,$$
$$\frac{\delta C^i}{\delta s} = 0, \quad \frac{\delta D^i}{\delta s} = 0. \tag{1.65}$$

Далее мы имеем временноподобную *винтовую линию*, определяемую условиями

$$b = \mathrm{const}, \quad c = \mathrm{const}, \quad d = 0. \tag{1.66}$$

Формулы Френе—Серре для нее имеют вид

$$\frac{\delta A^i}{\delta s} = bB^i, \quad \frac{\delta B^i}{\delta s} = cC^i + bA^i,$$
$$\frac{\delta C^i}{\delta s} = -cB^i \quad \frac{\delta D^i}{\delta s} = 0. \tag{1.67}$$

§ 4. Параллельный перенос и перенос Ферми — Уолкера

Рассмотрим кривую Г, заданную уравнениями $x^i = x^i(u)$, и векторное поле V^i, определенное на Г. Говорят, что вектор V^i претерпевает *параллельный перенос* (Леви-Чивита [634]) вдоль Г, если его абсолютная производная обращается в нуль:

$$\frac{\delta V^i}{\delta u} = 0. \tag{1.68}$$

Это определение верно и в том случае, когда Г — изотропная кривая. Кроме того, уравнение (1.68) не меняет своей формы при преобразованиях параметра u.

Очевидно, что при параллельном переносе величина вектора не меняется, а также не меняется и скалярное произведение двух векторов:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta U^i}{\delta u} &= 0\\ \frac{\delta V^i}{\delta u} &= 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned}&\frac{d}{du}(U_iU^i) = 0, \quad \frac{d}{du}(V_iV^i) = 0,\\ &\frac{d}{du}(U_iV^i) = 0.\end{aligned}\right. \tag{1.69}$$

Уравнение (1.68) определяет V^i вдоль Г, если V^i заданы в какой-нибудь одной точке на Г. Из (1.69) ясно, что ОР $\lambda^i_{(a)}$ (см. § 3) остается ОР при параллельном переносе. Если параллельному переносу подвергается также и вектор V^i, то его компоненты $V_{(a)}$ в ОР [см. (1.54)] остаются постоянными.

Единичный вектор, касательный к геодезической, претерпевает параллельный перенос, поскольку, как это видно из (1.34),

$$\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^i}{ds} = 0. \tag{1.70}$$

В случае изотропной геодезической касательный вектор dx^i/du подвергается параллельному переносу при условии, что u есть канонический параметр. В этом случае, согласно (1.31),

$$\frac{\delta}{\delta u}\frac{dx^i}{du} = 0. \tag{1.71}$$

Рассмотрим теперь временноподобную кривую Г, заданную уравнениями $x^i = x^i(s)$. Запишем единичный касательный вектор в виде $A^i = dx^i/ds$. Мы определим *перенос Ферми—Уолкера* [324, 1327] (сокращенно перенос Ф—У) вектора F^i вдоль Г с помощью уравнения

$$\frac{\delta F^i}{\delta s} = bF_j(A^i B^j - A^j B^i), \tag{1.72}$$

где B^i и b представляют собой соответственно первую нормаль и первую кривизну Г в соответствии с (1.55а). Как и в случае параллельного переноса, это уравнение определяет F^i вдоль Г, если F^i заданы в какой-нибудь одной точке на Г.

Важное свойство переноса Ф—У состоит в том, что единичный касательный вектор A^i автоматически претерпевает перенос Ф—У. Легко проверить, что для него в силу (1.55а), (1.55д) и (1.58)

$$\frac{\delta A^i}{\delta s} = bA_j(A^i B^j - A^j B^i). \tag{1.73}$$

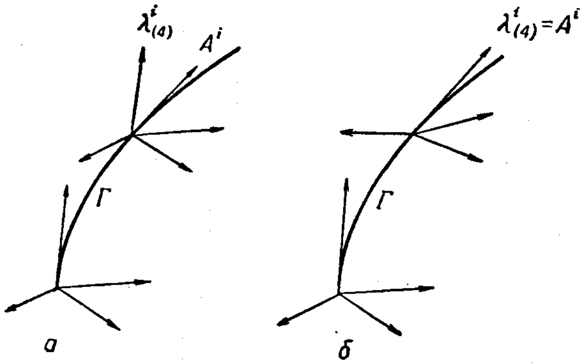
Перенос Ф—У имеет сходство с параллельным переносом в смысле сохранения нормы вектора и скалярного произведения. Таким образом, если U_i и V_i одновременно подвергаются переносу Ф—У, то

$$\frac{d}{ds}(V_i V^i) = 2V_i \frac{\delta V^i}{\delta s} = 2bV_i V_j (A^i B^j - A^j B^i) = 0, \tag{1.74}$$

$$\frac{d}{ds}(U_i V^i) = U_i \frac{\delta V^i}{\delta s} + V_i \frac{\delta U^i}{\delta s} = b(U_i V_j + V_i U_j)(A^i B^j - A^j B^i) = 0. \tag{1.75}$$

Ясно, что, как и при параллельном переносе, при переносе Ф—У сохраняются ОР и компоненты вектора в ОР.

Поскольку параллельный перенос определяется более простым уравнением, он в математическом отношении более фундаментален, чем перенос Ф — У, однако последний оказывается более важным в некоторых



Фиг. 3. *а* — параллельный перенос; *б* — перенос Ферми — Уолкера.

физических ситуациях. Причина этого поясняется фиг. 3. Если мы возьмем ОР на Г так, чтобы его четвертый вектор был касательным к Г в некоторой точке (так, что $\lambda^i_{(4)} = A^i$), то при параллельном переносе $\lambda^i_{(4)}$ отклонится от A^i (если только не окажется что Г — геодезическая). Однако при переносе Ф — У $\lambda^i_{(4)}$ остается касательным к Г. Таким образом, перенос Ф — У не только сохраняет нам ОР вдоль Г, но сохраняет также ортонормированный *3-репер*, ортогональный Г. Это приводит к образованию «пространственной системы координат» для наблюдателя, «движущегося» в пространстве —

времени вдоль Г, и, как мы увидим в дальнейшем, она оказывается именно той системой координат, которая позволяет обеспечить правильное релятивистское обобщение ньютоновского понятия «невращающейся системы отсчета».

Когда Г — геодезическая, параллельный перенос и перенос Ф — У совпадают [в (1.72) нужно положить $b = 0$] при условии, если Г — неизотропная геодезическая. Поскольку перенос Ф — У связан с s, он оказывается неопределенным вдоль любой изотропной линии.

Чтобы завершить рассмотрение переноса Ф — У, рассмотрим ОР $\lambda^i_{(a)}$, подвергающийся переносу Ф — У вдоль Г так, что

$$\lambda^i_{(4)} = A^i \tag{1.76}$$

представляет собой единичный вектор, касательный к Г. Каждый из четырех векторов $\delta\lambda^i_{(a)}/\delta s$ можно отнести к реперу, и мы записываем

$$\frac{\delta\lambda^i_{(a)}}{\delta s} = Q_{(ab)}\eta^{(bc)}\lambda^i_{(c)}, \tag{1.77}$$

где η — множитель, определяемый в (1.45), введен ради удобства обозначений. Умножим на $\lambda_{(d)i}$ и воспользуемся условиями (1.44); это дает

$$Q_{(ad)} = \lambda_{(d)i}\frac{\delta\lambda^i_{(a)}}{\delta s}, \tag{1.78}$$

ибо

$$\eta^{(bc)}\eta_{(cd)} = \delta^b_d. \tag{1.79}$$

Но в силу (1.72)

$$\frac{\delta\lambda^i_{(a)}}{\delta s} = b\lambda_{(a)j}(\lambda^i_{(4)}B^j - \lambda^j_{(4)}B^i), \tag{1.80}$$

и

$$Q_{(ad)} = b(B_{(a)}\eta_{(d4)} - B_{(d)}\eta_{(a4)}), \tag{1.81}$$

где

$$B_{(a)} = B_i\lambda^i_{(a)} \tag{1.82}$$

есть инвариантные компоненты вектора первой нормали в 4-репере [см. формулы (1.54)]. Инвариантная матрица Q играет важную роль, так как она характеризует поведение ОР при переносе Ф — У. Она кососимметрична, и все ее элементы тождественно равны нулю, за исключением следующих:

$$Q_{(4\alpha)} = -Q_{(\alpha 4)} = bB_{(\alpha)}, \tag{1.83}$$

где греческие индексы пробегают значения 1, 2, 3.

Если перенос Ф — У применить, в частности, к вектору F^i, ортогональному в некоторой точке на Г к касательному вектору A^i, то ортогональность, разумеется, сохранится. Тогда уравнение (1.72) примет более простой вид:

$$\frac{\delta F^i}{\delta s} = bA^i F_j B^j. \tag{1.84}$$

Это правило переноса впервые было сформулировано Ферми [324] в 1922 г. Мы будем называть его *переносом Ферми*, однако использовать его будем только для векторов, ортогональных к A^i.

Вращение ортонормированного 3-репера (B^i, C^i, D^i) относительно ортонормированного 3-репера(триэдра) векторов Ферми $\lambda^i_{(\alpha)}$ обсуждается в гл. III, § 9.

§ 5. Тензоры Римана, Риччи и Эйнштейна

Тензор Римана (или *тензор кривизны*) можно представить в нескольких эквивалентных формах. Именно,

$$R_{ijkm} = \frac{1}{2}(g_{im,\,jk} + g_{jk,\,im} - g_{ik,\,jm} - g_{jm,\,ik}) + \\ + g^{ab}([im,\, a]\,[jk,\, b] - [ik,\, a]\,[jm,\, b]), \tag{1.85}$$

$$R_{ijkm} = \frac{1}{2}(g_{im,\,jk} + g_{jk,\,im} - g_{ik,\,jm} - g_{jm,\,ik}) + g_{ab}(\Gamma^a_{im}\Gamma^b_{jk} - \Gamma^a_{ik}\Gamma^b_{jm}), \tag{1.86}$$

$$R_{ijkm} = [jm,\, i]_{,\,k} - [jk,\, i]_{,\,m} + \Gamma^a_{jk}[im,\, a] - \Gamma^a_{jm}[ik,\, a], \tag{1.87}$$

$$R^i_{\cdot jkm} = \Gamma^i_{jm,\,k} - \Gamma^i_{jk,\,m} + \Gamma^a_{jm}\Gamma^i_{ak} - \Gamma^a_{jk}\Gamma^i_{am}. \tag{1.88}$$

Тензор Римана удовлетворяет следующим уравнениям симметрии:

$$R_{ijkm} = -R_{jikm} = -R_{ijmk} = R_{kmij}, \tag{1.89}$$

$$R_{iabc} + R_{ibca} + R_{icab} = 0. \tag{1.90}$$

Число независимых компонент R_{ijkm} равно 20. Наиболее компактным способом представить этот тензор позволяют обозначения, когда каждой упорядоченной паре индексов из ряда 1, 2, 3, 4 сопоставляется индекс из ряда 1, 2, 3, 4, 5, 6, по схеме

$$\begin{matrix} 23 \longleftrightarrow 1, & 31 \longleftrightarrow 2, & 12 \longleftrightarrow 3, \\ 14 \longleftrightarrow 4, & 24 \longleftrightarrow 5, & 34 \longleftrightarrow 6. \end{matrix} \tag{1.91}$$

Все отличные от нуля ковариантные компоненты тензора Римана составляют симметричную 6×6-матрицу $\bar{R}_{AB}$, где прописные буквы принимают значения 1, 2, ..., 6. Например,

$$\begin{matrix} R_{2331} = R_{3123} = \bar{R}_{12} = \bar{R}_{21}, \\ R_{2314} = R_{1423} = \bar{R}_{14} = \bar{R}_{41}. \end{matrix} \tag{1.92}$$

Эта матрица содержит 21 элемент, что связано с характером ее симметрии. Циклическое тождество (1.90) приводит к уравнению

$$R_{2314} + R_{3124} + R_{1234} = \bar{R}_{14} + \bar{R}_{25} + \bar{R}_{36} = 0, \tag{1.93}$$

что сокращает число независимых элементов указанной матрицы на единицу.

Для ковариантного и абсолютного дифференцирования в двумерном пространстве $x^i = x^i(u,\, v)$ правила коммутации имеют следующий вид (мы обозначаем $U^i = \partial x^i/\partial u$, $V^i = \partial x^i/\partial v$):

$$T_{i\,|\,jk} - T_{i\,|\,kj} = R^a_{\cdot ijk}T_a, \tag{1.94}$$

$$\frac{\delta^2 T^i}{\delta u\,\delta v} - \frac{\delta^2 T^i}{\delta v\,\delta u} = R^i_{\cdot abc}T^a U^b V^c, \tag{1.95}$$

$$T_{ij\,|\,km} - T_{ij\,|\,mk} = R^a_{\cdot ikm}T_{aj} + R^a_{\cdot jkm}T_{ia}, \tag{1.96}$$

$$\frac{\delta^2 T^{ij}}{\delta u\,\delta v} - \frac{\delta^2 T^{ij}}{\delta v\,\delta u} = R^i_{\cdot abc}T^{aj}U^b V^c + R^j_{\cdot abc}T^{ia}U^b V^c. \tag{1.97}$$

Аналогичные правила коммутации имеют место для тензоров более высокого ранга. Эти правила легче всего проверить, используя координаты, для которых в рассматриваемой точке $\Gamma^i_{jk} = 0$.

Тензор Римана удовлетворяет *тождествам Бианки*:

$$R_{ijab|c} + R_{ijbc|a} + R_{ijca|b} = 0. \tag{1.98}$$

Риманова кривизна, связанная с парой векторов, ξ^i и η^i, есть инвариант

$$K = \frac{R_{ijkm}\xi^i\eta^j\xi^k\eta^m}{g_{abcd}\xi^a\eta^b\xi^c\eta^d}, \tag{1.99}$$

где

$$g_{abcd} = g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}. \tag{1.100}$$

Тензор g_{abcd} имеет тот же характер симметрии, что и тензор Римана.

Для пространства постоянной кривизны K имеем

$$R_{ijkm} = Kg_{ijkm}. \tag{1.101}$$

Пространство — время будет плоским тогда и только тогда, когда выполняется условие $R_{ijkm} = 0$. В плоском пространстве — времени существует система координат, такая, что

$$g_{ij} = \eta_{ij} = \operatorname{diag}(1, 1, 1, -1), \tag{1.102}$$

$$ds^2 = \varepsilon\eta_{ij}dx^i dx^j = \varepsilon[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - (dx^4)^2]. \tag{1.103}$$

Приведение к такому виду в отдельной точке, разумеется, всегда осуществимо.

Тензор Риччи R_{ij} определяют следующим образом[1]):

$$R_{ij} = R^k_{\cdot ijk} = g^{km}R_{kijm} = R_{ji}. \tag{1.104}$$

Подробнее

$$R_{ij} = \Gamma^a_{ai,j} - \Gamma^a_{ij,a} + \Gamma^a_{bi}\Gamma^b_{aj} - \Gamma^a_{ij}\Gamma^b_{ab}, \tag{1.105}$$

$$R_{ij} = \frac{1}{2}[\ln(-g)]_{,ij} - \Gamma^a_{ij,a} - \frac{1}{2}\Gamma^a_{ij}[\ln(-g)]_{,a} + \Gamma^a_{bi}\Gamma^b_{aj}. \tag{1.106}$$

Инвариант кривизны имеет вид

$$R = g^{ij}R_{ij} = R^i_i, \tag{1.107}$$

а тензор Эйнштейна —

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = G_{ji}, \tag{1.108}$$

или в смешанной форме

$$G^i_j = R^i_j - \frac{1}{2}\delta^i_j R. \tag{1.109}$$

В силу тождеств Бианки (1.98) тензор Эйнштейна удовлетворяет четырем *законам сохранения* (или тождествам), записываемым в виде следующих уравнений:

$$G^a_{i|a} = 0. \tag{1.110}$$

Эти уравнения имеют важный физический смысл, связанный с сохранением импульса и энергии. Их можно также записать в виде

$$G^{ia}_{|a} = 0. \tag{1.111}$$

С помощью умножения (1.110) на $(-g)^{1/2}$ уравнения сохранения можно представить в следующих альтернативных формах (Мёллер [767], стр. 337, 338):

$$[(-g)^{1/2}G^a_i]_{,a} - \frac{1}{2}(-g)^{1/2}G^{ab}g_{ab,i} = 0, \tag{1.112}$$

$$[(-g)^{1/2}G^a_i]_{,a} + \frac{1}{2}(-g)^{1/2}G_{ab}g^{ab}_{,i} = 0. \tag{1.113}$$

---

[1]) Некоторые авторы берут это выражение с обратным знаком.

Рассмотрим кососимметричную величину ε_{ijkm}, определяемую следующими свойствами: а) она равна нулю, если два индекса совпадают; б) $\varepsilon_{1234}=1$; в) она меняет знак, когда два индекса меняются местами. *Дискриминантный тензор*[1]) в контравариантной и ковариантной записях определяется соотношениями[2])

$$\eta^{ijkm}=(-g)^{-1/2}\varepsilon_{ijkm},\qquad \eta_{ijkm}=-(-g)^{1/2}\varepsilon_{ijkm}. \tag{1.114}$$

Тензор, *дважды дуальный*[3]) по отношению к тензору Римана, имеет вид

$$\tilde{R}^{ijkm}=\frac{1}{4}\eta^{ijab}R_{abcd}\eta^{cdkm}, \tag{1.115}$$

или (что эквивалентно) в смешанной форме

$$\tilde{R}^{ij}_{\cdot\cdot km}=\frac{1}{4}\eta^{ijab}R_{ab}^{\cdot\cdot cd}\eta_{cdkm}=-\frac{1}{4}\varepsilon_{ijab}R^{cd}_{\cdot\cdot ab}\varepsilon_{cdkm}. \tag{1.116}$$

Так, например,

$$\tilde{R}^{23}_{\cdot\cdot 23}=-R^{14}_{\cdot\cdot 14},\quad \tilde{R}^{23}_{\cdot\cdot 31}=-R^{24}_{\cdot\cdot 14},\quad \tilde{R}^{12}_{\cdot\cdot 34}=-R^{12}_{\cdot\cdot 34}. \tag{1.117}$$

В силу (1.115) имеем также

$$g\tilde{R}^{2314}=-R_{1423},\quad g\tilde{R}^{3124}=-R_{2431},\quad g\tilde{R}^{1234}=-R_{3412}. \tag{1.118}$$

Дважды дуальный тензор удовлетворяет условиям симметрии

$$\tilde{R}^{jikm}=-\tilde{R}^{jikm}=-\tilde{R}^{ijmk}=\tilde{R}^{kmij}, \tag{1.119}$$

$$\tilde{R}^{iabc}+\tilde{R}^{ibca}+\tilde{R}^{icab}=0. \tag{1.120}$$

С точностью до поднятия индексов эти уравнения совпадают по форме с условиями симметрии (1.89)—(1.90) для тензора Римана. Условия (1.119) очевидны, а (1.120) следует из (1.119), если среди индексов $(iabc)$ имеются одинаковые. Таким образом, (1.120) вытекает из (1.118) и (1.93).

Дважды дуальный тензор интересным способом связан с тензором Эйнштейна. Полагая в (1.116) $m=i$, получаем

$$\tilde{R}^{ij}_{\cdot\cdot ki}=\frac{1}{4}\delta^{jab}_{kcd}R^{cd}_{\cdot\cdot ab}, \tag{1.121}$$

где

$$\delta^{jab}_{kcd}=\varepsilon_{ijab}\varepsilon_{ikcd}. \tag{1.122}$$

Этот обобщенный символ Кронекера является тензором и подчиняется следующим правилам: 1) если (jab) все различны и (kcd) получаются из (jab) некоторой перестановкой, то он равен ± 1 в зависимости от того, четной или нечетной является подстановка $\begin{pmatrix} j & a & b \\ k & c & d\end{pmatrix}$; 2) в остальных случаях он равен нулю. Действительно,

$$\delta^{jab}_{kcd}=\begin{vmatrix} \delta^j_k & \delta^j_c & \delta^j_d \\ \delta^a_k & \delta^a_c & \delta^a_d \\ \delta^b_k & \delta^b_c & \delta^b_d \end{vmatrix}. \tag{1.123}$$

---

[1]) *«Тензор перестановок»* по терминологии автора; употребительны также названия *«абсолютно антисимметричный тензор»* и *«тензор Леви-Чивита»*. — *Прим. ред.*

[2]) Обозначения, используемые здесь для этих *ориентированных тензоров*, отличаются от обозначений Синга и Шилда ([1190], стр. 249). В (1.114) второй η-символ получен из первого с помощью опускания верхних индексов по обычным правилам.

[3]) Для обозначения дуального тензора часто используется одна звездочка, для обозначения же дважды дуального тензора — двойная; см. гл. X, § 3.

Подставляя это выражение в (1.121), после простых сокращений получаем (Ланчос [603])

$$\tilde{R}^{i\,j}_{\cdot\cdot\,ki} = G^j_k. \tag{1.124}$$

Относительно симметризованного тензора Римана см. гл. II, § 2.

§ 6. Отклонение геодезических

Рассмотрим ∞^1 кривых $\Gamma(v)$, заданных уравнениями $x^i = x^i(u, v)$, где $v = \text{const}$ вдоль каждой кривой (фиг. 4). Они образуют двумерное пространство. Положим

$$\frac{\partial x^i}{\partial u} = U^i, \quad \frac{\partial x^i}{\partial v} = V^i; \tag{1.125}$$

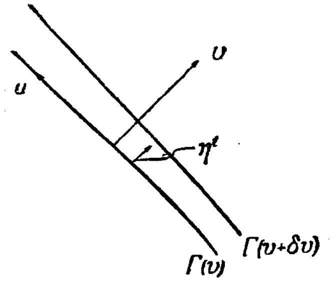
тогда в силу (1.26)

$$\frac{\delta U^i}{\delta v} = \frac{\delta V^i}{\delta u}. \tag{1.126}$$

При рассмотрении пары соседних кривых $\Gamma(v)$ и $\Gamma(v+\delta v)$ интуитивно можно предвидеть, что иногда полезно оперировать с бесконечно малым *вектором отклонения* η^i

$$\eta^i = V^i \delta v. \tag{1.127}$$

Однако поскольку δv представляет собой просто бесконечно малую константу, η^i и V^i по существу эквивалентны друг другу, и, работая с конечным вектором V^i, удается избежать психологических затруднений, часто возникающих при переходе к бесконечно малым.



Фиг. 4. Отклонение кривой $\Gamma(v+\delta v)$ от кривой $\Gamma(v)$.

Чтобы выяснить, каким образом $\Gamma(v+\delta v)$ отклоняется от $\Gamma(v)$, запишем, учитывая (1.126) и (1.95), следующие уравнения:

$$\frac{\delta^2 V^i}{\delta u^2} = \frac{\delta}{\delta u}\frac{\delta V^i}{\delta u} = \frac{\delta}{\delta u}\frac{\delta U^i}{\delta v} = \frac{\delta}{\delta v}\frac{\delta U^i}{\delta u} + R^i_{\cdot jkm} U^j U^k V^m. \tag{1.128}$$

До сих пор относительно кривых $\Gamma(v)$ не делалось никаких специальных предположений. Теперь потребуем, чтобы они были геодезическими [может случиться, что некоторые из $\Gamma(v)$ или даже все окажутся изотропными геодезическими], причем параметр u на каждой из них выберем каноническим, так что в силу (1.31)

$$\frac{\delta U^i}{\delta u} = 0. \tag{1.129}$$

Первый член в правой части (1.128) обращается в нуль, и мы имеем *уравнение геодезического отклонения*

$$\frac{\delta^2 V^i}{\delta u^2} + R^i_{\cdot jkm} U^j V^k U^m = 0, \tag{1.130}$$

или эквивалентно

$$\frac{\delta^2 \eta^i}{\delta u^2} + R^i_{\cdot jkm} U^j \eta^k U^m = 0. \tag{1.131}$$

Поскольку u — канонический параметр на каждой из кривых, соответствие между точками на $\Gamma(v)$ и $\Gamma(v+\delta v)$ не носит общего характера, так как канонический параметр на любой геодезической определен лишь

с точностью до *линейного* преобразования (см. § 2). Действительно, мы имеем

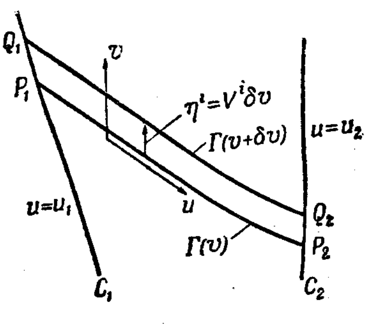
$$\frac{\partial}{\partial u}(U_i V^i) = U_i \frac{\delta V^i}{\delta u} = U_i \frac{\delta U^i}{\delta v} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}(U_i U^i). \qquad (1.132)$$

Это выражение обращается в нуль при двух обстоятельствах: а) если $\Gamma(v)$ — изотропная геодезическая, так как в этом случае $U_i U^i = 0$, и б) если кривые представляют собой обычные геодезические и $u = s$ на каждой из них, поскольку в этом случае $U_i U^i = \pm 1$. При любом из этих условий мы имеем вдоль $\Gamma(v)$

$$U_i V^i = \text{const}, \quad \text{или} \quad \eta_i \frac{\partial x^i}{\partial u} = \text{const}. \qquad (1.133)$$

В частности, если V^i (или η^i) ортогонален к $\Gamma(v)$ в какой-нибудь точке, ортогональность сохраняется всюду на $\Gamma(v)$.

Изотропные геодезические играют чрезвычайно важную роль в теории относительности, поскольку почти все астрономические сведения мы получаем с помощью оптических средств, т. е. с помощью фотонов, а фотон, как мы убедимся позднее, распространяется в пространстве — времени вдоль изотропной геодезической. В качестве подготовки к дальнейшим физическим построениям мы рассмотрим здесь геометрию изотропных геодезических несколько более детально.



Фиг. 5. Отображение с помощью изотропных геодезических и отклонение изотропных геодезических.

Пусть C_1 и C_2 (фиг. 5) — две временноподобные кривые (не обязательно геодезические, хотя и могли бы быть таковыми), и пусть они изображают соответственно движение наблюдателя и источника света. Пусть P_1 — некоторая точка на C_1. Полная совокупность изотропных геодезических, проходящих через P_1, образует *изотропный конус*. При этом можно говорить о двух областях; одну из них называют областью *прошедшего*, а другую — областью *будущего* (см. гл. III). Здесь мы рассмотрим только область прошедшего. Кривая C_2 пересекает эту область в некоторой точке P_2, и можно говорить, что изотропный конус отображает P_1 на P_2. Таким образом, кривая C_1 в целом отображается на кривую C_2 в том смысле, что каждой точке на C_1 ставится в соответствие точка на C_2. На фиг. 5 показаны две из изотропных геодезических (P_1P_2; Q_1Q_2), которые осуществляют такого рода отображение. Полная совокупность этих изотропных геодезических образует двумерное пространство, которое определяется сразу же, как только заданы C_1 и C_2.

Пусть u_1 и u_2 — два произвольных числа. Поскольку канонические параметры на изотропной геодезической определяются с точностью до линейного преобразования, на каждой из рассмотренных выше изотропных геодезических существует единственный канонический параметр u, для которого $u = u_1$ на C_1 и $u = u_2$ на C_2. Определив таким способом параметр и в двумерном пространстве, мы подбираем второй параметр v, постоянный вдоль каждой из изотропных геодезических (на C_1 можно было бы выбрать $v = s$). Таким образом, мы пришли теперь к ситуации, рассмотренной выше, и можем применить уравнение геодезического отклонения к системе изотропных геодезических, представленных P_1P_2 и Q_1Q_2. Бесконечно малые векторы P_1Q_1 и P_2Q_2 представляют собой векторы бесконечно малого

отклонения η^i в точках P_1 и P_2 соответственно. Как и в (1.133), мы имеем

$$U_i V^i = \text{Функция только } v. \tag{1.134}$$

Вернемся теперь к уравнению для отклонения (1.130) и исследуем его решения. Все последующие рассуждения применимы в общем случае к семейству геодезических, независимо от того, изотропны они или нет. Условие (1.134) может иметь, но может и не иметь места.

В (1.130) мы имеем четыре обычных дифференциальных уравнения, которым удовлетворяют четыре функции $V^i(u)$ вдоль кривой Г. Пусть $\lambda^i_{(a)}$— ортонормированный репер (ОР, см. §3, гл. I) произвольным образом выбранный в некоторой точке кривой Г и определенный вдоль Г параллельным переносом, так что

$$\frac{\delta \lambda^i_{(a)}}{\delta u} = 0. \tag{1.135}$$

Умножая (1.130) на $\lambda_{(a)i}$, получаем

$$D^2 V_{(a)} + R_{ijkm} \lambda^i_{(a)} U^j V^k U^m = 0, \tag{1.136}$$

где $D = d/du$, а $V_{(a)}$ — инвариантные компоненты в ОР. Таким образом, как и в (1.54), имеем

$$V_{(a)} = V_i \lambda^i_{(a)}, \qquad V^i = V^{(a)} \lambda^i_{(a)}. \tag{1.137}$$

Введем другие инвариантные компоненты:

$$U_{(a)} = U_i \lambda^i_{(a)}, \qquad R_{(abcd)} = R_{ijkm} \lambda^i_{(a)} \lambda^j_{(b)} \lambda^k_{(c)} \lambda^m_{(d)}. \tag{1.138}$$

Заметим, что в силу (1.129) и (1.135) вдоль Г

$$U_{(a)} = \text{const}. \tag{1.139}$$

Теперь с помощью инвариантных компонент уравнение (1.136) можно записать в виде

$$D^2 V^{(a)} + K^{(a)}_{(c)} V^{(c)} = 0, \tag{1.140}$$

где

$$K^{(a)}_{(c)} = R^{(a}{}_{\cdot bcd)} U^{(b)} U^{(d)} = \eta^{(ai)} R_{(ibcd)} U^{(b)} U^{(d)}. \tag{1.141}$$

Таким образом, мы перешли от тензорного уравнения для отклонения (1.130) к *инвариантному уравнению для отклонения* (1.140). Пользуясь матричными обозначениями, удобно записать (1.140) в виде

$$D^2 \mathbf{V} + \mathbf{K}\mathbf{V} = 0, \tag{1.142}$$

где $\mathbf{K}$ — инвариантная 4×4-матрица (1.141), а $\mathbf{V}$ — матричный столбец $V^{(a)}$

Последующие наши действия можно мотивировать тем, что наша цель будет состоять в нахождении решения уравнения (1.142) в интервале $u_1 \leqslant u \leqslant u_2$ при заданных значениях $\mathbf{V}$ на концах интервала. Однако решение существует не всегда, и представляется наиболее корректным изучать любое существующее решение, полагая

$$\mathbf{V}(u_1) = \mathbf{V}_1, \qquad \mathbf{V}(u_2) = \mathbf{V}_2. \tag{1.143}$$

Пусть $G(u, u')$ — функция Грина, определенная следующими соотношениями:

$$G(u, u') = \begin{cases} k(u-u_1)(u_2-u') & \text{при } u \leqslant u', \\ k(u'-u_1)(u_2-u) & \text{при } u \geqslant u', \end{cases} \tag{1.144}$$

где

$$k = (u_2 - u_1)^{-1}. \tag{1.145}$$

Вводя обозначения $D=\partial/\partial u$, $D'=\partial/\partial u'$, имеем

$$\begin{aligned} DG &= k(u_2-u'), & D'G &= -k(u-u_1) \quad \text{для} \quad u\leqslant u', \\ DG &= -k(u'-u_1), & D'G &= k(u_2-u) \quad \text{для} \quad u\geqslant u'. \end{aligned} \tag{1.146}$$

Умножим теперь (1.142) на $G(u, u')du$, где u' меняется произвольным образом в интервале $u_1\leqslant u'\leqslant u_2$, и проинтегрируем по этому интервалу. Интегрируя по частям и замечая, что на концах интервала $G(u, u')=0$, получаем

$$\int_{u_1}^{u_2} DGD\mathbf{V}\,du = \int_{u_1}^{u_2} G\mathbf{K}\mathbf{V}\,du. \tag{1.147}$$

Но вследствие (1.146) величина DG постоянна в обеих частях интервала, на которые последний делится точкой u; поэтому, если мы разобьем область интегрирования на две части, DG выйдет из-под знака интеграла. Итак, имеем

$$k(u_2-u')(\mathbf{V}'-\mathbf{V}_1)-k(u'-u_1)(\mathbf{V}_2-\mathbf{V}')=\int_{u_1}^{u_2} G\mathbf{K}\mathbf{V}\,du, \tag{1.148}$$

где $\mathbf{V}'=\mathbf{V}(u')$. Следовательно,

$$\mathbf{V}'=k(u_2-u')\mathbf{V}_1+k(u'-u_1)\mathbf{V}_2+\int_{u_1}^{u_2} G\mathbf{K}\mathbf{V}\,du. \tag{1.149}$$

Это и есть интегральное уравнение для $\mathbf{V}$, включающее граничные условия. Если эти граничные условия совместны с требованием единственности решения, то его можно получить с помощью итераций. Так

$$\begin{aligned} \mathbf{V}' &= k(u_2-u')\mathbf{V}_1+k(u'-u_1)\mathbf{V}_2+ \\ &+k\int_{u_1}^{u_2} G\mathbf{K}[(u_2-u)\mathbf{V}_1+(u-u_1)\mathbf{V}_2]\,du+O_2, \end{aligned} \tag{1.150}$$

где O_2 заменяет члены, включающие вторую и более высокие степени $\mathbf{K}$. Поскольку в приложениях общей теории относительности кривизна пространства (и, следовательно, $\mathbf{K}$) обычно бывает малой, то часто бывает достаточно оставить в (1.150) только члены, выписанные в явной форме.

Относительно совместных с решением значений $\mathbf{V}$ на концах заметим следующее. Если выполняются условия (1.133), как это имеет место в случае изотропных геодезических, то эти значения на концах должны удовлетворять соотношениям

$$U_{(a)}(V^{(a)})_{u=u_1}=U_{(a)}(V^{(a)})_{u=u_2}. \tag{1.151}$$

Напомним, что вдоль Γ величина $U_{(\tau)}=\text{const}$.

Чтобы исследовать первую производную решения, продифференцируем (1.149) по u'. Для выполнения этой операции разобьем область интегрирования в точке u' и продифференцируем по u' как по пределу интегрирования и как по параметру в G. Однако поскольку $G(u, u')$ в точке $u=u'$ непрерывна, то в результате дифференцирования по пределам мы получим нуль и, используя значения $D'G$ из (1.146), найдем

$$D'\mathbf{V}'=k(\mathbf{V}_2-\mathbf{V}_1)-k\int_{u_1}^{u'}(u-u_1)\mathbf{K}\mathbf{V}\,du+k\int_{u'}^{u_2}(u_2-u)\mathbf{K}\mathbf{V}\,du. \tag{1.152}$$

Так, в частности,

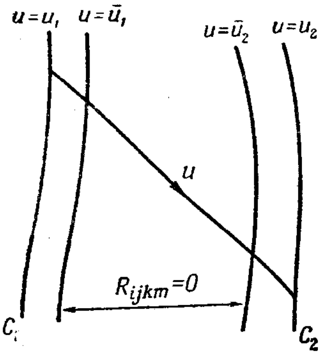
$$(DV)_{u=u_1} = k(V_2 - V_1) + k\int_{u_1}^{u_2}(u_2 - u)\,KV\,du. \qquad (1.153)$$

Если теперь подставить в качестве V, стоящего под знаком интеграла, выражение (1.150), то

$$(DV)_{u=u_1} = k(V_2 - V_1) +$$
$$+ k^2\int_{u_1}^{u_2}(u_2 - u)\,K\,[(u_2 - u)\,V_1 + (u - u_1)\,V_2]\,du + O_2. \qquad (1.154)$$

Особый физический интерес представляет тот случай, когда мы имеем дело с изотропными геодезическими, показанными на фиг. 5, а кривые C_1 и C_2 разделены большим интервалом, причем кривизна пространства — времени чрезвычайно мала всюду, за исключением области, непосредственно близкой к этим кривым. Ради математической простоты прибегнем к идеализации, предполагая, что пространство — время *плоско* при

$$u_1 \leqslant \bar{u}_1 \leqslant u \leqslant \bar{u}_2 \leqslant u_2,$$



Фиг. 6. «Полоса» кривизны

так что мы имеем «полосы», как показано на фиг. 6. Так как при $\bar{u}_1 \leqslant u \leqslant \bar{u}_2$ матрица $K = 0$, то из (1.153) следует, что

$$(DV)_{u=u_1} = k(V_2 - V_1) +$$
$$+ k\int_{u_1}^{\bar{u}_1}(u_2 - u)\,KV\,du + k\int_{\bar{u}_2}^{u_2}(u_2 - u)\,KV\,du. \qquad (1.155)$$

Чтобы на самом деле получить случай, когда кривые C_1 и C_2 «разделены большим интервалом», мы допустим, далее, что $(u_2 - u_1) \to \infty$ (т. е. $k \to 0$), оставляя в то же время $(\bar{u}_1 - u_1)$ и $(u_2 - \bar{u}_2)$ конечными. Тогда произведение $k(u_2 - u)$ стремится к единице в первом интеграле и к нулю во втором, так что

$$(DV)_{u=u_1} = \int_{u_1}^{\bar{u}_1} KV\,du. \qquad (1.156)$$

Подставляя в этот интеграл выражение для V из (1.150), получаем простую формулу

$$(DV)_{u=u_1} = \left(\int_{u_1}^{\bar{u}_1} K\,du\right) V_1 + O_2. \qquad (1.157)$$

С помощью этой формулы начальное значение производной отклонения выражается через начальное значение отклонения и интеграл от тензора Римана. С чисто геометрической точки зрения приведенные выше рассуждения могут показаться несколько скучными вследствие искусственного характера сделанных допущений. Однако когда мы придем в гл. XI к рассмотрению аберрации, полученное нами представление о «полосах» кривизны окажется весьма полезным.

Отклонение геодезических будет снова обсуждаться в гл. II (§ 3), где используются другие обозначения, связанные с применением операторов параллельного переноса.

§ 7. Гамильтонова теория лучей и волн

Гамильтонова теория лучей и волн носит весьма общий характер и ее изложение наиболее легко провести в довольно абстрактной форме[1]. Так, по-прежнему имея в виду четырехмерное пространство — время, мы все-таки не будем предполагать существование тензора g_{ij}.

Примем на момент еще более общую точку зрения и представим себе восьмимерное пространство V_8 с координатами (x^i, y_i). Ковариантные индексы при y используются из соображений, которые станут ясными в дальнейшем. Сущность гамильтонова подхода связана с представлением о некоторой *гамильтоновой поверхности* Σ в V_8 как о семимерном пространстве, определяемом уравнением

$$\omega(x, y) = 0. \qquad (1.158)$$

Важно отметить, что задается именно *поверхность* Σ, а не *функция* $\omega(x, y)$. В элементарной геометрии окружность единичного радиуса можно задать множеством уравнений, например

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 1, \qquad (x^2 + y^2)^{1/2} = 1, \\ (x^2 + y^2 - 1)^2 = 0, \qquad (x^2 + y^2)^2 = 1. \end{aligned} \qquad (1.159)$$

Точно так же и поверхность Σ можно описать посредством большого разнообразия функций ω в (1.158). Однако независимо от того, какую функцию ω мы при этом выберем, смещение $(\delta x^i, \delta y_i)$ лежит на Σ тогда, и только тогда, когда

$$\frac{\partial \omega}{\partial x^i}\delta x^i + \frac{\partial \omega}{\partial y_i}\delta y_i = 0; \qquad (1.160)$$

следовательно, в любой заданной точке поверхности Σ *отношения* восьми величин

$$\frac{\partial \omega}{\partial x^i}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y_i} \qquad (1.161)$$

имеют определенные значения. Действительно, мы можем записать

$$\frac{\partial \omega}{\partial x^i} = \theta \varphi_i, \qquad \frac{\partial \omega}{\partial y_i} = \theta \psi_i, \qquad (1.162)$$

где восемь величин φ_i, ψ_i заданы сразу на всей поверхности Σ, а θ — произвольная функция точки, лежащей на Σ.

Рассмотрим какую-нибудь кривую Γ на Σ и интеграл

$$I = \int y_i\, dx^i, \qquad (1.163)$$

взятый вдоль Γ. Мы ищем экстремумы I $(\delta I = 0)$ относительно вариаций кривой, лежащей на Σ. Чтобы учесть это побочное условие, мы заменим I интегралом

$$J = \int (y_i\, dx^i - \lambda \omega\, du), \qquad (1.164)$$

где u — параметр, меняющийся в пределах между конечными значениями, одинаковыми для всех рассматриваемых кривых, а $\lambda(u)$ — лагранжев

---

[1] О различных аспектах гамильтоновой теории см. работы [1173, 1176] и статью Синга по классической динамике, в Handbuch der Physik, Bd. 3, Tl 1, Berlin, 1962.

множитель. Выполняя варьирование и интегрируя по частям, получаем

$$\delta J = [y_i \delta x^i] + \int \Big(\delta y_i \, dx^i - \delta x^i \, dy_i - \\ - \omega \delta\lambda \, du - \lambda \frac{\partial\omega}{\partial x^i} \delta x^i \, du - \lambda \frac{\partial\omega}{\partial y_i} \delta y_i \, du\Big). \qquad (1.165)$$

Для экстремума потребуем, чтобы $\delta J = 0$ при *произвольных* вариациях δx^i, δy_i, $\delta\lambda$, при единственном условии $\delta x^i = 0$ на концах Г. Отсюда мы получим уравнения экстремалей в виде

$$\frac{dx^i}{du} = \lambda \frac{\partial\omega}{\partial y_i}, \qquad \frac{dy_i}{du} = -\lambda \frac{\partial\omega}{\partial x^i}, \qquad \omega = 0. \qquad (1.166)$$

Лагранжева функция $\lambda(u)$ остается неопределенной; это соответствует произвольности θ в (1.162). Для любой выбранной функции ω мы можем подобрать параметр u так, чтобы уравнения экстремали приняли *гамильтонову* или *каноническую* форму

$$\frac{dx^i}{du} = \frac{\partial\omega}{\partial y_i}, \qquad \frac{dy_i}{du} = -\frac{\partial\omega}{\partial x^i}. \qquad (1.167)$$

Экстремум определяется значениями (x^i, y_i) для $u = 0$ при условии $\omega(x, y) = 0$.

Интерпретируем теперь изложенное выше, используя в качестве исходного геометрического пространства вместо V_8 четырехмерное пространство — время с координатами x^i. Мы рассматриваем теперь y_i как некоторый вектор, связанный с точкой x^i. Гамильтонова поверхность Σ уже более не семимерное пространство, вложенное в V_8, а совокупность трехмерных пространств, причем каждое из них (назовем его Y_3) ассоциировано с какой-либо точкой пространства — времени. По существу, мы должны представить себе четырехмерное y-пространство, отнесенное к каждой точке x, и рассматривать Y_3 как трехмерное подпространство в y-пространстве. Уравнение этого подпространства имеет вид $\omega(x, y) = 0$, где x^i фиксированы. В y-пространстве координатами являются y_i. Для обеспечения инвариантности теории относительно произвольных преобразований x^i в пространстве — времени необходимо, чтобы подынтегральное выражение в (1.163) было инвариантом. Это означает, что y_i должен преобразовываться как *ковариантный* вектор.

С точки зрения V_8 экстремаль представляет собой кривую на Σ. С точки зрения пространства — времени, — это кривая $x^i = x^i(u)$, несущая связанное с нею векторное поле $y_i = y_i(u)$. Необходимо совершенно твердо усвоить, что мы имеем дело с одной и той же математической теорией, и лишь геометрическая интерпретация меняется при переходе от V_8 к четырехмерной геометрии пространства — времени. Начиная с данного момента, мы навсегда примем пространственновременную точку зрения, так что *точка* будет означать совокупность величин x^i.

Когда две точки $A(x')$ и $B(x)$ заданы, может случиться, что связывающей их экстремали не существует. (На самом деле подобный случай является скорее исключительным, хотя его и не следует упускать из виду.) Предполагая, что такая экстремаль существует, запишем

$$S(x', x) = S(A, B) = \int_A^B y_i \, dx^i, \qquad (1.168)$$

где интеграл берется вдоль этой экстремали. Это и есть гамильтонова

главная или *характеристическая*[1]) функция. Если теперь изменить A и B и сравнить вновь полученную экстремаль со старой, то из (1.165) следует (интеграл для экстремали обращается в нуль):

$$\delta S = y_i \delta x^i - y_{i'} \delta x^{i'}. \qquad (1.169)$$

Если восемь дифференциалов δx^i, $\delta x^{i'}$ могут принимать произвольные значения (что не всегда возможно, так как мы не можем варьировать точки, которые можно соединить единственной экстремалью), то мы имеем

$$\frac{\partial S}{\partial x^i} = y_i, \qquad \frac{\partial S}{\partial x^{i'}} = -y_{i'}. \qquad (1.170)$$

Подставляя затем $\partial S/\partial x_i$ вместо y_i в уравнение $\omega(x, y) = 0$, получаем *уравнение Гамильтона — Якоби*

$$\omega\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0. \qquad (1.171)$$

Разумеется, второму соотношению в (1.170) соответствует свое уравнение.

Рассмотрим теперь совокупность экстремалей в пространстве — времени, образующих область D, которая может быть двумерной, трехмерной или четырехмерной. Во всей области D существует векторное поле y_i, заданное с помощью экстремалей, и имеет смысл говорить о *циркуляции*

$$\varkappa = \oint\limits_C y_i \, dx^i \qquad (1.172)$$

по любому замкнутому контуру C, содержащемуся в D. Говорят, что совокупность экстремалей образует *связную систему*, если $\varkappa = 0$ для всех[2]) замкнутых контуров C в D. Экстремали, образующие *связную систему*, будем называть *лучами*. Пусть в случае связной системы A и B суть соответственно фиксированная точка и переменная точка в D. Тогда, поскольку $\varkappa = 0$, интеграл

$$I(A, B) = \int\limits_A^B y_i \, dx^i \qquad (1.173)$$

не зависит от пути интегрирования. Если b — некоторая константа, то уравнение

$$I(A, B) = b \qquad (1.174)$$

ограничивает область изменения точки B подпространством в D. Это подпространство называют *волной*. Меняя константу b, мы получаем совокупность волн. Легко видеть, что (поскольку $\varkappa = 0$) эта совокупность волн не зависит от выбора A в D. Фактически волны представляют собой интегралы полного дифференциального уравнения

$$y_i \, dx^i = 0. \qquad (1.175)$$

Следует особо отметить, что не каждый набор экстремалей определяет лучи и волны. Последние определены только для связных систем, для которых $\varkappa = 0$ и, следовательно, уравнение (1.175) интегрируемо в D.

Простейшей совокупностью лучей и волн может служить набор экстремалей, проведенных из фиксированной точки A и образующих область D. Легко показать, что эта совокупность является связной. Именно, если

[1]) Нельзя смешивать ее с мировой функцией Ω, введенной в гл. II. В римановом пространстве Ω и S тесно связаны друг с другом, а именно $S^2 = |2\Omega|$.

[2]) Для простоты рассмотрим лишь случай, когда D — односвязная область.

$S(A, B)$ — главная функция, то в силу (1.169) для любого замкнутого контура C в D мы имеем

$$\oint_C y_i\, dx^i = \oint_C dS = 0. \qquad (1.176)$$

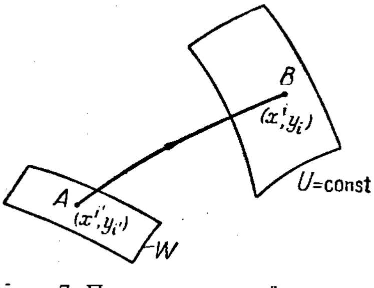
Соответствующие волны задаются уравнением

$$S(A, B) = \text{const}, \qquad (1.177)$$

где B — переменная точка. Точнее говоря, волнами будут пересечения поверхности (1.177) с областью D.

Интеграл (1.173) для связной системы является функцией только B, поскольку A фиксирована. Эту функцию называют *одноточечной главной функцией* системы. Обозначив ее через $U(x)$, уравнение для волн можно записать в виде

$$U(x) = \text{const}. \qquad (1.178)$$



Фиг. 7. Построение лучей и волн, берущих начало на гиперповерхности W.

Построим теперь связную систему более общего вида, исходя из некоторого подпространства W пространства — времени. Подпространство W может быть нулевого, одного, двух или трех измерений. Зададим в W некоторую функцию точки U' и выберем затем в W векторное поле y'_i, удовлетворяющее соотношениям

$$\omega(x', y') = 0, \qquad y_{i'}\, \delta x^{i'} = \delta U' \qquad (1.179)$$

для каждого смещения $\delta x^{i'}$ в W. Подпространство W и функцию U' можно выбрать так, что выполнение условий (1.179) окажется невозможным. Однако мы будем предполагать, что эти условия выполняются. Следующий шаг состоит в том, чтобы провести из точек W экстремали с начальными значениями $(x^{i'}, y_{i'})$ (фиг. 7). Затем для любой точки $B(x)$ в области, покрытой этими экстремалями, определим функцию

$$U(x) = \int_A^B y_i\, dx^i + U'(A), \qquad (1.180)$$

где A — точка, в которой экстремаль, проходящая через B, выходит за пределы W; интегрирование проводится вдоль экстремали. Варьируя B, получаем в силу (1.179)

$$\delta U(x) = y_i \delta x^i - y_{i'}\, \delta x^{i'} + \delta U' = y_i\, \delta x^i. \qquad (1.181)$$

Это — полный дифференциал в области, покрытой экстремалями, так что циркуляция $\varkappa$ обращается в нуль. Следовательно, экстремали образуют связную систему лучей, которым соответствуют волны, определяемые уравнениями $U(x) = \text{const}$. Функция $U(x)$ фактически оказывается одноточечной главной функцией, так же, как и в (1.178).

Итак, мы рассмотрели в основном общую гамильтонову теорию. Вернемся теперь к риманову пространству — времени с метрическим тензором g_{ij}. Как мы видели, гамильтонова теория основывается на выборе поверхности Σ, определяемой уравнением $\omega(x, y) = 0$. Мы можем свести вместе две различные идеи; тогда получатся два важных набора кривых в про-

странстве — времени (гамильтоновы экстремали и геодезические), видимая связь между которыми отсутствует[1]).

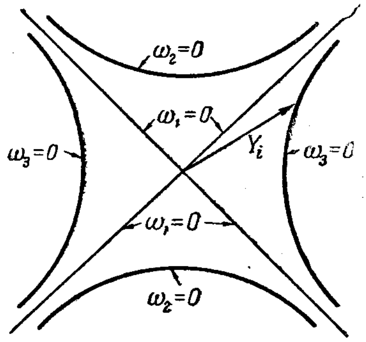
С другой стороны, можно развить теорию лучей и волн в римановом пространстве — времени, исходя лишь из метрического тензора g_{ij}. Это можно осуществить, выбирая уравнение для гамильтоновой поверхности Σ в виде

$$\omega(x, y) = \omega_1(x, y)\,\omega_2(x, y)\,\omega_3(x, y) = 0, \tag{1.182}$$

где

$$\omega_1(x, y) = g^{ij}y_iy_j, \quad \omega_2(x, y) = g^{ij}y_iy_j + 1, \quad \omega_3(x, y) = g^{ij}y_iy_j - 1. \tag{1.183}$$

В этом случае трехмерное пространство Y_3 для фиксированных значений x^i (так что g^{ij} постоянны) представляет собой алгебраическую относительно y^i поверхность шестого порядка. Она распадается на области, как показано на фиг. 8. Эти области следующие: конус $\omega_1 = 0$ (двухполостный), двухполостный гиперболоид $\omega_2 = 0$ и однополостный гиперболоид $\omega_3 = 0$. Вектор y^i должен иметь экстремум в одной из этих областей.



Фиг. 8. Гамильтонова поверхность Y_3 в y-пространстве для лучей и волн в римановом пространстве — времени.

В силу (1.166) для экстремалей получаются следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dx^i}{du} &= 2\lambda g^{ij}y_j, \\ \frac{dy_i}{du} &= -\lambda g^{jk}{}_{,i}y_jy_k, \end{aligned} \tag{1.184}$$

где λ — некоторый скаляр. Произведя замену параметра u, эти уравнения можно привести к виду

$$\begin{aligned} \frac{dx^i}{du} &= g^{ij}y_j, \\ \frac{dy_i}{du} &= -\frac{1}{2}g^{jk}{}_{,i}y_jy_k. \end{aligned} \tag{1.185}$$

Исключая y_i, после простых вычислений получаем

$$\frac{\delta}{\delta u}\frac{dx^i}{du} = 0. \tag{1.186}$$

Далее первое из уравнений (1.185) дает

$$g_{ij}\frac{dx^i}{du}\frac{dx^j}{du} = g^{ij}y_iy_j = \begin{cases} 0 & \text{для } \omega_1 = 0, \\ -1 & \text{для } \omega_2 = 0, \\ 1 & \text{для } \omega_3 = 0. \end{cases} \tag{1.187}$$

Таким образом, параметр u в (1.185) и (1.186) таков, что в двух последних случаях $du = ds$.

Из (1.186) сразу видно, что *гамильтоновы экстремали являются геодезическими*. Экстремали, соответствующие $\omega_1 = 0$, представляют собой изотропные геодезические, экстремали, соответствующие $\omega_2 = 0$, — временноподобные геодезические, а соответствующие $\omega_3 = 0$, — пространственноподобные геодезические.

---

[1]) В случае геометрической оптики в сплошной среде (см. гл. XI, § 2) эта связь установлена. Здесь гамильтоновы экстремали играют роль оптических лучей, а геодезические играют второстепенную роль.

Так же, как для гамильтоновой главной функции, из (1.185) и (1.187) получаем

$$S(A,\ B)=\int_A^B y_i\,dx^i=\int_A^B g^{ij}y_iy_j\,du=\varepsilon\int_A^B ds \tag{1.188}$$

или

$$S(A,\ B)=0$$

в зависимости от того, будет ли экстремаль временноподобной геодезической ($\varepsilon=-1$), пространственноподобной ($\varepsilon=1$) или изотропной.

В случае связной системы *лучи ортогональны волнам*[1]). Это легко показать. Вследствие (1.175)

$$y_i\delta x^i=0 \tag{1.189}$$

для каждого смещения δx^i по волне. В силу (1.185)

$$y_i=g_{ij}\frac{dx^j}{du}. \tag{1.190}$$

Следовательно,

$$g_{ij}\delta x^i\frac{dx^j}{du}=0, \tag{1.191}$$

что и доказывает сделанное утверждение.

Системы изотропных лучей представляют особый интерес. Для изотропного луча вследствие (1.190) мы имеем

$$y_i\frac{dx^i}{du}=g_{ij}\frac{dx^i}{du}\frac{dx^j}{du}=0, \tag{1.192}$$

и, таким образом, в силу (1.189) изотропные лучи не только ортогональны волнам, но и *лежат на них.*

Трехмерное подпространство $f(x)=\text{const}$ пространства — времени называется *изотропной гиперповерхностью*, если f удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$g^{ij}f_{|i}f_{|j}=0, \tag{1.193}$$

которое утверждает, по существу, что эта гиперповерхность содержит свою собственную нормаль[2]).

Пусть f удовлетворяет уравнению (1.193). Тогда уравнения

$$\frac{dx^i}{du}=g^{ij}f_{|j} \tag{1.194}$$

определяют совокупность изотропных кривых. Вдоль каждой из таких кривых мы имеем

$$\frac{df}{du}=f_{|i}\frac{dx^i}{du}=f_{|i}g^{ij}f_{|j}=0, \tag{1.195}$$

и, следовательно, те кривые (1.194), которые начинаются на поверхности $f(x)=0$, остаются на этой поверхности. Далее

$$\frac{\delta}{\delta u}\frac{dx^i}{du}=g^{ij}f_{|jk}\frac{dx^k}{du}=g^{ij}f_{|jk}g^{km}f_{|m}. \tag{1.196}$$

---

[1]) В общей гамильтоновой теории соотношение (1.175) гласит, что *ковариантный* вектор y_i ортогонален волне, однако вопрос об ортогональности луча (dx^i/du — *контравариантный* вектор) и волны нельзя поставить, пока не введена метрика g_{ij}.

[2]) Трехмерное подпространство $x^4=\text{const}$ изотропно тогда и только тогда, когда

$$g^{44}=0. \tag{1.193a}$$

Дифференцируя теперь (1.193), получаем

$$g^{ij}f_{|i}f_{|jk}=0, \qquad (1.197)$$

или, поскольку $f_{|jk}=f_{|kj}$,

$$g^{ij}f_{|i}f_{|kj}=0. \qquad (1.198)$$

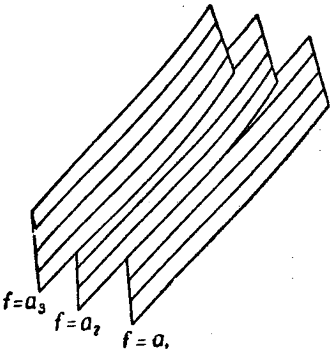
Таким образом, (1.196) дает

$$\frac{\delta}{\delta u}\frac{dx^i}{du}=0, \qquad (1.199)$$

и, следовательно, кривые (1.194) являются изотропными геодезическими. Итак, мы можем сформулировать следующую теорему геометрии изотропных поверхностей: *все изотропные геодезические, касательные к изотропной поверхности, лежат на этой изотропной поверхности, и если их уравнения записаны в виде* (1.194), *то и является каноническим параметром*[1]). Воспользуемся этим геометрическим результатом применительно к гамильтоновой теории, рассматривая изотропные геодезические (1.194) на $f(x)=0$ как систему. Сравнивая (1.185) с (1.194), мы видим, что $y_i=f_{|i}$, и, таким образом,

$$\oint_C y_i\,dx^i=\oint_C df=0 \qquad (1.200)$$

для каждого замкнутого контура на гиперповерхности $f(x)=0$. Следовательно, мы имеем связную систему, в которой лучи являются изотропными геодезическими. Так как



Фиг. 9. Изотропные волны и связанные с ними изотропные лучи.

$$\int_A^B y_i\,dx^i=\int_A^B df=0 \qquad (1.201$$

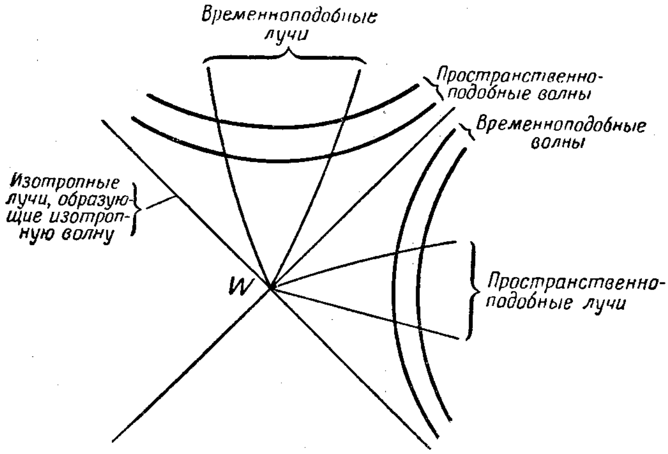
для каждой незамкнутой кривой на гиперповерхности $f(x)=0$, то отсюда следует, что упомянутая выше гиперповерхность есть волна (в действительности единственная волна), связанная с данной системой изотропных лучей. Мы назовем ее *изотропной волной.* Ясно, что уравнение $f(x)=\mathrm{const}$, где $f(x)$ удовлетворяет уравнению (1.193), определяет совокупность изотропных волн, как это проиллюстрировано на фиг. 9 (изображение чисто символическое, так как на каждой изотропной волне в действительности должно быть ∞^2 изотропных лучей).

Рассмотрим теперь коротко, имея в виду соотношение (1.180), конструкцию связной системы, исходя из подпространства W, на котором задана функция U'.

Прежде всего рассмотрим случай, когда W представляет собой единственную точку пространства — времени. В этом случае U' — просто константа, и второе условие в (1.179) исчезает. Мы должны удовлетворить лишь соотношению $\omega(x', y')=0$, чего можно достичь, выбирая вектор y_i таким образом, чтобы его экстремум лежал на одной из поверхностей $\omega_1=0$, $\omega_2=0$,

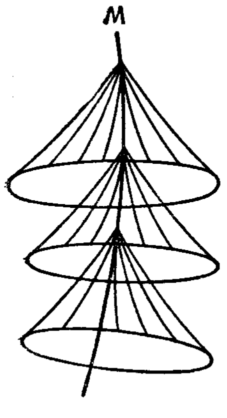
[1]) В каждой точке на изотропной поверхности бесконечно малый изотропный конус имеет одно общее с изотропной поверхностью направление и соприкасается с этой поверхностью вдоль данного направления. Изотропные геодезические (1.194) образованы из бесконечно малых касательных векторов.

$\omega_3 = 0$ (см. фиг. 8). Соответствующие экстремали будут изотропными, временноподобными или пространственноподобными геодезическими. Для изотропных геодезических вдоль лучей мы имеем $y_i dx^i = 0$, и, таким образом,



Фиг. 10. Лучи и волны, берущие начало в единственной точке W пространства — времени.

из (1.180) следует, что $U(x) = U'$ — постоянная. Поскольку волны задаются уравнением $U(x) = \text{const}$, мы видим, что полное множество изотропных геодезических, исходящих из фиксированной точки W, образует единичную волну, т. е. изотропный конус (частный случай изотропной поверхности, рассмотренной выше). В случае временноподобных или пространственноподобных лучей мы получаем волны, полагая постоянной меру вдоль лучей. При этом получаем гиперсферы (напоминающие скорее гиперболоиды в обычном пространстве). Расположение лучей и волн для случая, когда W представляет собой единственную точку, изображено на фиг. 10.



Фиг. 11. Лучи и волны, берущие начало на временноподобной кривой W в пространстве — времени.

Заканчивая изучение лучей и волн в пространстве — времени, рассмотрим случай, когда W — временноподобная кривая, определяемая уравнением $x^{i'} = x^{i'}(v)$. Мы должны задаться некоторой функцией $U'(v)$ и выбрать затем $y_{i'}$ так, чтобы

$$\omega(x', y') = 0, \quad y_{i'} \frac{dx^{i'}}{dv} = \frac{dU'}{dv}. \tag{1.202}$$

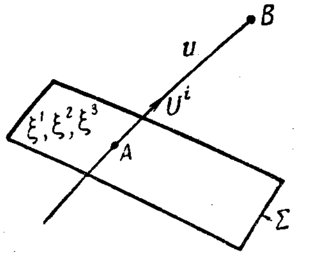
С точки зрения y-пространства (см. фиг. 8) второе уравнение определяет трехмерную гиперплоскость, которая рассекает одну или более полос ω-поверхностей, образуя требуемые y-векторы. Рассмотрим для определенности лишь пересечения этой гиперплоскости с поверхностью $\omega_1 = 0$, что дает изотропные лучи. В общем случае можно получить такие пересечения и, следовательно, систему изотропных лучей и волн, изображенных на фиг. 11, где изотропные волны изображены так, как если бы они были двумерными (в действительности, они трехмерные). Здесь существует один особый случай, именно, когда мы полагаем $U' = \text{const}$. В этом случае второе из условий (1.202) не может быть удовлетворено ни одним из y-век-

торов, имеющих экстремум на поверхности $\omega_1 = 0$ (это обстоятельство, по существу, обусловлено тем, что никакой изотропный вектор не может быть ортогональным к временноподобному вектору).

§ 8. Гауссовы координаты

Пусть x^i — допустимые координаты (§ 1) пространства — времени, а Σ — гладкая гиперповерхность, определяемая уравнениями $x^i = f^i(\xi)$, где ξ означает совокупность трех параметров ξ^ϱ (греческие индексы пробегают значения 1, 2, 3). Пусть $U^i(\xi)$ — векторное поле, определенное непрерывным образом на Σ. Проведем в обоих направлениях через точки, лежащие на Σ, геодезические, касательные к U^i. Допустим, что u — единственный канонический параметр, выбранный таким образом, что на Σ для определенной с помощью него геодезической $u = 0$, $dx^i/du = U^i$.

Пусть B — произвольная точка в окрестности Σ, а A — точка, в которой геодезическая, проходящая через B, пересекает Σ (фиг. 12). Тогда мы поставим в соответствие точке B четыре *гауссовых координаты* (u, ξ), где u берется в точке B, а ξ^ϱ — в точке A. При необходимости мы будем различать *нормальные* гауссовы координаты (вектор U^i ортогонален Σ) и *косоугольные* гауссовы координаты (вектор U^i не ортогонален Σ). Гауссовы координаты можно также обозначить через $\bar{x}^i$, полагая



Фиг. 12. Гауссовы координаты $\bar{x}^i$, $(\bar{x}^\varrho = \xi^\varrho, \bar{x}^4 = u)$.

$$\bar{x}^\varrho = \xi^\varrho, \quad \bar{x}^4 = u. \tag{1.203}$$

Гауссовы координаты имеют два важных достоинства. Во-первых (как мы покажем), они являются допустимыми координатами и поэтому благодаря простоте их построения представляют собой конкретный пример к определению допустимости, общая формулировка которого могла бы показаться чисто формальной. Во-вторых, использование гауссовых координат иногда упрощает вычисления.

Для доказательства допустимости гауссовых координат заметим, что на любой из геодезических для координат, допустимых по предположению, мы имеем

$$\frac{\delta}{\delta u}\frac{dx^i}{du} = \frac{d^2x^i}{du^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{du}\frac{dx^k}{du} = 0, \tag{1.204}$$

и, следовательно,

$$x^i = (f^i)_A + u\,(U^i)_A - \frac{1}{2}u^2\,(\Gamma^i_{jk}U^jU^k)_A + \ldots, \tag{1.205}$$

где индекс A означает, что значения стоящих в скобках величин взяты в этой точке. Так как x^i допустимые, то Г-символы на Σ непрерывны и, следовательно, члены разложения (1.205), выписанные в явном виде, не зависят от того, с какой стороны мы приближаемся к Σ в пределе $u \to 0$. Это может оказаться неверным для членов ряда, содержащих более высокие степени u, так как допустимость x^i не предполагает непрерывности производных от Г-символов, поскольку они содержат вторые производные g_{ij}. Но члены (1.205), выписанные в явной форме, — это все, что нам нужно. С их помощью мы

вычисляем следующие величины для $u=0$:

$$\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\varrho}=\frac{\partial f^i}{\partial \bar{x}^\varrho}, \qquad \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^4}=U^i,$$
$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^\varrho \partial \bar{x}^\sigma}=\frac{\partial^2 f^i}{\partial \bar{x}^\varrho \partial \bar{x}^\sigma}, \qquad \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^\varrho \partial \bar{x}^4}=\frac{\partial U^i}{\partial \bar{x}^\varrho}, \tag{1.206}$$
$$\frac{\partial^2 x^i}{(\partial \bar{x}^4)^2}=-\Gamma^i_{jk}U^jU^k.$$

Все эти величины на Σ непрерывны. Другими словами, преобразование $x \to \bar{x}$ относятся к классу C^2. Следовательно, из формул преобразования

$$\bar{g}_{ij}=g_{ab}\frac{\partial x_a}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j},$$
$$\bar{\Gamma}^i_{jk}=\Gamma^a_{bc}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a}\frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^k}-\frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^a \partial x^b}\frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^k} \tag{1.207}$$

вытекает, что $\bar{g}_{ij}$ и $\bar{\Gamma}^i_{jk}$ на Σ непрерывны. Поэтому в силу (1.8) $\bar{g}_{ij}$ — функция класса C^1. Это означает, что $\bar{x}^i$ — допустимые координаты. Таким образом, доказано, что гауссовы координаты являются допустимыми.

Переходя теперь ко второму свойству гауссовых координат, запишем дифференциальные уравнения геодезической (1.204) с помощью гауссовых координат $\bar{x}^i$. Так как $\bar{x}^\varrho=\text{const}$, $\bar{x}^4=u$, то уравнения сводятся к

$$\bar{\Gamma}^i_{44}=0, \tag{1.208}$$

или в эквивалентной записи

$$2\frac{\partial \bar{g}_{i4}}{\partial \bar{x}^4}=\frac{\partial \bar{g}_{44}}{\partial \bar{x}^i}. \tag{1.209}$$

Возникают две возможности. Допустим, во-первых, что векторы U^i изотропны. Тогда геодезические, которые мы использовали при построении гауссовых координат, изотропны, и $\bar{g}_{44}=0$, так что вследствие (1.209)

$$\frac{\partial \bar{g}_{\varrho 4}}{\partial \bar{x}^4}=0, \qquad \bar{g}_{44}=0. \tag{1.210}$$

Предположим, во-вторых, что векторы U^i временно- или пространственно-подобны. Нормируем их, положив

$$g_{ij}U^iU^j=\varepsilon=\pm 1. \tag{1.211}$$

Тогда на геодезических $du=ds$ и $\bar{g}_{44}=\varepsilon$, так что в силу (1.209)

$$\frac{\partial \bar{g}_{\varrho 4}}{\partial \bar{x}^4}=0, \qquad \bar{g}_{44}=\varepsilon. \tag{1.212}$$

В частном случае *нормальных* гауссовых координат имеем[1])

$$\bar{g}_{\varrho 4}=0, \qquad \bar{g}_{44}=\varepsilon. \tag{1.213}$$

---

[1]) Координаты, отвечающие условиям (1.213), называют *полугеодезическими*, и в случае (1.210) — *изотропно-полугеодезическими*. — *Прим. ред.*

Гауссовы координаты можно построить не только на трехмерном пространстве Σ, как это сделано выше, но и в точке, на кривой или на двумерном пространстве. Однако деталями этого вопроса мы заниматься не будем [1]).

При использовании нормальных гауссовых координат формулы для тензора Римана, тензора Риччи и тензора Эйнштейна несколько упрощаются. Опуская черточки над гауссовыми координатами и не заботясь об их геометрической конструкции, мы можем кратко сформулировать следующие результаты.

Пусть имеется система координат x^i, для которой метрическая форма имеет вид

$$\Phi = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu + \varepsilon\, (dx^4)^2, \qquad \varepsilon = \pm 1. \tag{1.214}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &g_{\varrho 4} = 0, \qquad g_{44} = \varepsilon,\\ &g^{\varrho 4} = 0, \qquad g^{44} = \varepsilon,\\ &g^{\varrho\alpha} g_{\varrho\beta} = \delta^\alpha_\beta. \end{aligned} \tag{1.215}$$

В таком случае с помощью формул § 5 мы получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} &R_{\varrho\mu\nu\sigma} = \overline{R}_{\varrho\mu\nu\sigma} + \frac{1}{4}\,\varepsilon\,(g_{\varrho\sigma,\,4}\, g_{\mu\nu,\,4} - g_{\varrho\nu,\,4}\, g_{\sigma\mu,\,4}),\\ &R_{\varrho\mu 4\sigma} = \frac{1}{2}\,(D_\mu g_{\varrho\sigma,\,4} - D_\varrho g_{\mu\sigma,\,4}),\\ &R_{\varrho 44\sigma} = R_{4\varrho\sigma 4} = \frac{1}{2}\, g_{\varrho\sigma,\,44} - \frac{1}{4}\, g^{\alpha\beta} g_{\varrho\alpha,\,4}\, g_{\sigma\beta,\,4}; \end{aligned} \tag{1.216}$$

$$\begin{aligned} &R_{\mu\nu} = \overline{R}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\,\varepsilon g_{\mu\nu,\,44} + \frac{1}{4}\,\varepsilon A g_{\mu\nu,\,4} - \frac{1}{2}\,\varepsilon g^{\alpha\beta} g_{\mu\alpha,\,4}\, g_{\nu\beta,\,4},\\ &R_{\mu 4} = \frac{1}{2}\, g^{\varrho\sigma}\,(D_\mu g_{\varrho\sigma,\,4} - D_\varrho g_{\mu\sigma,\,4}) = \frac{1}{2}\, A_{,\mu} - \frac{1}{2}\, D^\sigma g_{\mu\sigma,\,4},\\ &R_{44} = \frac{1}{2}\, C - \frac{1}{4}\, B; \end{aligned} \tag{1.217}$$

$$R = \overline{R} + \varepsilon\left(\frac{1}{4}\, A^2 - \frac{3}{4}\, B + C\right); \tag{1.218}$$

$$\begin{aligned} &G_{\mu\nu} = \overline{G}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\,\varepsilon g_{\mu\nu,\,44} + \frac{1}{4}\,\varepsilon A g_{\mu\nu,\,4} -\\ &\qquad - \frac{1}{2}\,\varepsilon g^{\alpha\beta} g_{\mu\alpha,\,4}\, g_{\nu\beta,\,4} - \varepsilon g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{8}\, A^2 - \frac{3}{8}\, B + \frac{1}{2}\, C\right),\\ &G_{\mu 4} = R_{\mu 4} = \frac{1}{2}\, A_{,\mu} - \frac{1}{2}\, D^\sigma g_{\mu\sigma,\,4},\\ &G_{44} = -\frac{1}{2}\,\varepsilon\overline{R} - \frac{1}{8}\, A^2 + \frac{1}{8}\, B. \end{aligned} \tag{1.219}$$

Используемые здесь символы имеют следующий смысл:

---

[1]) См., например, А. З. Петров, Пространства Эйнштейна, М., 1961, § 7.— *Прим. ред.*

$\bar{R}_{\varrho\mu\nu\sigma}$ = Субтензор Римана[1]) (т. е. тензор Римана в подпространстве $x^4 = \mathrm{const}$),

$\bar{R}_{\mu\nu}$ = Субтензор Риччи (тензор Риччи в подпространстве $x^4 = \mathrm{const}$),

$\bar{R}$ = Субинвариантная кривизна (кривизна в подпространстве $x^4 = \mathrm{const}$), (1.220)

$\bar{G}_{\mu\nu}$ = Субтензор Эйнштейна (тензор Эйнштейна в подпространстве $x^4 = \mathrm{const}$).

D_μ = Оператор ковариантного дифференцирования при $x^4 = \mathrm{const}$,

$$A = g^{\mu\nu} g_{\mu\nu,\,4}, \quad B = g^{\mu\nu} g^{\varrho\sigma} g_{\mu\varrho,\,4} g_{\nu\sigma,\,4}, \quad C = g^{\mu\nu} g_{\mu\nu,\,44}. \tag{1.221}$$

§ 9. Условия соединения на трехмерной гиперповерхности разрыва

Вспомним, что в § 1 предполагалось существование в пространстве — времени допустимых координат, для которых g_{ij} и $g_{ij,\,k}$ непрерывны на любой трехмерной гиперповерхности Σ. Если Σ есть в некотором смысле трехмерная гиперповерхность разрыва, то разрывы могут иметь место лишь для второй и более высоких производных g_{ij}, коль скоро координаты допустимые. Нам предстоит рассмотреть такого рода ситуацию.

Пусть дана гиперповерхность Σ (она может быть изотропной); перейдем от первоначальных допустимых координат к новым допустимым координатам[2]), таким, чтобы уравнение, определяющее Σ, имело вид $x^4 = 0$. Тогда на Σ непрерывными будут величины

$$g_{ij};\ g^{ij};\ g_{ij,\,k};\ [ij,\,k];\ \Gamma^i_{jk};\ g_{ij,\,k}; \tag{1.222}$$

так как они содержат не более одного дифференцирования по x^4. (Здесь, как обычно, латинские индексы пробегают значения 1, 2, 3, 4, а греческие — 1, 2, 3.)

Непрерывны также $g_{ij,k\alpha}$, но относительно $g_{ij,\,44}$ может оказаться, что они терпят разрыв.

Тот факт, что какая-либо величина непрерывна при прохождении через Σ, будем отмечать с помощью символа $[C]$. Тогда в силу (1.85) и (1.222) имеем

$$\begin{gathered} R_{\alpha\beta\gamma\delta} = [C], \quad R_{\alpha\beta4\delta} = [C], \\ R_{\alpha44\beta} = R_{4\alpha\beta4} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\,44} + [C]. \end{gathered} \tag{1.223}$$

---

[1]) Каждое трехмерное пространство $x^4 = \mathrm{const}$ является римановым с фундаментальным тензором $\bar{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$ и ему сопряженным $\bar{g}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}$; см. (1.215). Величины с черточкой наверху вычисляются в каждом трехмерном пространстве обычным образом. Их называют *субтензорами*, так как они подчиняются правилам для тензора не при преобразованиях x^i общего вида, а лишь при преобразованиях $\overset{\delta}{x}$, когда x^4 остается неизменным (Синг и Шилд [1190] стр. 67).

[Это замечание автора, неверное вообще, справедливо в том, и только в том случае, когда трехмерное пространство (вообще — подмногообразие любого числа измерений) *неизотропно*; в частности, эти формулы имеют место в случае (1.213). — *Прим. ред.*]

[2]) Возможно, хотя и не обязательно, — к гауссовым (косоугольным, если Σ изотропна).

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
R_{\alpha\beta} &= g^{ij}R_{i\alpha\beta j} = g^{44}R_{4\alpha\beta 4} + [C] = \frac{1}{2}g^{44}g_{\alpha\beta,\,44} + [C],\\
R_{\alpha 4} &= g^{ij}R_{i\alpha 4j} = g^{4\beta}R_{4\alpha 4\beta} + [C] = -\frac{1}{2}g^{4\beta}g_{\alpha\beta,\,44} + [C],\\
R_{44} &= g^{ij}R_{i44j} = g^{\alpha\beta}R_{\alpha 44\beta} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta,\,44} + [C]
\end{aligned}
\tag{1.224}
$$

и

$$
R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} + 2g^{\alpha 4}R_{\alpha 4} + g^{44}R_{44} = (g^{\alpha\beta}g^{44} - g^{\alpha 4}g^{\beta 4})\,g_{\alpha\beta,\,44} + [C]. \tag{1.225}
$$

В таком случае

$$
\begin{aligned}
R^4_\alpha &= g^{4i}R_{\alpha i} = g^{4\beta}R_{\alpha\beta} + g^{44}R_{\alpha 4} = [C],\\
R^4_4 &= g^{4i}R_{4i} = g^{4\alpha}R_{4\alpha} + g^{44}R_{44} = \frac{1}{2}(g^{44}g^{\alpha\beta} - g^{4\alpha}g^{4\beta})\,g_{\alpha\beta,\,44} + [C]
\end{aligned}
\tag{1.226}
$$

и, следовательно,

$$
G^4_\alpha = R^4_\alpha = [C], \quad G^4_4 = R^4_4 - \frac{1}{2}R = [C], \tag{1.227}
$$

или

$$
G^4_i = [C]. \tag{1.228}
$$

Это есть система четырех *условий соединения*: *смешанные компоненты* G^4_i *тензора Эйнштейна на гиперповерхности* $x^4 = 0$ *непрерывны, если координаты являются допустимыми.* Они эквивалентны, очевидно, тому факту, проверяемому непосредственным вычислением, что компоненты G^4_i не содержат вторых производных по x^4.

Предположим, мы хотим теперь перейти к другим системам допустимых координат. Рассмотренные выше допустимые координаты, для которых уравнение Σ имеет вид $\bar{x}^4 = 0$, удобно обозначить через $\bar{x}^i$. Пусть для любых других допустимых координат x^i уравнение Σ записывается в виде $f(x) = 0$. Тогда $f_{,i}$ есть ковариантная нормаль к Σ, а $G^j_i f_{,j}$ — вектор, который в $\bar{x}$-координатах имеет значение $\bar{G}^4_i$ и который, как мы видели, непрерывен на Σ. Поскольку преобразование $x \to \bar{x}$ относится к классу C^2, условия соединения теперь гласят: *для любых допустимых координат*

$$
G^j_i f_{,j} = [C], \tag{1.229}
$$

т. е. непрерывны на Σ.

Мы освободились от тех специальных допустимых координат, для которых уравнение, определяющее Σ, имеет вид $\bar{x}^4 = 0$. Сделаем теперь еще один шаг в направлении освобождения от специализации координатной системы. Пусть $\bar{x}^i$ — произвольные допустимые координаты, а x^i — новые координаты (уже не являющиеся более допустимыми), полученные из $\bar{x}^i$ с помощью преобразования, относящегося всего лишь к классу C^1. Компоненты g_{ij} остаются на Σ все еще непрерывными (так как уравнение их преобразования включает только первые производные $\partial x^i/\partial \bar{x}^j$), но первые производные метрического тензора $g_{ij,k}$ уже могут теперь иметь на Σ разрывы. Однако $G^j_i f_{,j}$ — вектор, и уравнения преобразования его компонент содержат лишь первые производные $\partial x^i/\partial \bar{x}^j$. Таким образом, мы приходим к следующему результату (Израэль [494])[1]). *Для координат, полученных из до-*

[1]) Большинство исследований условий соединения, выполненных до введения допустимых координат Лишнеровицем [671], нельзя считать математически убедительными.

пустимых координат с помощью преобразований класса C^1, *справедливы условия соединения* (1.229).

Наконец, оперируя с инвариантом, мы осуществим полное разделение координатных систем по разные стороны от Σ. Пусть $\bar{x}^i$ — произвольные координаты, а $\bar{\varphi}^i$ — контравариантное векторное поле, претерпевающее параллельный перенос вдоль какого-нибудь наперед заданного набора кривых, пересекающих Σ. Перейдем к новым координатам x^i с помощью кусочно-гладкого по обе стороны от Σ преобразования, не требуя, однако, непрерывности преобразования на Σ (на Σ x-координаты могут быть разрывными функциями $\bar{x}$-координат). Теперь

$$I = G^j_i f_{,j} \varphi^i \tag{1.230}$$

есть инвариант, и он наверняка непрерывен на Σ, если мы используем допустимые координаты. Следовательно, он непрерывен и в том случае, когда используются координаты x^i. Условие соединения теперь гласит: *для только что описанных независимых координатных систем I непрерывен на Σ, если φ^i подвергается параллельному переносу через Σ*. В силу произвольности выбора φ^i здесь фактически получаются четыре условия аналогично (1.228) или (1.229). Уравнение для Σ имеет вид $f(x) = 0$, однако функция f может теперь иметь совершенно различный вид по разные стороны от Σ.

При желании мы могли бы использовать ковариантный вектор φ_i, так чтобы непрерывный инвариант имел вид

$$I = G^{ij} f_{,i} \varphi_j. \tag{1.231}$$

§ 10. Теоремы Стокса и Грина

В трехмерном евклидовом пространстве теорема Стокса означает, что интеграл, взятый вдоль замкнутой кривой C, можно выразить через интеграл по поверхности S, ограниченной кривой C. Эту теорему обычно записывают следующим образом:

$$\oint_C (u\,dx + v\,dy + w\,dz) = \iint \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) l + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) m + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) n \right] dS, \tag{1.232}$$

где (u, v, w) — векторное поле, а (l, m, n) — направляющие косинусы нормали к S, ориентированной таким образом, что обход контура C при интегрировании вдоль него совершается по направлению часовой стрелки, если смотреть из конца нормали на S. Теорема Грина (называемая также теоремой Гаусса Остроградского) гласит, что интеграл, взятый по замкнутой поверхности, можно выразить через интеграл по объему, ограниченному S. Этот факт обычно записывается в виде

$$\iint (lu + mv + nw)\, dS = \iiint \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dV, \tag{1.233}$$

где (l, m, n) — направляющие косинусы внешней (по отношению к S) нормали.

Приведенные выше формулы можно обобщить. Следует подчеркнуть, что обычно теорема Стокса по существу не содержит метрического тензора g_{ij} и что в случае, когда метрика введена, теорема Грина оказывается частным случаем теоремы Стокса. В целях ясности изложения приведем прежде всего обобщенные формулы в N-мерном пространстве V_N без мет-

рики, затем положим $N = 4$ для пространства — времени (все еще без метрики) и, наконец, введем g_{ij}. Эти формулы будут установлены и объяснены, однако доказательства их здесь не приводится (Паули [881]; Схоутен [1061], стр. 97[1])).

Рассмотрим N-мерное пространство V_N с координатами x^i, но (пока) без метрики g_{ij}. Рассмотрим в V_N подпространство V_M, где $M = 1, 2, \ldots$ вплоть до $N-1$ или даже до N (в последнем случае V_M совпадает с V_N). Пользуясь латинскими буквами для набора значений индексов $1, 2, \ldots, N$ и греческими – для ряда $1, 2, \ldots, M$, запишем уравнение V_M в виде $x^i = x^i(y)$, где y означает M параметров y^ϱ.

Рассмотрим в V_M *элементарную ячейку* с M упорядоченными ребрами $d_\varrho y^\sigma$, где $\varrho(=1, 2, \ldots, M)$ нумерует ребра. Положим

$$\det(d_\varrho y^\sigma) = \Delta. \tag{1.234}$$

M-ячейка *положительно* или *отрицательно ориентирована* по отношению к координатной системе y в зависимости от того, положительно или отрицательно Δ. *Тензорный объем* ячейки определяется следующим образом:

$$d\tau^{i_1 i_2 \ldots i_M} = \varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_M} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{\alpha_1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial y^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial x^{i_M}}{\partial y^{\alpha_M}} \Delta, \tag{1.235}$$

где ε-символ есть M-мерный дискриминантный тензор[2]). Совершенно очевидно, что выражение (1.235) представляет собой контравариантный тензор относительно x-преобразований, кососимметричный по каждой паре индексов. По отношению к y-преобразованиям он представляет собой инвариант.

Выражение (1.235) имеет особенно простой вид в двух частных случаях. Возьмем прежде всего $M = 1$: ячейка одномерна и объем вырождается в

$$d\tau^i = dx^i. \tag{1.236}$$

Положим теперь $M = N$ и $y^i = x^i$. Мы получим

$$d\tau^{i_1 i_2 \ldots i_N} = \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_M}\Delta, \qquad \Delta = \det(d_j x^i) \tag{1.237}$$

и, взяв ячейку с ребрами вдоль параметрических линий координат, найдем, что

$$\Delta = dx^1 dx^2 \ldots dx^N. \tag{1.238}$$

Рассмотрим далее открытое V_M, вложенное в V_N. Пусть V_{M-1} — замкнутое $(M-1)$-мерное пространство, ограничивающее V_M. Пусть $T_{i_1 \ldots i_{M-1}}$ — ковариантное тензорное поле, определенное на V_M и его окрестности. Тогда *обобщенная теорема Стокса* гласит (ограничиваемся формулировкой теоремы без доказательства):

$$\oint\limits_{V_{M-1}} T_{i_1 \ldots i_{M-1}} d\tau^{i_1 \ldots i_{M-1}} = \int\limits_{V_M} T_{i_1 \ldots i_{M-1}, i_M} d\tau^{i_1 \ldots i_M}, \tag{1.239}$$

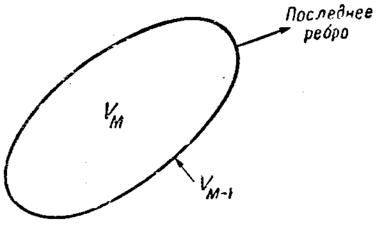
где запятая означает частную производную. Левая часть (1.239), очевидно, представляет собой инвариант. Справа также стоит инвариант, что легко проверить, приняв во внимание свойство кососимметричности элемента объема.

---

[1]) Более детальное рассмотрение можно найти в книге Синга и Шилда [1190], стр. 274.

[2]) См. § 5 для $M = 4$; обобщение на случай произвольного M очевидно.

Следует, однако, отметить, что формула (1.239) справедлива только в случае, когда ориентация ячеек определена соответствующим образом; в противном случае появится знак минус. Чтобы вникнуть в этот вопрос более глубоко, нужно уяснить себе, что V_{M-1} и V_M — *ориентируемые поверхности*. Это означает (дадим объяснение для V_M), что если мы обнесем M-ячейку вдоль произвольного замкнутого контура в V_M, предположив предварительно, что $\Delta \neq 0$, то, вернувшись в исходное положение, получим новый набор упорядоченных ребер ячейки, которые можно непрерывным способом перевести в старый набор при $\Delta \neq 0$. [Равенство $\Delta = 0$ означает, что M-ячейка вырождается в $(M-1)$-мерную.] Обращаясь в качестве примера к случаю поверхностей ($M = 2$) в обычном евклидовом пространстве, можно видеть, что поверхность сферы так же, как и поверхность тора, ориентируема, тогда как лист Мёбиуса неориентируем. Считая теперь V_{M-1} и V_M ориентируемыми пространствами, для того чтобы (1.239) выполнялось (но не при изменении знака какого-либо из интегралов на отрицательный), нам необходимо уметь строить взаимооднозначное соответствие между набором упорядоченных ребер $(M-1)$-ячейки в V_{M-1}-пространстве и набором упорядоченных ребер M-ячейки в V_M-пространстве плюс (в качестве *последнего* ребра) элемент, выходящий *из* V_M-пространства через V_{M-1}-пространство. Последнее замечание проиллюстрировано на фиг. 13. Это правило ориентации содержится в элементарной формуле (1.232), хотя в несколько не отчетливой форме, поскольку один из интегралов здесь взят вдоль кривой.



Фиг. 13. Добавляя к $(M-1)$-мерной ячейке направление последнего ребра, получаем M-мерную ячейку.

Вернемся к общей формуле Стокса (1.239) и положим $N = 4$, так что $V_N = V_4$ окажется пространством — временем, метрика которого, однако, еще не определена. Беря последовательно $M = 2$, 3 и 4, получим три следующие формы теоремы Стокса:

$$\oint\limits_{V_1} T_i\, dx^i = \int\limits_{V_2} T_{i,\,j}\, d\tau^{ij}, \tag{1.240}$$

$$\oint\limits_{V_2} T_{ij}\, d\tau^{ij} = \int\limits_{V_3} T_{ij,\,k}\, d\tau^{ijk}, \tag{1.241}$$

$$\oint\limits_{V_3} T_{ijk}\, d\tau^{ijk} = \int\limits_{V_4} T_{ijk,\,m}\, d\tau^{ijkm}, \tag{1.242}$$

где в последнем интеграле V_4 представляет собой область пространства — времени, ограниченную V_3.

В написанных выше формулах не содержится никаких предположений о наличии у T_{ij} и T_{ijk} каких-либо специальных свойств симметрии. Однако в силу кососимметричности тензорных объемов в формулах остаются фактически лишь кососимметричные части T-тензоров.

Введем, наконец, тензор g_{ij} пространства — времени. Теперь частные производные можно заменить ковариантными производными, так как добавочные члены при этом выпадают. Например,

$$T_{ij\,|\,k}\, d\tau^{ijk} = (T_{ij,k} - \Gamma^a_{ik} T_{aj} - \Gamma^a_{jk} T_{ia})\, d\tau^{ijk} = T_{ij,\,k}\, d\tau^{ijk}. \tag{1.243}$$

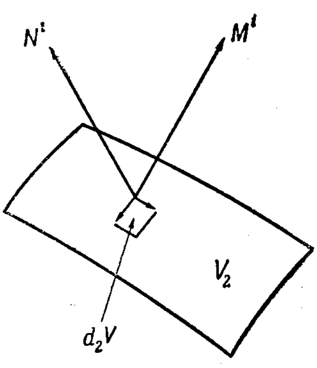
Таким образом, формулам Стокса можно придать полностью инвариантную форму:

$$\oint_{V_1} T_i\,dx^i = \int_{V_2} T_{i|j}\,d\tau^{ij}, \tag{1.244}$$

$$\oint_{V_2} T_{ij}\,d\tau^{ij} = \int_{V_3} T_{ij|k}\,d\tau^{ijk}, \tag{1.245}$$

$$\oint_{V_3} T_{ijk}\,d\tau^{ijk} = \int_{V_4} T_{ijk|m}\,d\tau^{ijkm}. \tag{1.246}$$

Перепишем теперь эти формулы в несколько ином виде, введя инвариантный элемент объема (двумерный, трех- или четырехмерный), определенный как произведение мер (ds) ребер прямоугольной ячейки.



Фиг. 14. Двумерная ячейка на V_2.

Рассмотрим V_2. Пусть M^i и N^i — единичные векторы, ортогональные к V_2 и друг к другу (фиг. 14). Тогда тензорный объем 2-ячейки можно записать в виде

$$d\tau^{ij} = \varepsilon(M)\,\varepsilon(N)\,\eta^{ijkm} M_k N_m d_2v, \tag{1.247}$$

где ε-символы представляют собой индикаторы векторов M и N соответственно, η — дискриминантный тензор, определенный формулами (1.114), а d_2v — инвариантный двумерный объем ячейки. Наша 2-ячейка оказывается такой, что ее упорядоченные ребра совместно с M^i и N^i образуют 4-репер, ориентация которого совпадает с ориентацией параметрических линий координат x^i. Нам нужно доказать формулу (1.247). Проведем доказательство, учитывая, что она имеет тензорный характер и, таким образом, должна быть справедлива в любой конкретно выбранной системе координат. Достаточно рассмотреть прямоугольную ячейку, так как любую косоугольную ячейку можно разбить на большое число прямоугольных. Будем теперь использовать координаты, для которых в рассматриваемой точке g_{ij} имеет вид диагональной матрицы (1, 1, 1, —1) и для которых параметрические линии x^1 и x^2 идут вдоль ребер ячейки, а параметрические линии x^3 и x^4 лежат соответственно вдоль M^i и N^i. Положим $y^1 = x^1$ и $y^2 = x^2$. Тогда в силу (1.234) имеем $\Delta = dx^1dx^2$, а вследствие (1.235)

$$d\tau^{12} = -d\tau^{21} = dx^1\,dx^2. \tag{1.248}$$

Другие компоненты $d\tau^{ij}$ равны нулю. С другой стороны, мы имеем $M_3 = \varepsilon(M)$, $N_4 = \varepsilon(N)$, а другие ковариантные компоненты равны нулю. Таким образом, правая часть (1.247) отлична от нуля лишь при $i = 1$, $j = 2$ или при $i = 2$, $j = 1$, причем для первого из этих случаев она равна d_2v. Но $d_2v = dx^1dx^2$, откуда, сравнивая это выражение с формулой (1.248), мы убеждаемся в справедливости формулы (1.247).

Аналогично для V_3 имеем

$$d\tau^{ijk} = \varepsilon(N)\,\eta^{ijkm} N_m d_3v, \tag{1.249}$$

где N^i — единичный вектор, нормальный к V_3, такой, что, рассматривая его совместно с упорядоченными ребрами 3-ячейки в качестве четвертого измерения, мы получаем 4-ячейку той же ориентации, что и параметрические линии координат; d_3v — инвариантный 3-объем ячейки. Для V_4 имеем

$$d\tau^{ijkm} = \eta^{ijkm} d_4v, \tag{1.250}$$

где $d_4 v$ — инвариантный 4-объем при условии, что ориентации 4-ячейки и параметрических линий координат совпадают; в противном случае должен появиться знак минус.

Поскольку ковариантная производная дискриминантного тензора равна нулю, мы можем теперь записать формулы Стокса (1.244) — (1.246) в следующем виде:

$$\oint_{V_1} T_i dx^i = \int_{V_2} (T_i \eta^{ijkm})_{|j} \varepsilon(M) \varepsilon(N) M_k N_m d_2 v, \tag{1.251}$$

$$\oint_{V_2} T_{ij} d\tau^{ij} = \int_{V_3} (T_{ij} \eta^{i}{}_{j}{}^{km})_{|k} \varepsilon(N) N_m d_3 v, \tag{1.252}$$

$$\oint_{V_3} T_{ijk} d\tau^{ijk} = \int_{V_4} (T_{ijk} \eta^{ijkm})_{|m} d_4 v. \tag{1.253}$$

В соотношениях (1.252) и (1.253) выражения, стоящие слева, можно было бы переписать так, чтобы они в явном виде содержали инвариантный элемент объема. С учетом (1.249) из соотношения (1.253) получаем

$$\oint_{V_3} T_{ijk} \eta^{ijkm} \varepsilon(N) N_m d_3 v = \int_{V_4} (T_{ijk} \eta^{ijkm})_{|m} d_4 v. \tag{1.254}$$

Если задан какой-либо вектор U^i, то дуальный к нему определим с помощью соотношения

$$U^*_{ijk} = \eta_{ijkm} U^m, \tag{1.255}$$

откуда следует, что

$$U^m = \frac{1}{6} \eta^{ijkm} U^*_{ijk}. \tag{1.256}$$

Следовательно, для любого векторного поля U^i соотношение (1.254) дает

$$\oint_{V_3} U^i \varepsilon(N) N_i d_3 v = \int_{V_4} U^i_{|i} d_4 v. \tag{1.257}$$

Это и есть *обобщение теоремы Грина* (или *Гаусса — Остроградского*). Отметим, что N^i выходит из области V_4 через V_3. Отметим также присутствие индикатора $\varepsilon(N)$.

Если в соотношении (1.240), (1.244) или (1.251) сжать V_1 в точку, то интеграл в левой части обратится в нуль, и в результате окажется, что интеграл по замкнутому контуру V_2 обращается в нуль. Аналогичным образом можно сжать в точку V_2 в (1.241), (1.245) или (1.252). Однако если бы пространство — время не было многосвязным, было бы бессмысленно сжимать в точку V_3 в (1.242), (1.246) или (1.253), так как это привело бы к одновременному обращению в точку и V_4. С помощью описанной выше процедуры сведения к точке мы получаем следующие тождества для замкнутых подпространств в пространстве — времени:

$$\text{без метрики:} \quad \left\{ \begin{aligned} &\oint_{V_2} T_{i,j} d\tau^{ij} = 0, \\ &\oint_{V_3} T_{ij,k} d\tau^{ijk} = 0; \end{aligned} \right. \tag{1.258}$$

$$
\text{с метрикой:}\quad \left\{\begin{aligned}
&\oint_{V_2} T_{i|j}\, d\tau^{ij} = 0,\\
&\oint_{V_2} (T_i \eta^{ijkm})_{|j}\, \varepsilon(M)\, \varepsilon(N)\, M_k N_m\, d_2 v = 0\\
&\oint_{V_3} T_{ij|k}\, d\tau^{ijk} = 0,\\
&\oint_{V_3} (T_{ij} \eta^{ijkm})_{|k}\, \varepsilon(N)\, N_m\, d_3 v = 0.
\end{aligned}\right. \qquad (1.259)
$$

Глава II

МИРОВАЯ ФУНКЦИЯ Ω

§ 1. Мировая функция Ω и ее ковариантные производные как двухточечный инвариант и двухточечные тензоры

Пусть $P'(x')$ и $P(x)$ — две точки пространства — времени, соединенные геодезической Γ, которая задана уравнениями $x^i = \xi^i(u)$, где u — канонический параметр (см. гл. I, § 2). Тогда значение интеграла [см. (1.27)]

$$\Omega(P'P) = \Omega(x', x) = \frac{1}{2}(u_1 - u_0)\int_{u_0}^{u_1} g_{ij}U^iU^j\,du, \tag{2.1}$$

взятого вдоль Γ при $U^i = d\xi^i/du$, не зависит от частного выбора канонического параметра. Если, как мы будем предполагать, точки P' и P определяют единственную геодезическую, проходящую через них, то Ω есть функция этих двух точек и зависит от восьми переменных $x^{i'}$, x^i. Мы будем называть ее *мировой функцией*[1]) пространства — времени.

Поскольку $\delta U^i/\delta u = 0$, то $g_{ij}U^iU^j = \mathrm{const}$ вдоль Γ и (2.1) можно записать в виде

$$\Omega(P'P) = \Omega(x', x) = \frac{1}{2}(u_1 - u_0)^2 g_{ij}U^iU^j, \tag{2.2}$$

где последний член в (2.2) вычисляется в произвольной точке на Γ. Далее мы можем так выбрать u, чтобы его значения на концах были $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, и получить выражение

$$\Omega(P'P) = \Omega(x', x) = \frac{1}{2}g_{ij}U^iU^j, \tag{2.3}$$

определенное всюду на Γ. Аналогично (1.36) можно записать

$$\Omega(P'P) = \Omega(x', x) = \frac{1}{2}\varepsilon L^2, \quad L = \int_{P'}^{P} ds. \tag{2.4}$$

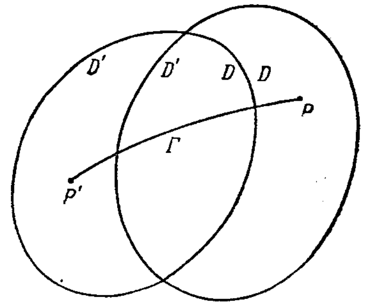
Таким образом, с точностью до множителя $\varepsilon (= \pm 1)$ мировая функция равна половине квадрата меры геодезической, соединяющей P' и P.

Как указывалось выше, мы предполагаем, что существует только одна геодезическая, проходящая через точки P' и P. Это условие будет наверняка выполняться в случае, когда точки расположены достаточно близко

---

[1]) Эта функция была введена в тензорное исчисление Рузе [1014—1015]. См. также работы Синга [1155], Яно и Муто [1405], Схоутена ([1061], стр. 382). Ей присваивались названия *функции расстояния и характеристической функции*, однако название *мировая функция* применительно к общей теории относительности представляется наиболее подходящим, поскольку Ω определяет искривленный мир пространства — времени.

одна от другой, однако существуют физические примеры, когда оно не имеет места. В таких случаях мировая функция оказывается уже не однозначной, и к вопросу о существовании частных производных необходимо подходить с осторожностью. Всеобщая теория мировой функции, включающая и такие сингулярные случаи, была бы весьма сложной. Мы будем всюду предполагать, что геодезическая $P'P$ — единственна и что частные производные существуют. Как мы убедимся в дальнейшем, при таком понимании мировой функции Ω последняя представляет собой мощный инструмент для выполнения последовательных приближений, причем ее применение не исключает использования техники тензорного исчисления.



Фиг. 15. Перекрывающиеся области D' и D и определенные в них системы координат C' и C.

Из (2.4) очевидно, что в плоском пространстве — времени существует система координат, такая, что

$$\begin{aligned} \Omega(x', x) &= \frac{1}{2} g_{ij} (x^{i'} - x^i)(x^{j'} - x^j), \\ g_{ij} &= \eta_{ij} = \operatorname{diag}(1, 1, 1, -1). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Эту формулу полезно помнить, так как она дает представление о свойствах функции Ω и ее производных в общем случае искривленного пространства — времени.

Чтобы выяснить трансформационные свойства мировой функции и ее производных, лучше всего представить себе две системы координат, скажем C' и C, в областях D' и D пространства — времени. Эти области перекрываются, и в области перекрытия существует непрерывное преобразование $C \longleftrightarrow C'$ (фиг. 15). (Вполне возможно, что как область D, так и область D', покрывают все пространство — время. В этом случае областью перекрытия будет все пространство — время.) Точка P' лежит в D' и имеет координаты $x^{i'}$ в системе C', тогда как P лежит в D и имеет координаты x^i в системе C.

Интеграл (2.1) и в этом случае не теряет смысла при надлежащей интерпретации: в некоторой точке перекрытия следует разбить его на две части, используя для каждой из них координаты C' и C соответственно. Мировая функция $\Omega(x', x)$ есть *двухточечный инвариант* в том смысле, что ее величина не меняется, когда мы преобразуем *независимо* координатные системы в D' и D. Кратко о таких преобразованиях можно говорить как о *преобразованиях в P' и P*.

Рассмотрим теперь ковариантные производные двухточечного инварианта $I(x', x)$. Все нижеследующее справедливо, в частности, и для $\Omega(x', x)$, однако поскольку мы не будем касаться специальных свойств Ω, будет более правильным говорить о произвольном двухточечном инварианте I.

Ковариантное дифференцирование можно выполнять и по координатам P', и по координатам P. Во избежание громоздких обозначений будем отмечать эти ковариантные производные простым индексом без вертикальной черты, как это делалось ранее. Последовательность выполнения операций определяется порядком следования нижних индексов. Итак, мы имеем в своем распоряжении такие величины, как

$$I_{i'} = \frac{\partial I}{\partial x^{i'}}, \quad I_{i'j'} = \frac{\partial}{\partial x^{j'}} I_{i'} - \Gamma^{a'}_{i'j'} I_{a'}, \tag{2.6}$$

где символы Γ вычислены в P', и

$$I_i = \frac{\partial I}{\partial x^i}, \quad I_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^j} I_i - \Gamma^a_{ij} I_a, \tag{2.7}$$

где символы Γ вычислены в P. Эти величины, очевидно, являются функциями координат P' и P и представляют собой *двухточечные тензоры.* Ясно, что величины, входящие в (2.6), образуют соответственно ковариантный вектор и ковариантный тензор второго ранга по отношению к преобразованиям в P' и что они инвариантны относительно преобразований в P. Для описания таких трансформационных свойств нельзя сформулировать единого простого правила. Однако эти свойства сразу понятны из обозначений. Аналогичные утверждения применимы и по отношению к величинам (2.7) *mutatis mutandis*[1]).

Мы имеем также следующие величины:

$$I_{i'j}=\frac{\partial}{\partial x^j}I_{i'},\quad I_{ij'}=\frac{\partial}{\partial x^{j'}}I_i, \tag{2.8}$$

$$I_{i'jk}=\frac{\partial}{\partial x^k}I_{i'j}-\Gamma^a_{jk}I_{i'a}. \tag{2.9}$$

Здесь тензорные свойства полностью определяются обозначениями. Каждое из выражений, входящих в (2.8), представляет собой ковариантный вектор относительно любого преобразования, тогда как (2.9) оказывается ковариантным вектором относительно преобразований в P' и ковариантным тензором второго ранга относительно преобразований в P. Приведенные выше наглядные примеры должны помочь читателю освоиться с любыми ковариантными производными.

Можно поднимать индексы в P' с помощью $g^{i'j'}$ и в P с помощью g^{ij}. Таким образом,

$$I^{i'}=g^{i'j'}I_{j'},\quad I^i=g^{ij}I_j. \tag{2.10}$$

Из (2.8) видно, что

$$I_{ij'}=I_{j'i}. \tag{2.11}$$

Это один из частных случаев осуществления общего *правила перестановки: значение любой ковариантной производной остается неизменным при перестановке штрихованных и нештрихованных индексов при условии, если порядок штрихованных и нештрихованных индексов по отдельности сохраняется.* Чтобы убедиться в справедливости этого правила, запишем, например,

$$I_{\dots ij'}=I_{\dots j'i}, \tag{2.12}$$

где точки в обеих частях означают один и тот же набор индексов штрихованных, нештрихованных или тех и других. Разумеется, это равенство является тензорным по отношению к обоим преобразованиям. Мы проверим его достоверность, воспользовавшись такими координатными системами, для которых символы Γ обращаются в нуль при заданном положении P' и P. Тогда для некоторого выбранного нами P и любого P' получим

$$I_{\dots i}=\frac{\partial}{\partial x^i}I_{\dots}, \tag{2.13}$$

и, следовательно, когда выбрано и положение P', и положение P,

$$I_{\dots ij'}=\frac{\partial}{\partial x^{j'}}\frac{\partial}{\partial x^i}I_{\dots}. \tag{2.14}$$

Но, аналогичным образом,

$$I_{\dots j'i}=\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^{j'}}I_{\dots}, \tag{2.15}$$

[1]) С необходимыми изменениями (*лат.*). — *Прим. ред*

и поскольку выражения (2.14) и (2.15) равны между собой, справедливость (2.12) в специальных системах координат установлена. Следовательно, (2.12) верно и в общем случае, откуда следует, что

$$I_{\ldots ij'\ldots}=I_{\ldots j'i\ldots}\,, \tag{2.16}$$

где точки в соответствующих положениях означают одни и те же индексы, штрихованные или нештрихованные. Это означает, что в любой ковариантной производной можно менять местами соседние индексы при условии, если один из них штрихованный, а другой нет. Отсюда вытекает справедливость сформулированного выше правила перестановки.

Заметим, что, вообще говоря, конечно, нельзя переставлять два индекса, если оба они штрихованы или нештрихованы (см. правила коммутации, гл. I, § 5).

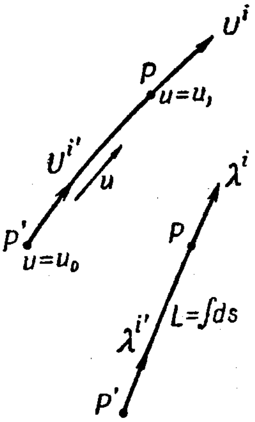
Все установленные выше формулы справедливы, в частности, для мировой функции. В силу (1.41) имеем

$$\Omega_{i'}=-(u_1-u_0)\,U_{i'},\quad \Omega_i=(u_1-u_0)U_i, \tag{2.17}$$

(где U^i — касательный вектор dx^i/du) и если Γ неизотропна, то, согласно (1.42),

$$\Omega_{i'}=-L\lambda_{i'},\quad \Omega_i=L\lambda_i, \tag{2.18}$$

где λ^i — единичный вектор, касательный к Γ. Напомним, что в (2.17) u — любой канонический параметр, а в (2.18) мы выбрали $du=ds$. Эти формулы проиллюстрированы на фиг. 16.



Фиг. 16. Иллюстрация первых производных мировой функции Ω.

В силу (2.17) имеем

$$g^{ij}\Omega_i\Omega_j=(u_1-u_0)^2g^{ij}U_iU_j, \tag{2.19}$$

и, таким образом, согласно (2.2),

$$g^{ij}\Omega_i\Omega_j=2\Omega. \tag{2.20}$$

Аналогичным образом,

$$g^{i'j'}\Omega_{i'}\Omega_{j'}=2\Omega. \tag{2.21}$$

Соотношения (2.20) и (2.21) представляют собой два дифференциальных уравнения в частных производных, которым удовлетворяет мировая функция.

Выпишем для справки следующие очевидные результаты:

$$\Omega_{i'j'}=\Omega_{j'i'},\quad \Omega_{ij}=\Omega_{ji}\,, \tag{2.22}$$

$$\Omega_{i'j'\ldots}=\Omega_{j'i'\ldots},\quad \Omega_{ij\ldots}=\Omega_{ji\ldots}\,, \tag{2.23}$$

где, как обычно, точки в одинаковых положениях справа и слева означают одинаковые индексы (штрихованные или нештрихованные). Такого рода коммутация имеет место только в том случае, когда два индекса стоят непосредственно после символа Ω.

§ 2. Пределы совпадения

Этот параграф посвящен обсуждению пределов ковариантных производных мировой функции, когда точки P' и P стремятся совпасть. Мы

будем пользоваться одной системой координат, так чтобы $x^i \to x^{i'}$ при $P \to P'$, и примем для этих пределов, которые мы назовем *пределами совпадения*, следующие обозначения:

$$\lim_{P \to P'} \Omega_{\dots} = [\Omega_{\dots}]. \tag{2.24}$$

Пределы совпадения оказываются полезными, только если они не зависят от пути, по которому P стремится к P'. В какой степени они действительно не зависят от пути, определяется гладкостью функции g_{ij}. Полное обсуждение этого сложного вопроса выходит за рамки данной книги. Однако мы дадим формальную аргументацию, предполагая аналитичность и допустимость оперирования с бесконечными рядами.

Уравнение геодезической

$$\frac{\delta U^i}{\delta u} \equiv \frac{dU^i}{du} + \Gamma^i_{jk} U^j U^k = 0, \quad U^i = \frac{dx^i}{du} \tag{2.25}$$

приводит к степенным рядам

$$x^i = x^{i'} + u_1 U^{i'} - \frac{1}{2} u_1^2 \Gamma^{i'}_{j'k'} U^{j'} U^{k'} + \dots, \tag{2.26}$$

где $u = 0$ в P' и $u = u_1$ в P. Обращение разложения (2.26) дает

$$u_1 U^{i'} = \xi^i + \frac{1}{2} \Gamma^{i'}_{j'k'} \xi^j \xi^k + \dots, \quad \xi^i = x^i - x^{i'}. \tag{2.27}$$

Следовательно, в силу (2.2)

$$2\Omega(x', x) = u_1^2 g_{i'j'} U^{i'} U^{j'} = g_{i'j'} \xi^i \xi^j + A_{i'j'k'} \xi^i \xi^j \xi^k + \dots, \tag{2.28}$$

причем коэффициенты в этих разложениях являются функциями $g_{i'j'}$ и их производных. Таким образом, $\Omega(x', x)$ оказывается аналитической функцией своих восьми аргументов, и, следовательно, пределы совпадения не зависят от пути. Как бы ни было такое доказательство грубым с точки зрения математики, оно показывает, что мы выбрали правильный путь, взяв в качестве мировой функции $\Omega(x', x)$ вместо, скажем, геодезической меры $P'P$. В последнем случае мы столкнулись бы с теми неопределенностями и бесконечностями (расходимостями), к которым приводит в евклидовом пространстве дифференцирование расстояния между двумя точками по их координатам и последующий переход к пределам совпадения.

Для большей определенности оговоримся сразу, что последующие вычисления зависят от допущений: а) мировая функция $\Omega(x', x)$ дифференцируема сколь угодно большое число раз и б) пределы совпадения существуют и не зависят от пути, по которому P стремится к P'.

Пределы совпадения, разумеется, будут функциями одной точки, и совершенно безразлично, как назвать эту точку: P или P'. С точки зрения удобства обозначений проще использовать P. Таким образом, когда предел совпадения вычислен в виде тензора, индексы этого тензора будем писать без штрихов. Однако важно сохранять штрихи внутри скобок [ ] до тех пор, пока не появятся достаточные основания для их вычеркивания.

Из (2.1) и (2.17) с очевидностью следует, что

$$[\Omega] = 0, \quad [\Omega_{i'}] = 0, \quad [\Omega_i] = 0, \tag{2.29}$$

и, следовательно,

$$[\Omega^{i'}] = 0, \quad [\Omega^i] = 0. \tag{2.30}$$

Дифференцирование выражения (2.20), которое можно записать в виде

$$2\Omega = \Omega_i \Omega^i, \tag{2.31}$$

дает

$$\Omega_j = \Omega_i \Omega^i_{\cdot j}. \tag{2.32}$$

Допустим, что $u = 0$ в P' и $u = u_1$ в P. Умножая (2.32) на u_1 и используя (2.17), получаем

$$U_j = U_i \Omega^i_{\cdot j}. \tag{2.33}$$

Поскольку предел совпадения не должен зависеть от пути, т. е. от предела U^i, мы получаем

$$[\Omega^i_{\cdot j}] = \delta^i_j, \quad [\Omega_{ij}] = g_{ij}. \tag{2.34}$$

Чтобы рассмотреть ковариантные производные более высокого порядка, будем последовательно дифференцировать (2.32), получая при этом

$$\Omega_{jk} = \Omega_{ik}\Omega^i_{\cdot j} + \Omega_i \Omega^i_{\cdot jk}, \tag{2.35}$$

$$\Omega_{jkm} = \Omega_{ikm}\Omega^i_{\cdot j} + \Omega_{ik}\Omega^i_{\cdot jm} + \Omega_{im}\Omega^i_{\cdot jk} + \Omega_i\Omega^i_{\cdot jkm}, \tag{2.36}$$

$$\Omega_{jkmp} = \Omega_{ikmp}\Omega^i_{\cdot j} + \Omega_{ikm}\Omega^i_{\cdot jp} + \Omega_{ikp}\Omega^i_{\cdot jm} + \Omega_{ik}\Omega^i_{\cdot jmp} + \Omega_{imp}\Omega^i_{\cdot jk} + \Omega_{im}\Omega^i_{\cdot jkp} + \Omega_{ip}\Omega^i_{\cdot jkm} + \Omega_i\Omega^i_{\cdot jkmp}, \tag{2.37}$$

и т. д. Перейдем теперь к пределу $P \to P'$, используя уже вычисленные пределы совпадения. Из (2.35) мы ничего, кроме тождества, не получим. С помощью же (2.36) находим

$$[\Omega_{kjm}] + [\Omega_{mjk}] = 0. \tag{2.38}$$

Но в силу (2.23) имеет место симметрия по двум первым индексам. Эта симметрия с учетом кососимметричности в (2.38) сразу приводит к равенству

$$[\Omega_{ijk}] = 0. \tag{2.39}$$

С учетом уже полученных результатов (2.37) дает в пределе

$$[\Omega_{kjmp}] + [\Omega_{mjkp}] + [\Omega_{pjkm}] = 0, \tag{2.40}$$

или в силу (2.23)

$$[\Omega_{jkmp}] + [\Omega_{jmkp}] + [\Omega_{jpkm}] = 0. \tag{2.41}$$

Согласно (1.96),

$$\Omega_{ijkm} - \Omega_{ijmk} = R^a_{\cdot ikm}\Omega_{aj} + R^a_{\cdot jkm}\Omega_{ia}, \tag{2.42}$$

и, следовательно,

$$[\Omega_{jikm}] = [\Omega_{ijmk}], \tag{2.43}$$

т. е. эти пределы совпадения симметричны по второй паре индексов так же, как и по первой паре. Это можно видеть и из (2.41). На основании (1.94)

$$\Omega_{ijk} - \Omega_{ikj} = R^a_{\cdot ijk}\Omega_a. \tag{2.44}$$

Дифференцируя и переходя к пределу, получаем

$$[\Omega_{ijkm}] - [\Omega_{ikjm}] = R_{mijk} = -R_{imjk}. \tag{2.45}$$

Переставляя местами k и m, складывая получающиеся выражения и дважды используя (2.43), находим, что

$$2[\Omega_{ijkm}]-[\Omega_{ikjm}]-[\Omega_{imkj}]=-R_{imjk}-R_{ikjm}. \qquad (2.46)$$

Следовательно, в силу (2.41) и (2.43)

$$[\Omega_{ijkm}]=S_{ijkm}, \qquad (2.47)$$

где S_{ijkm} — *симметризованный тензор Римана*, определяемый соотношением

$$S_{ijkm}=-\frac{1}{3}(R_{ikjm}+R_{imjk}). \qquad (2.48)$$

Этот тензор удовлетворяет условиям симметрии

$$\begin{gathered} S_{ijkm}=S_{jikm}=S_{ijmk}=S_{kmij}, \\ S_{iabc}+S_{ibca}+S_{icab}=0. \end{gathered} \qquad (2.49)$$

Тензор S_{ijkm} позволяет описывать свойства кривизны пространства — времени в такой же мере, как и тензор Римана. Он имеет 20 независимых компонент: 6 компонент типа[1]) S_{1122}, 12 — типа S_{1123} и 3 — типа S_{1234}, причем эти последние удовлетворяют соотношению

$$S_{1234}+S_{1324}+S_{1423}=0. \qquad (2.50)$$

R-тензор выражается через S-тензор следующим образом:

$$R_{ijkm}=-(S_{ikjm}-S_{imjk})=-S_{ikmj}+S_{imkj}. \qquad (2.51)$$

Предел совпадения $[\Omega_{ijkm}]$, разумеется, удовлетворяет тем же условиям симметрии, что и S_{ijkm}.

Расширяя последовательность равенств (2.35) — (2.37) путем дальнейшего дифференцирования, можно вычислить пределы совпадений для производных более высокого порядка. Используя обозначения, в которых численный индекс символизирует букву, имеем

$$[\Omega_{12345}]=-\frac{1}{4}(R_{13245}+R_{13254}+R_{14235}+R_{14253}+R_{15234}+R_{15243}), \qquad (2.52)$$

где последние индексы у R означают ковариантные производные. Выражение для $[\Omega_{123456}]$ имеет значительно более сложный вид (Синг [1155]) [2]).

Так как совпадение можно получить эквивалентным образом и устремляя P к P', и наоборот, устремляя P' к P, то ясно, что в каждом из полученных выше пределов совпадения можно над всеми индексами поставить штрихи. Например,

$$[\Omega_{i'j'}]=g_{ij}, \quad [\Omega_{i'j'k'm'}]=S_{ijkm}. \qquad (2.53)$$

Теперь следует рассмотреть случай, когда часть индексов штрихована, а часть нет. При этом нам понадобится следующая лемма:

$$[\Omega_{..}]_k=[\Omega_{..k}]+[\Omega_{..k'}], \qquad (2.54)$$

где точки означают любой набор индексов, штрихованных или нештрихованных, одинаковый для всех символов.

Чтобы доказать эту лемму, возьмем геодезическую Γ и точки P' и P на ней, причем соответствующие им значения некоторого канонического

---

[1]) Заметим, что $S_{1122}=-2S_{1212}$, $S_{1123}=-2S_{1213}$.

[2]) Этот 4-индексный предел совпадения представляет собой так называемое «второе расширение» («second extension») фундаментального тензора (Веблен [1310], стр. 97).

параметра на Г пусть будут равны соответственно u' и u. Рассмотрим смешанную ковариантную производную

$$\Omega_{i_1 \ldots i_p j'_1 \ldots j'_q}. \tag{2.55}$$

Возьмем набор $(p+q)$ векторов, произвольным образом выбранных в некоторой точке Г и затем подвергнутых параллельному переносу вдоль Г. Обозначим через $A^{i_1 \ldots i_p}$ произведение первых p векторов в P и через $B^{i'_1 \ldots i'_q}$ — произведение оставшихся q векторов в P'. Образуем двухточечный инвариант

$$H(u', u) = \Omega_{i_1 \ldots i_2 j'_1 \ldots j'_q} A^{i_1 \ldots i_p} B^{j'_1 \ldots j'_q}. \tag{2.56}$$

Выбирая $(u-u')$ малым, так, чтобы точки P и P' были расположены близко одна от другой, и пренебрегая членами второго порядка малости, получаем

$$H(u', u) = H(u', u') + (u-u')\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)_{u=u'} = \\ = H(u', u') + (u-u')[\Omega_{\ldots k}]_{P'} U^{k'} (A \ldots B \ldots)_{P'}, \tag{2.57}$$

где, как уже указывалось, предел совпадения вычислен в P', а $U^{k'}$ есть касательный вектор (dx^k/du) в P'. Для простоты записи в (2.57) вместо индексов, фигурирующих в (2.56), поставлены точки. Аналогично

$$H(u', u) = H(u, u) + (u'-u)\left(\frac{\partial H}{\partial u'}\right)_{u'=u} = \\ = H(u, u) + (u'-u)[\Omega_{\ldots k'}]_P U^k (A \ldots B \ldots)_P. \tag{2.58}$$

Вычтем (2.58) из (2.57), разделим оставшееся выражение на $(u'-u)$ и перейдем к пределу $u' \to u$, который соответствует совпадению P' и P. В результате получаем

$$\frac{dH(u, u)}{du} = \{[\Omega_{\ldots k}] + [\Omega_{\ldots k'}]\} U^k A \ldots B \ldots, \tag{2.59}$$

где все величины теперь вычислены в точке P. Однако

$$H(u, u) = [\Omega_{\ldots}] A \ldots B \ldots, \tag{2.60}$$

и, таким образом,

$$\frac{dH(u, u)}{du} = [\Omega_{\ldots}]_{;k} U^k A \ldots B \ldots . \tag{2.61}$$

Справедливость формулы (2.54) теперь очевидна, если сравнить (2.59) и (2.61) и вспомнить, что в любой заданной точке P пространства — времени можно произвольным образом выбрать направление геодезической Г, а также векторы A и B.

Формулу (2.54) удобно переписать в виде

$$[\Omega_{\ldots k'}] = [\Omega_{\ldots}]_{;k} - [\Omega_{\ldots k}]. \tag{2.62}$$

В такой записи она становится своего рода инструментом, позволяющим автоматически получать пределы совпадения при штрихованных индексах, как только эти пределы становятся известными при нештрихованных индексах. Например, взяв

$$\Omega_{\ldots} = \Omega_i, \tag{2.63}$$

получаем

$$[\Omega_{ik'}] = [\Omega_i]_{;k} - [\Omega_{ik}]. \tag{2.64}$$

Мы уже знаем, что $[\Omega_i]=0$, и, значит, $[\Omega_i]_k=0$. Кроме того, $[\Omega_{ik}]=g_{ik}$. Следовательно,

$$[\Omega_{ik'}]=-g_{ik}. \tag{2.65}$$

В качестве второго примера возьмем

$$\Omega_{\dots}=\Omega_{ij}. \tag{2.66}$$

Теперь из (2.62) следует, что

$$[\Omega_{ijk'}]=[\Omega_{ij}]_k-[\Omega_{ijk}]. \tag{2.67}$$

Но $[\Omega_{ij}]=g_{ij}$ и, таким образом, его ковариантная производная равна нулю; трехиндексный символ справа также равен нулю. Следовательно, мы получаем

$$[\Omega_{ijk'}]=0. \tag{2.68}$$

Если ограничиться рассмотрением пределов совпадения не выше четвертого порядка (а именно такие случаи наиболее важны в приложениях), можно пользоваться следующими правилами, которые легко проверить:

1. Перенести все штрихованные индексы вправо (согласно общему правилу перестановок, приведенному в § 1).
2. Вычеркнуть последний штрих и изменить знак.
3. Перенести этот последний индекс вперед, присоединив его к другим нештрихованным индексам.
4. Повторять эту процедуру до тех пор, пока все штрихи не исчезнут.

В целях удобства ссылок здесь приводится перечень формул для пределов совпадения и симметризованного тензора Римана:

$$\begin{gathered}
[\Omega]=0,\quad [\Omega_i]=0,\quad [\Omega_{i'}]=0,\\
[\Omega_{ij}]=g_{ij},\quad [\Omega_{ij'}]=[\Omega_{i'j}]=-g_{ij},\quad [\Omega_{i'j'}]=g_{ij},\\
[\Omega_{ijk}]=0 \text{ (все выражения с тремя индексами равны нулю)},\\
[\Omega_{ijkm}]=S_{ijkm},\quad [\Omega_{ijkm'}]=-S_{ijkm},\\
[\Omega_{ijk'm'}]=S_{ijkm},\quad [\Omega_{ij'k'm'}]=-S_{imkj}=-S_{imjk},\\
[\Omega_{i'j'k'm'}]=S_{ijkm},\\
S_{ijkm}=-\frac{1}{3}(R_{ikjm}+R_{imjk}),\\
R_{ijkm}=-S_{ikjm}+S_{imjk}=-S_{ikmj}+S_{imkj},\\
S_{ijkm}=S_{jikm}=S_{kmij},\\
S_{iabc}+S_{ibca}+S_{icab}=0,\\
(S_{iabjc}-S_{iacjb})+(S_{ibcja}-S_{ibajc})+(S_{icajb}-S_{icbja})=0.
\end{gathered} \tag{2.69}$$

В последней формуле, представляющей собой следствие тождества Бианки (1.98), пятый индекс означает ковариантное дифференцирование[1]).

[1]) Теорию пределов совпадения можно свести к теории так называемых «нормальных» тензоров (см. Схоутен и Стройк [1067], т. 1, § 11).— *Прим. ред.*

§ 3. Вычисление вторых производных мировой функции с помощью оператора параллельного переноса

Приближения, основанные на пренебрежении малыми членами, в математической физике встречаются весьма часто, и редко возникают какие-либо причины возражать против такого рода приближений. Интуиция подсказывает, что если что-нибудь и окажется некорректным, то это сразу проявится в какой-либо аномалии; в таком случае теория может быть пересмотрена. Так, в классической гидродинамике приближение, в котором жидкость с *малой* вязкостью рассматривается как среда, *лишенная* вязкости, приводит к парадоксу Даламбера (тело, движущееся в воде, не испытывает сопротивления) и исследователи обращаются к более совершенным приближениям теории пограничного слоя.

Как только теории дана четкая математическая формулировка, при ее дальнейшем развитии желательна математическая точность. Однако обычно это оказывается либо невозможным (физик недостаточно хорошо знает математику), либо слишком искусственным (детали математических выкладок вуалируют основную линию рассуждений). В этой книге мы будем стараться выбрать средний путь. Приближения иногда возникают довольно наивным образом: этот параметр мал, пренебрежем его квадратом и квадратом его производных! В других случаях метод рассмотрения более последователен. В частности, мы должны помнить, что понятие *малости* можно правомерно применять только к безразмерным величинам, и даже в этом случае оно относительно. Сила[1]) притяжения между Солнцем и Землей (в ньютоновской терминологии) безразмерна, и ее значение равно приблизительно $3\cdot 10^{-22}$ (см. дополнение Б). Можно ли утверждать, что она мала? Это целиком зависит от того, с чем мы ее сравниваем.

Проводимые ниже выкладки точны в том смысле, что неучитываемые остаточные члены здесь объединяются вместе и обозначаются символами O_1 или O_2, указывающими порядок малости величин. Обосновано такое объединение тем обстоятельством, что эти члены, вообще говоря, «малы». Нам представляется, что самое лучшее — предоставить читателю самому рассмотреть вопрос о тех возможных случаях, когда это не имеет места. В данной книге мы будем время от времени возвращаться к вопросу о *малости*; это следует классифицировать как признаки влияния потревоженной математической добросовестности.

В предыдущем параграфе мы занимались вычислением пределов совпадения для ковариантных производных мировой функции $\Omega(p', p)$. Теперь попытаемся вычислить эти производные в случае, когда P' и P представляют собой различные точки пространства — времени. Способ вычисления допускает применение метода итераций, позволяющего как угодно точно аппроксимировать истинные значения величин. Однако мы будем интересоваться главным образом приближенными вычислениями для пространства — времени в случае, когда характеризующий его тензор Римана мал по величине. В таком случае в нем можно оставить лишь члены O_1, а квадратичные добавочные члены O_2 отбросить[2]).

Здесь мы будем предполагать существование производных от Ω. Это означает, что *сопряженные точки* исключаются из рассмотрения. Последние соответствуют в случае оптики фокусам, в которых собираются лучи, исходящие из точечного источника. Легко убедиться, что такого рода точки в физических приложениях теории действительно существуют (например, при рассмотрении орбит планет). Их существование, однако, не лишает

---

[1]) Здесь имеется в виду гравитационная константа.— *Прим. ред.*

[2]) Относительно альтернативного пути см. гл. VII, § 9.

теорию применимости, коль скоро из рассмотрения исключены случаи, когда P и P' оказываются сопряженными. Вопрос о сопряженных точках в римановом пространстве — времени представляет определенный интерес как с метаматической, так и с физической точек зрения, однако мы не будем пытаться его обсуждать[1]).

В качестве предварительного шага рассмотрим уравнение параллельного переноса, которое гласит, что для любой кривой и при произвольной параметризации на ней

$$\frac{\delta\lambda^i}{\delta u}=0. \tag{2.70}$$

Пусть рассматриваемая кривая будет геодезической, связывающей точки P' и P. В таком случае, как только эти точки заданы, вектор $\lambda^{i'}$ в точке P' определяет через посредство параллельного переноса вектор λ^i в точке P. Из линейного и однородного характера дифференциального уравнения (2.70) следует, что λ^i должны быть линейными и однородными функциями $\lambda^{i'}$, так что можно записать

$$\lambda_i=g_{ij'}\lambda^{j'}. \tag{2.71}$$

Здесь коэффициенты $g_{ij'}$ не зависят от выбора векторов. Они определяются[2]) точками P и P' и образуют двухточечный тензор. Фактически по отношению к каждой точке это ковариантный вектор. Назовем $g_{ij'}$ *оператором параллельного переноса.* Может показаться, что принятое обозначение приведет к путанице, так как через g_{ij} и $g_{i'j'}$ уже обозначен метрический тензор в точках P и P'. Однако никакой путаницы здесь возникать не должно и, как мы увидим далее, такое обозначение вполне себя оправдывает. Если устремить P' к P, то получим предел совпадения

$$[g_{ij'}]=g_{ij}. \tag{2.72}$$

Поднятие индексов не составляет никакой трудности:

$$\begin{gathered} g^{i}_{\cdot j'}=g^{ik}g_{kj'}, \quad g_i^{\cdot j'}=g_{ik'}g^{k'j'}, \\ g^{ij'}=g^{ik}g_{km'}g^{m'j'}. \end{gathered} \tag{2.73}$$

Если $\lambda^i_{(a)}$ — ортонормированный репер (ОР), претерпевающий параллельный перенос вдоль геодезической $P'P$, то в силу (2.71) мы имеем

$$\lambda_{(a)i}=g_{ij'}\lambda^{j'}_{(a)} \tag{2.74}$$

и, таким образом, вследствие (1.50) и (1.48)

$$g_{ij'}=\lambda_{(a)i}\lambda^{(a)}_{j'}=\eta_{(ba)}\lambda^{(b)}_i\lambda^{(a)}_{j'}=g_{j'i}. \tag{2.75}$$

Итак, оператор параллельного переноса симметричен.

Мы могли бы определить оператор параллельного переноса с помощью соотношения (2.75), но в этом случае могло бы оказаться не очевидным, что $g_{ij'}$ действительно двухточечный тензор, не зависящий от ОР. Однако эту независимость легко доказать, подвергая ОР преобразованию Лоренца (1.52).

[1]) О некоторых замечаниях, касающихся вопроса о сопряженных точках, см. § 9 и работу Синга [1152].

[2]) Мы предполагаем, что существует единственная геодезическая, связывающая P' и P.

Заметим по ходу дела, что перенос Ферми — Уолкера (гл. I, § 4) также имеет пропагатор[1]) (скажем, $W_{ij'}$), такой, что вдоль любой кривой (кроме изотропной) для переноса Ф — У

$$\lambda_i = W_{ij'}\lambda^{j'}, \tag{2.76}$$

где $W_{ij'}$ задается формулой

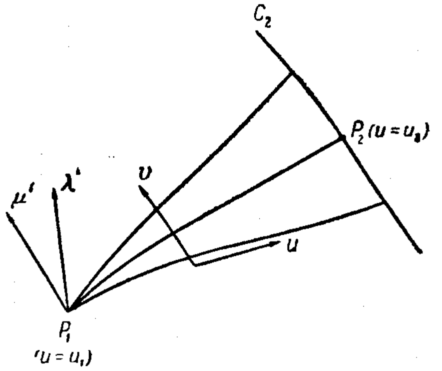
$$W_{ij'} = \lambda_{(a)i}\lambda^{(a)}_{j'} = W_{j'i}. \tag{2.77}$$

Однако $W_{ij'}$ не является истинным двухточечным тензором, так как он зависит от выбора кривой, соединяющей точки P и P'. В случае $g_{ij'}$ мы эффективным образом исключили кривую, обратив ее в геодезическую. Если сделать то же самое для переноса Ф — У, мы получим $W_{ij'} = g_{ij'}$.

Чтобы вычислить ковариантные производные мировой функции Ω, обратимся к уравнению для отклонения от геодезической (1.130):

$$\frac{\delta^2 V^i}{\delta u^2} = K^i_{\cdot m} V^m = 0,$$
$$K_{im} = R_{ipmq} U^p U^q. \tag{2.78}$$

В § 6 гл. I мы обсуждали решение этого уравнения с помощью инвариантов; теперь используем для этой цели оператор параллельного переноса.



Фиг. 17. Вычисление ковариантных производных мировой функции Ω.

На фиг. 17 показано семейство геодезических, исходящих из точки P_1 и пересекающих кривую C_2, заданную уравнениями $x^i = x^i(v)$; P_2 — произвольная точка на ней. Выбирая на этих геодезических канонический параметр u с фиксированными значениями на концах ($u = u_1$ в точке P_1 и $u = u_2$ на C_2), мы получим двумерное пространство $x^i = x^i(u, v)$. Полагая, аналогично тому, как это делалось в § 6 гл. I,

$$U^i = \frac{\partial x^i}{\partial u}, \quad V^i = \frac{\partial x^i}{\partial v}, \tag{2.79}$$

получаем во всем двумерном пространстве

$$\frac{\delta U^i}{\delta v} = \frac{\delta V^i}{\delta u}, \quad \frac{\delta U^i}{\delta u} = 0, \tag{2.80}$$

и, поскольку точка P_1 фиксирована,

$$V^{i_1} = 0. \tag{2.81}$$

Причем численный индекс при i означает, что вектор следует брать в точке P_1.

Положение вещей здесь полностью совпадает с рассмотренным в гл. I, § 6, за исключением того лишь факта, что здесь, во избежание сложных вычислений, мы фиксировали P_1. Для геодезического отклонения мы имеем уравнение (2.78). Пусть λ^i — вектор, произвольно выбранный в точке P_1 и перенесенный параллельно вдоль геодезической, так что

$$\frac{\delta \lambda^i}{\delta u} = 0. \tag{2.82}$$

[1]) То есть оператор переноса („propagator"). — *Прим. ред.*

Умножим (2.78) на $G(u, u')\,\lambda_i\,du$, где $G(u, u')$ — симметричная функция Грина (1.144), и выполним интегрирование от P_1 до P_2. Это дает

$$\int_{u_1}^{u_2} GD^2(\lambda_i V^i)\,du + \int_{u_1}^{u_2} GK_{im}\lambda^i V^m du = 0, \tag{2.83}$$

где $D = d/du$ и, следовательно, как и в (1.147),

$$\int_{u_1}^{u_2} D\,GD(\lambda_i V^i)\,du = \int_{u_1}^{u_2} GK_{km}\lambda^k V^m\,du. \tag{2.84}$$

Действуя далее так же, как и при выводе уравнения (1.149), но с учетом (2.81), получаем

$$\lambda_{i'}V^{i'} = k(u' - u_1)\,\lambda_{j_2}V^{j_2} + \int_{u_1}^{u_2} GK_{km}\lambda^k V^m\,du, \tag{2.85}$$

где $k^{-1} = u_2 - u_1$. После дифференцирования по u' имеем

$$\lambda_{i'}\frac{\delta V^{i'}}{\delta u'} = k\lambda_{j_2}V^{j_2} - k\int_{u_1}^{u'} (u - u_1)\,K_{km}\lambda^k V^m\,du + k\int_{u'}^{u_2} (u_2 - u)\,K_{km}\lambda^k V^m du. \tag{2.86}$$

Так как вектор λ^i можно выбрать произвольно в любой точке кривой P_1P_2 (скажем, при $u = u'$), то, вводя оператор параллельного переноса, с помощью (2.85) и (2.86) получаем

$$V_{i'} = k(u' - u_1)\,g_{i'j_2}V^{j_2} + \int_{u_1}^{u_2} GK^{km}g_{i'k}V_m\,du, \tag{2.87}$$

$$\frac{\delta U_{i'}}{\delta v} = \frac{\delta V_{i'}}{\delta u'} = kg_{i'j_2}V^{j_2} - k\int_{u_1}^{u'} (u - u_1)\,K^{km}g_{i'k}V_m\,du +$$

$$+ k\int_{u'}^{u_2} (u_2 - u)\,K^{km}g_{i'k}V_m\,du. \tag{2.88}$$

Это — точные уравнения. Из (2.87) можно с помощью итераций получить [1]) вектор отклонения с любой желаемой степенью точности. Тогда его абсолютная производная определится из уравнения (2.88). При такой итерационной процедуре мы придем к ряду, коэффициентами которого будут комбинации компонент тензора Римана. Если этот тензор мал (O_1), то имеем (опуская штрихи),

$$V_i = k(u - u_1)\,g_{ij_2}V^{j_2} + O_1, \tag{2.89}$$

$$\frac{\delta U_i}{\delta v} = \frac{\delta V_i}{\delta u} = kg_{ij_2}V^{j_2} + O_1. \tag{2.90}$$

Эти грубые приближения окажутся весьма ценными в последующих рас-

---

[1]) Если геодезические, исходящие из P_1, снова встречаются в P_2, то $V^j{}_2 = 0$. Интегральное уравнение (2.87) становится однородным и метод оказывается полностью непригодным. Это — исключенный из рассмотрения случай сопряженных точек.

суждениях. Более точно[1]) с помощью (2.88) в точках P_1 и P_2 получаем также

$$\frac{\delta U_{i_1}}{\delta v} = kg_{i_1 j_2} V^{j_2} + k^2 \int_{u_1}^{u_2} (u_2 - u)(u - u_1) K^{km} g_{i_1 k} g_{j_2 m} V^{j_2} du + O_2, \quad (2.91)$$

$$\frac{\delta U_{i_2}}{\delta v} = kg_{i_2 j_2} V^{j_2} - k^2 \int_{u_1}^{u_2} (u - u_1)^2 K^{km} g_{i_2 k} g_{j_2 m} V^{j_2} du + O_2. \quad (2.92)$$

В предыдущих вычислениях мировая функция не фигурирует. Как и в (2.17), положим теперь

$$\Omega_{i_1} = -(u_2 - u_1) U_{i_1}, \quad \Omega_{i_2} = (u_2 - u_1) U_{i_2}. \quad (2.93)$$

Перенося P_2 вдоль C_2 и дифференцируя по v, получаем (поскольку P_1 остается неподвижной)

$$\Omega_{i_1 j_2} V^{j_2} = -k^{-1} \frac{\delta U_{i_1}}{\delta v}, \quad \Omega_{i_2 j_2} V^{j_2} = k^{-1} \frac{\delta U_{i_2}}{\delta v}. \quad (2.94)$$

Для членов, стоящих справа, имеем выражения вида (2.91) и (2.92). Далее, как только P_1 и P_2 заданы, кривую C_2 можно провести через точку P_2 произвольным образом. Следовательно, V^{j_2} — произвольный вектор, и его можно отбросить. Таким образом, мы получим формулы для $\Omega_{i_1 j_2}$ и $\Omega_{i_2 j_2}$. Затем можно всюду поменять местами индексы 1 и 2, не забывая при этом изменять знак k. Кроме того, нам известно и общее правило перестановки (§ 1) (если мы хотим его использовать). И, наконец, вводя в рассмотрение S-тензор из § 2, мы получим следующие выражения для *ковариантных производных второго порядка от мировой функции*:

$$\Omega_{i_1 j_1} = g_{i_1 j_1} + \frac{3}{2} k \int_{u_1}^{u_2} (u_2 - u)^2 g_{i_1 a} g_{j_1 b} S^{abpq} U_p U_q du + O_2, \quad (2.95)$$

$$\Omega_{i_1 j_2} = \Omega_{j_2 i_1} = -g_{i_1 j_2} + \frac{3}{2} k \int_{u_1}^{u_2} (u_2 - u)(u - u_1) g_{i_1 a} g_{j_2 b} S^{abpq} U_p U_q du + O_2, \quad (2.95)$$

$$\Omega_{i_2 j_2} = g_{i_2 j_2} + \frac{3}{2} k \int_{u_1}^{u_2} (u - u_1)^2 g_{i_2 a} g_{j_2 b} S^{abpq} U_p U_q du + O_2,$$

$$k^{-1} = u_2 - u_1, \quad S^{abpq} = -\frac{1}{3} (R^{apbq} + R^{aqbp}).$$

Эти формулы можно записать короче с помощью инвариантных компонент [см. (1.54)] в некотором ОР $\lambda^i_{(a)}$, который переносится параллельно

[1]) В уравнении (2.91) и в последующих формулах символ O_2 означает интеграл, подынтегральная функция которого квадратична по тензору Римана. Например, в (2.91) O_2 означает

$$k \int_{u_1}^{u_2} \int_{u_1}^{u_2} (u_2 - u) G(u, u') K^{km} K^{a'b'} g_{i_1 k} g_{a'm} V_{b'} du\, du'. \quad (2.91a)$$

Обращаясь к вопросу о степени малости, мы прежде всего считаем тензор Римана малой величиной, а $(u_2 - u_1)$ — конечной. В таком случае O_2 имеет второй порядок малости (как это и должно было быть). Однако если область $(u_2 - u_1)$ велика, вопрос о малости нуждается в тщательном обсуждении. По-видимому, полезно подчеркнуть, что, решая вопрос о малости, здесь мы не основываемся на предположении о малости области $(u_2 - u_1)$.

вдоль геодезической P_1P_2. Если умножить первую из формул (2.95) на $\lambda^{i_1}_{(m)}\lambda^{j_1}_{(n)}$, то полученное произведение выйдет за знак интегрирования, и мы придем к выражениям

$$g_{i_1a}\lambda^{i_1}_{(m)} = \lambda_{(m)a}, \quad g_{j_1b}\lambda^{j_1}_{(n)} = \lambda_{(n)b}, \qquad \lambda_{(m)a}\lambda_{(n)b}S^{abpq}U_pU_q = S_{(mnrs)}U^{(r)}U^{(s)}. \tag{2.96}$$

Проведя аналогичные операции с остальными формулами и учитывая, что $U^{(r)}$ постоянна вдоль геодезической, получаем следующие выражения для инвариантных компонент:

$$\Omega_{(m_1m_1)} = \eta_{(mn)} + \frac{3}{2}kU^{(r)}U^{(s)}\int_{u_1}^{u_2}(u_2-u)^2 S_{(mnrs)}\,du + O_2,$$

$$\Omega_{(m_1n_2)} = -\eta_{(mn)} + \frac{3}{2}kU^{(r)}U^{(s)}\int_{u_1}^{u_2}(u_2-u)(u-u_1) S_{(mnrs)}\,du + O_2, \tag{2.97}$$

$$\Omega_{(m_2n_2)} = \eta_{(mn)} + \frac{3}{2}kU^{(r)}U^{(s)}\int_{u_1}^{u_2}(u-u_1)^2 S_{(mnrs)}\,du + O_2,$$

где[1])

$$\eta_{(mn)} = \mathrm{diag}\,(1,\ 1,\ 1,\ -1).$$

§ 4. Вычисление ковариантных производных от оператора параллельного переноса

В дальнейшем нам потребуется использовать тот факт, что ковариантные производные операто рапараллельного переноса $g_{ij_1'}$ в пространстве — времени с малой кривизной малы. Это обстоятельство очевидно даже с интуитивной точки зрения, ибо, как легко убедиться, в плоском пространстве — времени упомянутые выше ковариантные производные обращаются в нуль. Однако оператор параллельного переноса представляет собой один из существенных элементов пространственновременной геометрии, и мы посвятим этот параграф вычислению его ковариантных производных.

Обратимся к фиг. 3. Пусть λ^i и μ^i — векторы в точке P_1, выбранные произвольным образом и перемещаемые с помощью параллельного переноса вдоль геодезических. Тогда во всем двумерном пространстве геодезических

$$\frac{\delta\lambda^i}{\delta u} = 0, \quad \frac{\delta\mu^i}{\delta u} = 0, \tag{2.98}$$

а также, поскольку P_1 — фиксированная точка,

$$\frac{\delta\lambda^{i_1}}{\delta v} = 0, \quad \frac{\delta\mu^{i_1}}{\delta v} = 0. \tag{2.99}$$

Мы имеем

$$\lambda_{i_2} = g_{i_2j_1}\lambda^{j_1}, \tag{2.100}$$

и, следовательно, после дифференцирования по v

$$\frac{\delta\lambda_{i_2}}{\delta v} = g_{i_2j_1k_2}\lambda^{j_1}V^{k_2}, \tag{2.101}$$

[1]) Поясним обозначения: численный индекс 1 при m означает, что соответствующая величина взята в точке P_1; m_1 в левой части принимает те же численные значения, что и m в правой части.

где третий индекс у g означает ковариантную производную (в данном случае по P_2). Но с помощью правила коммутации (1.95), с учетом (2.98) получаем

$$\frac{\delta}{\delta u}\frac{\delta\lambda_i}{\delta v}=R_{ijmn}\,\lambda^j U^m V^n, \tag{2.102}$$

и, следовательно,

$$\frac{d}{du}\left(\mu^i\,\frac{\delta\lambda_i}{\delta v}\right)=R_{abmn}\,\mu^a\lambda^b U^m V^n. \tag{2.103}$$

Выполняя интегрирование и используя соотношения (2.99), получаем

$$\mu^{i_2}\frac{\delta\lambda_{i_2}}{\delta v}=\int\limits_{u_1}^{u_2}R^{abmn}\,\mu_a\lambda_b U_m V_n\,du=\mu^{i_2}\lambda^{j_1}\int\limits_{u_1}^{u_2}g_{i_2a}\,g_{j_1b}\,R^{abmn}\,U_m V_n\,du. \tag{2.104}$$

Поскольку μ^{i_2} можно считать произвольными, то мы их просто вычеркнем. Можно далее подставить в (2.104) выражение для $\delta\lambda_{i_2}/\delta v$ из формулы (2.101), а затем рассматривать λ^{j_1} как произвольные, так что их также можно вычеркнуть. В результате имеем уравнение

$$g_{i_2j_1k_2}\,V^{k_2}=-\int\limits_{u_1}^{u_2}g_{i_2a}\,g_{j_1b}\,R^{abmn}\,U_m V_n\,du. \tag{2.105}$$

До сих пор вычисления носили строгий характер. Подставим теперь в последний интеграл выражение для V_m из уравнения (2.89). Считая V^{k_2} произвольным, получаем

$$g_{i_2j_1k_2}=-k\int\limits_{u_1}^{u_2}(u-u_1)\,g_{i_2a}\,g_{j_1b}\,g_{k_2c}\,R^{abcq}\,U_q\,du+O_2. \tag{2.106}$$

Ввиду симметрии упомянутого оператора и возможности перестановки индексов 1 и 2 последняя формула содержит все ковариантные производные первого порядка от оператора параллельного переноса. Итак, мы имеем [1])

$$g_{i_1j_2k_1}=k\int\limits_{u_1}^{u_2}(u_2-u)\,g_{i_1a}\,g_{j_2b}\,k_{k_1c}\,R^{abcq}\,U_q\,du+O_2. \tag{2.107}$$

$$g_{i_1j_2k_2}=k\int\limits_{u_1}^{u_2}(u-u_1)\,g_{i_1a}\,g_{j_2b}\,g_{k_2c}\,R^{abcq}\,U_q\,du+O_2,$$

$$k^{-1}=u_2-u_1.$$

Если ввести в рассмотрение ОР $\lambda^i_{(a)}$, претерпевающий параллельный перенос вдоль геодезической P_1P_2, и умножить первое из уравнений (2.107) почленно на $\lambda^{i_1}_{(r)}\,\lambda^{j_2}_{(s)}\,\lambda^{k_1}_{(t)}$, то вид уравнения упростится. Поступая аналогичным образом со вторым уравнением (2.107), с помощью компонент

[1]) Переставим вначале в уравнении (2.106) индексы 1 и 2, учитывая, что при этом меняются местами u_1 и u_2 и, следовательно, k переходит в $-k$. Затем переставим i и j и учтем симметрию оператора параллельного переноса и кососимметричность тензора Римана.

в ОР получаем

$$g_{(a_1b_2c_1)}=kU^{(q)}\int_{u_1}^{u_2}(u_2-u)\,R_{(abcq)}\,du+O_2, \qquad (2.108)$$

$$g_{(a_1b_2c_2)}=kU^{(q)}\int_{u_1}^{u_2}(u-u_1)\,R_{(abcq)}\,du+O_2.$$

Теперь нетрудно в этом приближении вычислить ковариантные производные более высокого порядка. Для вычисления ковариантных производных четвертого порядка обратимся к фиг. 3 и продифференцируем каждое из уравнений (2.107) по v. Поскольку в (2.107) входят члены, имеющие порядок малости O_1, нет необходимости затрагивать операторы, стоящие под знаком интеграла, так как производные от них дадут члены порядка малости O_2. Но мы должны выполнить дифференцирование тензора Римана и U_q. Исходными формулами при этом будут уравнения (2.89) и (2.90). Таким образом[1]),

$$\frac{\delta}{\delta v}R^{abcq}=R^{abcqd}V_d=R^{abcqd}k\,(u-u_1)\,g_{dm_2}V^{m_2}+O_2, \qquad (2.109)$$

$$\frac{\delta}{\delta v}U_q=kg_{qm_2}V^{m_2}+O_1.$$

Таким методом мы получаем следующие формулы, записанные с помощью компонент параллельно переносимого ОР:

$$g_{(a_1b_2c_1d_1)}=-k^2\int_{u_1}^{u_2}(u_2-u)\,R_{(abcd)}\,du+k^2U^{(q)}\int_{u_1}^{u_2}(u_2-u)^2\,R_{(abcqd)}\,du+O_2, \qquad (2.110)$$

$$g_{(a_1b_2c_1d_2)}=k^2\int_{u_1}^{u_2}(u-u_1)\,R_{(abcd)}\,du+k^2U^{(q)}\int_{u_1}^{u_2}(u-u_1)^2R_{(abcqd)}\,du+O_2.$$

Несколько меняя обозначения, так чтобы вместо точек P_1 и P_2 фигурировали точки P' и P, получаем при $P'\to P$ следующие пределы совпадения:

$$[g_{ij'}]=g_{ij},\quad [g_{ij'k}]=0,\quad [g_{ij'k'}]=0, \qquad (2.111)$$

$$[g_{ij'km}]=-\frac{1}{2}R_{ijkm},\quad [g_{ij'km'}]=\frac{1}{2}R_{ijkm}.$$

Последние формулы тесно связаны с параллельным переносом вектора вдоль бесконечно малого замкнутого контура.

§ 5. Вычисление высших производных мировой функции

Для вычисления высших ковариантных производных мировой функции Ω будем исходить из первой и третьей формул (2.95):

$$\Omega_{i_1j_1}=g_{i_1j_1}+\frac{3}{2}k\int_{u_1}^{u_2}(u_2-u)^2g_{i_1a}g_{j_1b}S^{abpq}U_pU_q\,du+O_2, \qquad (2.112)$$

$$\Omega_{i_2j_2}=g_{i_2j_2}+\frac{3}{2}k\int_{u_1}^{u_2}(u-u_1)^2\,g_{i_2a}g_{j_2b}S^{abpq}\,U_p\,U_q\,du+O_2.$$

---

1) Пятый индекс у R означает ковариантную производную. Поднятие индекса производится обычным образом.

Мы намерены воспользоваться схемой, приведенной на фиг. 3, и выполнить дифференцирование по v. Ввиду того, что имеет место (2.107), мы можем (в рамках требуемой точности) не затрагивать операторы, стоящие под знаком интеграла. Что же касается других членов, то здесь мы имеем следующий результат: поскольку $g_{i_1 j_1}$ не зависит от P_2 и ковариантные производные от $g_{i_2 j_2}$ обращаются в нуль, то члены, стоящие первыми в правых частях формул (2.112), равны нулю. Далее, как и в (2.109), мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta v} U_p &= k g_{pk_2} V^{k_2} + O_1, \\ \frac{\delta}{\delta v} S^{abpq} &= S^{abpqc}\, k(u-u_1)\, g_{ck_2} V^{k_2} + O_2, \end{aligned} \tag{2.113}$$

где пятый индекс у S означает ковариантное дифференцирование. Выполняя перестановку индексов и числовых индексов 1 и 2 и используя при этом общее правило перестановок (§ 1), после непосредственных вычислений легко получаем все производные третьего порядка от мировой функции. Таким образом, с помощью первой формулы (2.112) получаем

$$\begin{aligned} \Omega_{i_1 j_1 k_2} = 3k^2 \int_{u_1}^{u_2} (u_2-u)^2 g_{i_1 a} g_{j_1 b} g_{k_2 c} S^{abcq} U_q\, du + \\ + \frac{3}{2} k^2 \int_{u_1}^{u_2} (u_2-u)^2 (u-u_1) g_{i_1 a} g_{j_1 b} g_{k_2 c} S^{abpqc} U_p U_q\, du + O_2. \end{aligned} \tag{2.114}$$

Как эта, так и другие аналогичные формулы, лучше всего записать с помощью компонент OP, переносимого параллельно вдоль P_1P_2. Получаем следующие значения для *инвариантных компонент ковариантных производных третьего порядка от мировой функции* $\Omega(P_1P_2)$:

$$\begin{aligned} \Omega_{(a_1 b_1 c_1)} &= -3k^2 U^{(q)} \int_{u_1}^{u_2} (u_2-u)^2 S_{(abcq)}\, du + \\ &\quad + \frac{3}{2} k^2 U^{(p)} U^{(q)} \int_{u_1}^{u_2} (u_2-u)^3 S_{(abpqc)}\, du + O_2, \\ \Omega_{(a_1 b_1 c_2)} &= 3k^2 U^{(q)} \int_{u_1}^{u_2} (u_2-u)^2 S_{(abcq)}\, du + \\ &\quad + \frac{3}{2} k^2 U^{(p)} U^{(q)} \int_{u_1}^{u_2} (u_2-u)^2 (u-u_1) S_{(abpqc)}\, du + O_2, \\ \Omega_{(a_1 b_2 c_2)} &= -3k^2 U^{(q)} \int_{u_1}^{u_2} (u-u_1)^2 S_{(bcaq)}\, du + \\ &\quad + \frac{3}{2} k^2 U^{(p)} U^{(q)} \int_{u_1}^{u_2} (u_2-u)(u-u_1)^2 S_{(bcpqa)}\, du + O_2, \\ \Omega_{(a_2 b_2 c_2)} &= 3k^2 U^{(q)} \int_{u_1}^{u_2} (u-u_1)^2 S_{(abcq)}\, du + \\ &\quad + \frac{3}{2} k^2 U^{(p)} U^{(q)} \int_{u_1}^{u_2} (u-u_1)^3 S_{(abpqc)}\, du + O_2. \end{aligned} \tag{2.115}$$

Заметим, что во всех этих формулах, *за исключением третьей*, индексы a, b, c у символа S размещены в алфавитном порядке. В силу общего правила перестановок (§ 1) выписанные выше формулы позволяют вычислить *все* производные третьего порядка. Чтобы перейти от инвариантной формы к тензорной, достаточно ввести U-члены под знак интеграла и сделать следующие подстановк

$$U^{(q)} = U^i\lambda_i^{(q)}, \quad S_{(abcq)} = S_{ijkm}\lambda_{(a)}^i\lambda_{(b)}^j\lambda_{(c)}^k\lambda_{(d)}^m,$$
$$\lambda_{(a)i} = g_{ij_1}\lambda_{(a)}^{j_1} = g_{ij_2}\lambda_{(a)}^{j_2}, \quad \Omega_{(a_1b_1c_2)} = \Omega_{i_1j_1k_2}\lambda_{(a)}^{i_1}\lambda_{(b)}^{j_1}\lambda_{(c)}^{k_2} \quad \text{и т. д.} \tag{2.116}$$

При записи (2.112) мы использовали лишь первую и третью формулы из (2.95). Представляет интерес получить $\Omega_{(a_1b_2c_2)}$ из второго равенства (2.95) и убедиться, что в результате получается формула такого же вида, что и в (2.115).

Для вычисления ковариантных производных четвертого порядка нужно просто повторить описанную выше процедуру. В результате для *инвариантных компонент ковариантных производных четвертого порядка от мировой функции* Ω (P_1P_2) получим следующие формулы:

$$\begin{aligned}
\Omega_{(a_1b_1c_1d_1)} &= 3k^3\int_{u_1}^{u_2}(u_2-u)^2 S_{(abcd)}\,du - \\
&\quad - 3k^2U^{(q)}\int_{u_1}^{u_2}(u_2-u)^3\left(S_{(abcqd)} + S_{(abdqc)}\right)du + \\
&\quad + \frac{3}{2}k^3U^{(p)}U^{(q)}\int_{u_1}^{u_2}(u_2-u)^4 S_{(abpqcd)}\,du + O_2, \\
\Omega_{(a_1b_1c_1d_2)} &= -3k^3\int_{u_1}^{u_2}(u_2-u)^2 S_{(abcd)}\,du - \\
&\quad - 3k^3U^{(q)}\int_{u_1}^{u_2}(u_2-u)^2(u-u_1)S_{(abcqd)}\,du + 3k^3U^{(q)}\int_{u_1}^{u_2}(u_2-u)^3 S_{(abdqe)}\,du + \\
&\quad + \frac{3}{2}k^3U^{(p)}U^{(q)}\int_{u_1}^{u_2}(u^2-u)^3(u-u_1)S_{(abpqcd)}\,du + O_2, \\
\Omega_{(a_1b_1c_2d_2)} &= 3k^3\int_{u_1}^{u_2}(u_2-u)^2 S_{(abcd)}\,du + \\
&\quad + 3k^3U^{(q)}\int_{u_1}^{u_2}(u_2-u)^2(u-u_1)\left(S_{abcqd)} + S_{(abdqc)}\,du + \right. \\
&\quad + \frac{3}{2}k^3U^{(p)}U^{(q)}\int_{u_1}^{u_2}(u_2-u)^2(u-u_1)S_{(abpqcd)}\,du + O_2.
\end{aligned} \tag{2.117}$$

Достаточно выписать лишь приведенные формулы, так как все остальные получаются из них с помощью перестановок. Вид записанных нами выражений можно изменить посредством интегрирования по частям, однако это не дает никаких особых преимуществ. Любопытно отметить, что, согласно общему правилу перестановок (§ 1),

$$\Omega_{(a_1b_1c_2d_2)} = \Omega_{(c_2d_2a_1b_1)}. \tag{2.118}$$

Это означает, что последнее выражение в (2.117) не должно менять своей формы при перестановках

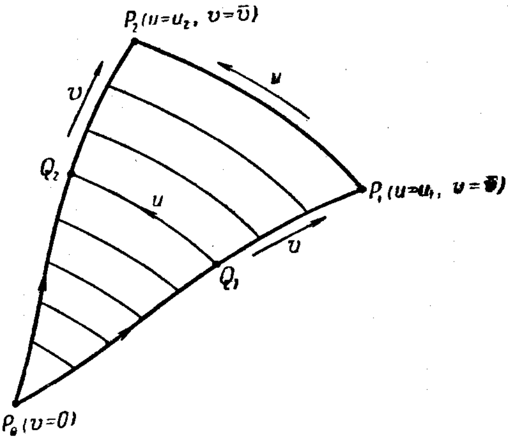
$$1 \longleftrightarrow 2, \quad a \longleftrightarrow c, \quad b \longleftrightarrow d, \tag{2.119}$$

что не очевидно с первого взгляда, но легко может быть установлено при учете свойств симметрии тензора S.

§ 6. Решение конечных геодезических треугольников в пространстве—времени с малой кривизной

Так же как при измерениях в евклидовом пространстве, основанных на трехмерной триангуляции (т. е. на решении треугольников, построенных с помощью прямых отрезков), при астрономических измерениях в пространстве — времени возникает необходимость в четырехмерной триангуляции и разрешении геодезических треугольников.

Некоторые из сторон этих треугольников могут оказаться изотропными геодезическими. Нижеследующее рассуждение включает и эти случаи, так как в понятие «геодезическая» входит и понятие «изотропная геодезическая». Действительно, поскольку мы пользуемся методом мировой функции, редко возникает необходимость рассматривать изотропные геодезические отдельно.



Фиг. 18. Решение геодезического треугольника конечных размеров.

При рассмотрении треугольников, построенных из геодезических линий, можно выделить два частных случая, когда без особого труда удается получить весьма важные результаты, именно: 1) случай, когда кривизна (тензор Римана мала); 2) случай, когда мал сам треугольник[1]).

Остановимся на рассмотрении конечного геодезического треугольника, предполагая, что тензор Римана мал (т. е. оставляя в силе допущения, сделанные в предыдущих расчетах).

Рассмотрим геодезический треугольник $P_0P_1P_2$ (фиг. 18). Пусть v — канонический параметр на P_0P_1 и P_0P_2, изменяющийся вдоль сторон треугольника между конечными значениями, одинаковыми для обеих геодезических ($v=0$ в точке P_0 и $v=\bar v$ в точках P_1 и P_2). Пусть Q_1 и Q_2 — текущие точки на каждой из геодезических, соответствующие одному и тому же значению v и пусть изображенная на фиг. 18 кривая Q_1Q_2 есть геодезическая. Множество таких геодезических (включающее, разумеется, и P_1P_2) образует двумерное пространство. Пусть u — канонический параметр на каждой из изображенных на фиг. 18 пересекающихся геодезических, пробегающий значения от $u=u_1$ на P_0P_1 и от $u=u_2$ на P_0P_2. В таком случае мы имеем двумерное пространство $x^i = x^i(u, v)$, причем все параметрические линии u — геодезические; две из параметрических линий v также геодезические, именно линии, для которых $u=u_1$

[1]) См. замечания относительно понятия малости в § 3.

и $u=u_2$. Полагая, как обычно, $U^i=\partial x^i/\partial u$, $V^i=\partial x^i/\partial v$, имеем

$$\frac{\delta U^i}{\delta v}=\frac{\delta V^i}{\delta u},\quad \frac{\delta U^i}{\delta u}=0, \tag{2.120}$$

$$U^i=0 \quad \text{для} \quad v=0,\quad \frac{\delta V^i}{\delta v}=0 \quad \text{для } u=u_1 \text{ и } u=u_2.$$

Мировая функция Q_1 и Q_2 зависит только от v, т. е. $\Omega(Q_1Q_2)=\Omega(v)$. Тогда

$$D_v\Omega=\Omega_{i_1}V^{i_1}+\Omega_{i_2}V^{i_2}, \tag{2.121}$$

где $D_v=d/dv$, а вторичные (численные) индексы при i соответствуют номеру точки (Q_1 или Q_2). Далее, в силу (2.120)

$$D_v^2\Omega=\Omega_{i_1j_1}V^{i_1}V^{j_1}+2\Omega_{i_1j_2}V^{i_1}V^{j_2}+\Omega_{i_2j_2}V^{i_2}V^{j_2}, \tag{2.122}$$

$$D_v^3\Omega=\Omega_{i_1j_1k_1}V^{i_1}V^{j_1}V^{k_1}+3\Omega_{i_1j_1k_2}V^{i_1}V^{j_1}V^{k_2}+$$
$$+3\Omega_{i_1j_2k_2}V^{i_1}V^{j_2}V^{k_2}+\Omega_{i_2j_2k_2}V^{i_2}V^{j_2}V^{k_2}. \tag{2.123}$$

$$D_v^4\Omega=\Omega_{i_1j_1k_1m_1}V^{i_1}V^{j_1}V^{k_1}V^{m_1}+$$
$$+4\Omega_{i_1j_1k_1m_2}V^{i_1}V^{j_1}V^{k_1}V^{m_2}+6\Omega_{i_1j_1k_2m_2}V^{i_1}V^{j_1}V^{k_2}V^{m_2}+$$
$$+4\Omega_{i_1j_2k_2m_2}V^{i_1}V^{j_2}V^{k_2}V^{m_2}+\Omega_{i_2j_2k_2m_2}V^{i_2}V^{j_2}V^{k_2}V^{m_2}. \tag{2.124}$$

Представим $\Omega(\bar v)$ при помощи формулы Тейлора с остаточным членом

$$\Omega(\bar v)=\Omega_0+\bar v(D_v\Omega)_0+\frac{1}{2}\bar v^2(D_v^2\Omega)_0+$$
$$+\frac{1}{6}\bar v^3(D_v^3\Omega)_0+\frac{1}{6}\int_0^{\bar v}(\bar v-v)^3D_v^4\Omega\,dv, \tag{2.125}$$

где индекс 0 означает, что соответствующая величина взята в точке $v=0$. С помощью пределов совпадения (2.69) и соотношений (2.121)—(2.123) имеем

$$\Omega_0=0,\quad (D_v\Omega)_0=0,\quad (D_v^3\Omega)_0=0, \tag{2.126}$$

а из (2.17) следует, что

$$\bar v^2(D_v^2\Omega)_0=\overrightarrow{P_0P_1}^2+\overrightarrow{P_0P_2}^2-2\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\overrightarrow{P_0P_2}, \tag{2.127}$$

где введены следующие обозначения:

$$\overrightarrow{P_0P_1}^2=2\Omega(P_0P_1),\quad \overrightarrow{P_0P_2}^2=2\Omega(P_0P_2), \tag{2.128}$$
$$\overrightarrow{P_0P_1}\cdot P_0P_2=\Omega_{i_0}(P_0P_1)\,\Omega^{i_0}(P_0P_2).$$

Такие обозначения весьма удобны. Однако использовать их нужно с некоторой осторожностью, так как Ω может быть отрицательной. Если бы мы решали задачу в пространстве с положительно определенной метрикой, то $\overrightarrow{P_0P_1}^2$ представляло бы собой квадрат расстояния по геодезической между точками P_0 и P_1, а $\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\overrightarrow{P_0P_2}$ — произведение расстояний P_0P_1 и P_0P_2, умноженное на косинус угла между направлениями этих двух отрезков.

С помощью введенных обозначений разложение (2.125) можно переписать в виде

$$\overrightarrow{P_1P_2}^2 = \overrightarrow{P_0P_1}^2 + \overrightarrow{P_0P_2}^2 - 2\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\overrightarrow{P_0P_2} + \varphi, \qquad (2.129)$$

где

$$\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{\bar{v}} (\bar{v} - v)^3 D_v^4\Omega\, dv. \qquad (2.130)$$

Член φ, представляющий собой трехточечный инвариант, играет весьма существенную роль в теории гравитации, так как он описывает отклонение пространства — времени от плоского. Если $\varphi = 0$, то формула (2.129) переходит в элементарную тригонометрическую формулу для пространства Минковского

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C. \qquad (2.131)$$

Для вычисления φ введем ОР $\lambda^i_{(a)}$, произвольным образом выбранный в точке P_0, и параллельно переносимый в пространстве — времени вдоль всех геодезических, проходящих через точку P_0. Переходя к компонентам вдоль этого ОР, мы можем записать (2.124) в виде

$$D_v^4\Omega = \Omega_{(a_1b_1c_1d_1)}V^{(a_1)}V^{(b_1)}V^{(c_1)} + V^{(d_1)} + $$
$$+ 4\Omega_{(a_1b_1c_1d_2)}V^{(a_1)}V^{(b_1)}V^{(c_1)}V^{(d_2)} + \ldots, \qquad (2.132)$$

где

$$\Omega = \Omega(Q_1Q_2), \qquad (2.133)$$

а векторы V постоянны. Вправе ли мы подставить сюда в качестве Ω-членов значения, полученные в (2.177)? Не совсем точно, так как, применяя формулы (2.177), следует брать ОР с параллельным переносом вдоль Q_1Q_2 (см. фиг. 18), а не вдоль геодезических, исходящих из P_0. Но легко убедиться, что с точностью до принятого приближения Ω-члены, определенные формулами (2.117), можно подставлять в (2.132), поскольку вносимая при этом погрешность имеет порядок малости O_2.

В результате такой подстановки, вследствие свойств кососимметричности тензора Римана, входящего в S-члены, ряд членов исчезает. Действительно, после свертки по любым трем из четырех впереди стоящих индексов с компонентами $V^{(a_1)}$ или $V^{(a_2)}$ все S-члены обращаются в нуль. Так, например,

$$S_{(abcqd)}V^{(a_1)}V^{(b_1)}V^{(c_1)} = 0. \qquad (2.134)$$

Чтобы представить окончательный результат в простом виде, будем пользоваться обозначениями, смысл которых вполне ясен из следующих примеров[1]):

$$[1122] = S_{(abcd)}V^{(a_1)}V^{(b_1)}V^{(c_1)}V^{(d_2)} = [2211], \qquad (2.135)$$

$$[112U2] = S_{(abcqd)}V^{(a_1)}V^{(b_1)}V^{(c_2)}\; u^{(q)}V^{(d_2)}.$$

Результат можно сформулировать следующим образом: *для любого геодезического треугольника* (см. фиг. 18) *в пространстве — времени с малой*

---

[1]) Эти величины берутся в произвольной точке $Q(u, v)$ на Q_1Q_2, причем S и U вычисляются в точке Q, а векторы V — в точках Q_1 и Q_2.

кривизной (O_1) *мы имеем формулу* (2.129), *где* φ *определяется соотношением*

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + O_2,$$

$$\varphi_0 = 3k^3 \int_0^{\bar{v}} \int_{u_1}^{u_2} (\bar{v} - \bar{v})^3 \{(u_2 - u)^2 + (u - u_1)^2\} [1122]\, du\, dv,$$

$$\varphi_1 = 2k^3 \int_0^{\bar{v}} \int_{u_1}^{u_2} (\bar{v} - v)^3 \{2(u_2 - u)^3 [112U1] +$$
$$+ 3(u_2 - u)^2 (u - u_1) [112U2] - 3(u_2 - u)(u - u_1)^2 [22U1] -$$
$$- 2(u - u_1)^3 [221U2]\}\, du\, dv, \qquad (2.136)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} k^3 \int_0^{\bar{v}} \int_{u_1}^{u_2} (\bar{v} - v)^3 \{(u_2 - u)^4 [11UU11] +$$
$$+ 4(u_2 - u)^3 (u - u_1) [11UU12] +$$
$$+ 3(u_2 - u)^2 (u - u_1)^2 ([11UU22] + [22UU11] +$$
$$+ 4(u_2 - u)(u - u_1)^3 [22UU21] +$$
$$+ (u - u_1)^4 [22UU22]\}\, du\, dv,$$
$$k^{-1} = u_2 - u_1.$$

Три части, из которых состоит φ-член, включают сам тензор Римана и его первые и вторые ковариантные производные соответственно.

Мы вернемся к формулам (2.136) после введения квазидекартовых координат (см. § 8).

§ 7. Решение бесконечно малых геодезических треугольников

В предыдущем параграфе мы имели дело с конечным геодезическим треугольником в пространстве — времени малой кривизны. Рассмотрим теперь бесконечно малый геодезический треугольник, не делая никаких предположений относительно кривизны пространства — времени. Последняя может быть конечной.

Пусть P_0 (фиг. 19) — произвольная точка в пространстве — времени, а Γ_1 и Γ_2 — две произвольные геодезические, выходящие из P_0. Пусть v — канонический параметр на Γ_1 и Γ_2, такой, что $v = 0$ в точке P_0, а P_1 и P_2 — некоторые точки на Γ_1 и Γ_2 соответственно, причем в каждой из этих точек значение v одно и то же. Тогда мировая функция $\Omega(P_1P_2)$ зависит только от v. Разложим ее в ряд[1])

$$\Omega(P_1P_2) = \Omega(v) = \Omega_0 + v(D_v\Omega)_0 +$$
$$+ \frac{1}{2} v^2 (D_v^2\Omega)_0 + \frac{1}{6} v^3 (D_v^3\Omega)_0 + \frac{1}{24} v^4 (D_v^4\Omega_0) + O_5, \qquad (2.137)$$

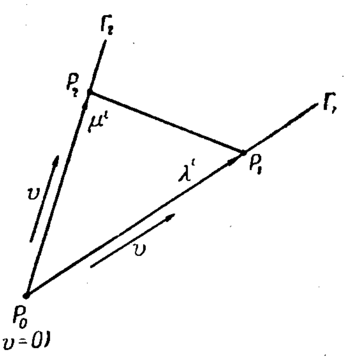
где индекс 0 означает, что соответствующие величины берутся в точке $v = 0$, а O_5 указывает, что порядок малости невыписанных в явном виде

[1]) Если бы мы стремились к более высокой математической точности, то следовало бы подставить вместо O_5 интегральный остаточный член [как, например, в (2.125)]. Но здесь мы следуем другому методу приближения, основанному не на малости тензора Римана, а на малости v.

членов характеризуется пятой степенью v. Производные Ω в точности совпадают с выражениями (2.121)—(2.124), причем V^{i_1} и V^{i_2} — касательные векторы dx^i/dv на Γ_1, и Γ_2 соответственно.

Удобно положить

$$\lambda^i = v\,(V^{i_1})_0,\qquad \mu^i = v\,(V^{i_2})_0. \tag{2.138}$$



Фиг. 19. Решение бесконечно малого геодезического треугольника.

При $v=0$ точки P_1 и P_2 совпадают с P_0 и можно воспользоваться пределами совпадения (2.69). Таким образом, если все величины вычислены в точке P_0, находим[1])

$$\Omega(P_1P_2) = \Omega(v) = \frac{1}{2}(\lambda_i - \mu_i)(\lambda^i - \mu^i) + \frac{1}{4} S_{ijkm}\lambda^i\lambda^j\mu^k\mu^m + O_5. \tag{2.139}$$

Используя (2.2) и (2.17) и применяя те же обозначения, что и в (2.128), имеем

$$\begin{aligned} \lambda_i\lambda^i &= 2\Omega(P_0P_1) = \overrightarrow{P_0P_1}^2,\\ \mu_i\mu^i &= 2\Omega(P_0P_2) = \overrightarrow{P_0P_2}^2,\\ \lambda_i\mu^i &= \Omega_{i_0}(P_0P_1)\,\Omega^{i_0}(P_0P_2) = \overrightarrow{P_0P_1}\cdot\overrightarrow{P_0P_2}. \end{aligned} \tag{2.140}$$

Таким образом, формулу (2.139) можно записать в виде

$$\overrightarrow{P_1P_2}^2 = \overrightarrow{P_0P_1}^2 + \overrightarrow{P_0P_2}^2 - 2\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\overrightarrow{P_0P_2} + \psi + O_5, \tag{2.141}$$

где в силу (2.48) и (1.99)

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2} S_{ijkm}\lambda^i\lambda^j\mu^k\mu^m = -\frac{1}{3} R_{ijkm}\lambda^i\mu^j\lambda^k\mu^m = -\frac{1}{3} K\left(\lambda^i\lambda_i\mu^j\mu_j - (\lambda^i\mu_i)^2\right) = \\ &= -\frac{1}{3} K\left(\overrightarrow{P_0P_1}^2\cdot\overrightarrow{P_0P_2}^2 - (\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\overrightarrow{P_0P_2})^2\right). \end{aligned} \tag{2.142}$$

Здесь K — риманова кривизна пространства—времени, связанная с произвольным двумерным элементом бесконечно малого треугольника $P_0P_1P_0$.

Поскольку ψ имеет порядок малости O_4, допустимо рассматривать треугольник так, как если бы пространство—время было плоским. Обусловленные этим погрешности имеют порядок малости O_5. Так как три изотропных линии в плоском пространстве не могут образовать треугольник, то по крайней мере одна из сторон $P_0P_1P_2$ неизотропна. Пусть ε — индикатор этой неизотропной стороны треугольника, а ε' — индикатор перпендикуляра к этой стороне, опущенного из противоположной вершины. Тогда, как легко показать, для любого геодезического треугольника в плоском пространстве—времени

$$\overrightarrow{P_0P_1}^2\cdot\overrightarrow{P_0P_2}^2 - (\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\overrightarrow{P_0P_2})^2 = 4\varepsilon\varepsilon'\Delta^2, \tag{2.143}$$

где Δ означает двумерную площадь треугольника. Таким образом,

[1]) В пределе совпадения для выражения (2.124) все члены, за исключением одного, обращаются в нуль вследствие кососимметричности тензора Римана.

для бесконечно малого геодезического треугольника справедлива следующая формула:

$$\overrightarrow{P_1P_2}^2=\overrightarrow{P_0P_1}^2+\overrightarrow{P_0P_2}^2-2\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\overrightarrow{P_0P_2}-\frac{4}{3}K\varepsilon\varepsilon'\Delta^2+O_5 \qquad (2.144)$$

или, что равносильно,

$$\Omega(P_1P_2)=\Omega(P_0P_1)+\Omega(P_0P_2)-$$
$$-\Omega_{i_0}(P_0P_1)\,\Omega^{i_0}(P_0P_2)-\frac{2}{3}K\varepsilon\varepsilon'\Delta^2+O_5. \qquad (2.145)$$

Любопытно сравнить формулу (2.129) (треугольник конечных размеров, кривизна малая) с формулой (2.141) (бесконечно малый треугольник, конечная кривизна). Первые три члена в правых частях обеих формул одинаковы, но на месте φ в (2.129) мы имеем ψ в (2.141). Чтобы проверить, существует ли между этими формулами соответствие, допустим, что треугольник, соответствующий (2.129), становится малым. Это эквивалентно требованию, чтобы в формулах (2.136) $u_2\to u_1$; тогда φ_1 и φ_2 исчезают, а φ_0, как мы сразу же убеждаемся, сводится к ψ [явный вид ψ задается с помощью S-тензора формулой (2.142)].

§ 8. Квазидекартовы координаты

В плоском пространстве — времени координаты можно выбрать таким образом, чтобы во всем пространстве — времени метрический тензор имел вид

$$g_{ij}=\eta_{ij}=\mathrm{diag}(1,\ 1,\ 1,\ -1), \qquad (2.146)$$

а мировая функция записывалась в виде

$$\Omega(x',\ x)=\frac{1}{2}\eta_{ij}(x^{i'}-x^i)(x^{j'}-x^j). \qquad (2.147)$$

Если пространство — время мало отличается от плоского (тензор кривизны мал), естественно допустить существование таких координат, что

$$g_{ij}=\eta_{ij}+\gamma_{ij}, \qquad (2.148)$$

где γ_{ij} и его производные малы. В общей теории относительности этот прием широко применяется. Однако существуют неясности в связи с вопросом о классе координат, для которых такое приближение имеет смысл[1]). Мы подойдем к этому вопросу другим, более определенным путем.

Пусть P_0 (фиг. 20) — произвольная точка пространства — времени, а $\lambda^i_{(a)}$ — ортонормированный 4-репер ОР в P_0. Будем называть P_0 *началом*, а 4-репер — *векторным базисом*. Пусть P — какая-нибудь другая точка, такая, что существует единственная геодезическая P_0P, а v — канонический параметр на этой геодезической, принимающий значения $v=0$ в точке P_0 и $v=\bar v$ в точке P. В таком случае существует вектор $\bar v(dx^i/dv)$, касательный к данной геодезической в P_0. Обозначим его контравариантные компоненты [см. (1.54)] в векторном базисе следующим образом:

$$\overline{X}^{(a)}=\bar v\left(\frac{dx^i}{dv}\right)_{P_0}\lambda_i^{(a)}. \qquad (2.149)$$

[1]) В евклидовой геометрии кривизна сферы большого радиуса мала. Однако не существует координатной системы, покрывающей всю сферу, для которой формула, подобная (2.148), была бы справедлива с малыми $\gamma_{\mu\nu}$ во всех точках сферы. Для этого пришлось бы использовать огромное число перекрывающихся систем координат.

Вследствие (2.17) эти компоненты (как ковариантные, так и контравариантные) можно выразить также и через производные от мировой функции $\Omega\ (P_0P)$:

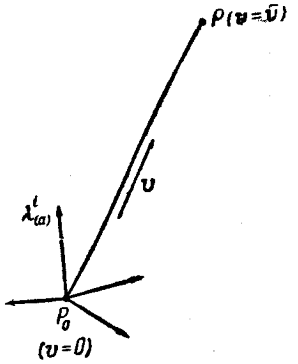
$$X_{(a)} = -\Omega_{i_0}(P_0P)\,\lambda^i_{(a)},$$
$$X^{(a)} = -\Omega^{i_0}(P_0P)\,\lambda^{(a)}_i. \qquad (2.150)$$

Это двухточечные инварианты относительно произвольных преобразований координат. Назовем их *квазидекартовыми координатами*[1]) (коротко КД-координатами) *точки P относительно начала P_0 и векторного базиса $\lambda^i_{(a)}$*. Легко убедиться, что

$$X^{(a)}X_{(a)} = 2\Omega\,(P_0P) = \varepsilon L^2, \qquad (2.151)$$

где ε — индикатор P_0P, а L — мера P_0P. Для пары точек P_1, P_2 находим[2])

$$X^{(a_1)}X_{(a_2)} = \Omega_{i_0}(P_0P_1)\,\Omega^{i_0}(P_0P_2). \qquad (2.152)$$



Ф и г. 20. Начало P_0 и базисный вектор $\lambda^i_{(a)}$ для квазидекартовых координат.

В обычной геометрии замена начала координат тривиальна, эффекты же вращения осей наоборот, более хитроумны: при этом появляются ортогональные матрицы, эйлеровы углы и т. д. С другой стороны, в искривленном пространстве изменения векторного базиса относительно тривиальны (сводятся просто к преобразованию Лоренца), а замена начала — значительно более тонкая операция. Отложив обсуждение вопроса о замене начала до § 9, можно следующим образом вкратце описать процедуру перехода от одного векторного базиса $\lambda^i_{(a)}$ к другому $\mu^i_{(a)}$. Пусть X и Y относятся к соответствующим КД-координатам некоторой точки P. Тогда в силу (1.52) получаем

$$Y_{(b)} = L^{(a)}_{\cdot b}X_{(a)}, \quad Y^{(b)} = \eta^{(bc)}L^{(a)}_{\cdot c}\eta_{(ad)}X^{(d)}, \qquad (2.153)$$

где

$$L^{(a)}_{\cdot b} = \lambda^{(a)}_i\mu^i_{(b)} \qquad (2.154)$$

есть лоренцова матрица, аналогичная той, которая фигурирует в формуле (1.51).

Преимущество обычных векторных обозначений, принятых в ньютоновой физике, состоит в том, что они позволяют абстрагироваться от осей, относительно которых должны браться компоненты вектора. Мы мыслим $\overrightarrow{PQ}$ как некий геометрический объект, как вещь в себе. При соблюдении некоторых предосторожностей можно, подобным же образом, представить себе смещение от точки P_0 к точке P_1 в пространстве — времени как некую вещь в себе, не заботясь о векторном базисе, используемом в (2.150). Таким образом, мы смело записываем $\overrightarrow{P_0P}$, как символ

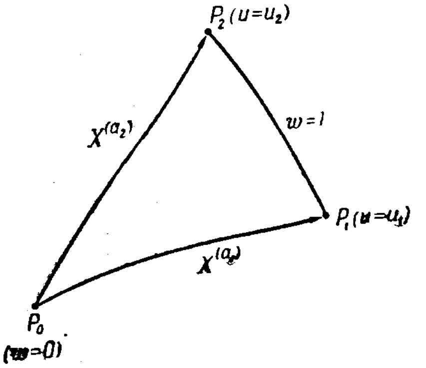
[1]) Они известны также под названием *нормальных координат*, но их значимость оправдывает и более подчеркивающее название.

[2]) Такое компактное обозначение не должно служить причиной недоразумений. Величины $X^{(a_1)}$ и $X_{(a_2)}$ определяются формулами (2.150) при подстановке в ней вместо P точек P_1 и P_2 соответственно, причем по индексу Лоренца a проводится суммирование. Если КД-координаты точки P_1 обозначить через $X^{(a)}$, а точки P_2 — через $Y_{(a)}$, то левая часть (2.152) будет иметь вид $X^{(a)}Y_{(a)}$.

для обозначения $X^{(a)}$ или $X_{(a)}$. Этот способ обозначений превосходно согласуется с уже введенным в (2.128), ибо мы имеем при этом

$$\overrightarrow{P_0P}^2 = X^{(a)}X_{(a)}, \quad \overrightarrow{P_0P_1}\cdot\overrightarrow{P_0P_2} = X^{(a_1)}X_{(a_2)}, \tag{2.155}$$

что следует из (2.151) и (2.152). Эти величины, очевидно, не зависят от векторного базиса, так как в (2.151) и (2.152) последний не фигурирует.



Фиг. 21. Геодезический треугольник конечных размеров и квазидекартовы координаты.

Вернемся к конечному геодезическому треугольнику, обсуждению которого был посвящен § 6, и дадим его решение с помощью КД-координат. Выбирая в качестве начала КД-координат точку P_0 (фиг. 21), можно записать формулу (2.129) в виде

$$\overrightarrow{P_1P_2}^2 = \xi^{(a)}\xi_{(a)} + \varphi, \tag{2.156}$$

где[1])

$$\xi^{(a)} = X^{(a_2)} - X^{(a_1)}, \tag{2.157}$$

а φ определяется выражением (2.136) в обозначениях (2.135). Мы должны теперь положить

$$\bar{v}V^{(a_1)} = X^{(a_1)}, \quad \bar{v}V^{(a_2)} = X^{(a_2)}. \tag{2.158}$$

Далее, как легко видеть, в данном приближении для φ мы можем представить себе треугольник как лежащий в плоском пространстве и положить

$$U^{(a)} = \left(\frac{v}{\bar{v}}\right)\xi^{(a)}. \tag{2.159}$$

Изменим обозначения в (2.135), записывая[2])

$$\begin{aligned} \{1122\} &= S_{(abcd)}X^{(a_1)}X^{(b_1)}X^{(c_2)}X^{(d_2)} = \{2211\}, \\ \{11222\} &= S_{(abcde)}X^{(a_1)}X^{(b_1)}X^{(c_2)}X^{(d_2)}X^{(e_2)} = \{22112\}, \end{aligned} \tag{2.160}$$

и т. д. Тогда, полагая $v/\bar{v} = w$, найдем, что решение конечного геодезического треугольника в пространстве — времени малой кривизны имеет вид

$$\begin{gathered} \overrightarrow{P_1P_2}^2 = \xi^{(a)}\xi_{(a)} + \varphi, \\ \varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + O_2, \end{gathered}$$

$$\varphi_0 = 3k^3 \int_0^1 (1-w)^3\,dw \int_{u_1}^{u_2} [(u_2-u)^2 + (u-u_1)^2]\{1122\}\,du,$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 = 2k^3 \int_0^1 w(1-w)^3\,dw \int_{u_1}^{u_2} [2(u_2-u)^3\{11221\} + 3(u_2-u)^2(u-u_1)\{11222\} + \\ + 3(u_2-u)(u-u_1)^2\{22111\} + 2(u-u_1)^3\{22112\}]\,du, \end{aligned} \tag{2.161}$$

---

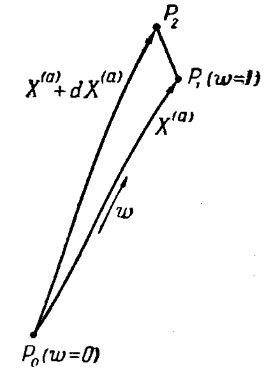
[1]) *Не следует* писать $\overrightarrow{P_1P_2}$ для $\xi^{(a)}$. Это была бы непоправимая ошибка.

[2]) Любой из этих символов обращается в нуль, если среди первых четырех цифр три или четыре цифры совпадают. Это связано со свойством кососимметричности тензора Римана.

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} k^3 \int_0^1 w^2 (1-w)^3 \, dw \int_{u_1}^{u_2} [(u_2-u)^4 \{112211\} +$$
$$+ 4(u_2-u^3)(u-u_1)\{112212\} + 3(u_2-u)^2(u-u_1)^2(\{112222\} + \{221111\}) +$$
$$+ 4(u_2-u)(u-u_1)^3\{221121\} + (u-u_1)^4\{221122\}] \, du,$$
$$k^{-1} = u_2 - u_1.$$

Существуют другие, эквивалентные формы записи этих формул. В силу симметрии S-тензора первые четыре индекса 1122 можно заменить на 2211. Далее, до тех пор пока не нарушены границы точного приближения, ковариантные производные в φ можно рассматривать как частные, и, следовательно, можно переставить две последние цифры шестииндексного символа. Например,

$$\{1122\} = \{2211\}, \; \{11221\} = \{22111\},$$
$$\{112212\} = \{112221\} + O_2. \qquad (2.162)$$



Фиг. 22. Выражение метрики через тензор Римана.

Теперь будем искать приближенное выражение метрического тензора в КД-координатах для пространства — времени с малой кривизной. Этот результат можно было бы получить из выражений (2.161), устремляя u_2 к u_1 так, чтобы треугольник $P_0P_1P_2$ сделался очень «узким» (см. фиг. 22).

Однако лучше снова вернуться к уравнению (2.91), приведя обозначения в соответствие с фиг. 18 (переставив u и v). Если обозначить через $\bar{u}$ бесконечно малое приращение u при переходе от P_0P_1 к P_1P_2, то КД-координаты точек P_1 и P_2 можно записать в виде $X_{(a)}$ и $X_{(a)} + dX_{(a)}$ соответственно, где

$$X_{(a)} = \bar{v} V_{(a_0)}, \quad dX_{(a)} = \bar{v}\bar{u} \frac{\partial}{\partial u} V_{(a_0)}. \qquad (2.163)$$

Применяя эти формулы к изображенным на фиг. 18 геодезическим P_0P_1, P_0P_2, тесно примыкающим одна к другой (см. фиг. 22), с помощью (2.91) получаем

$$\frac{\partial}{\partial u} V_{(a_0)} = \bar{v}^{-1} U_{(a_2)} + \bar{v}^{-2} V^{(b)} U^{(c_2)} V^{(d)} \int_0^{\bar{v}} v(\bar{v}-v) R_{(abcd)} \, dv + O_2. \qquad (2.164)$$

После умножения на $\bar{u}\bar{v}$ эту формулу можно записать в виде

$$\bar{u} U_{(a_2)} = dX_{(a)} - X^{(b)} \, dX^{(c)} X^{(d)} \int_0^1 w(1-w) R_{(abcd)} \, dw + O_2, \qquad (2.165)$$

где введено обозначение $w = v/\bar{v}$. Следовательно, *метрическая форма пространства — времени в квазидекартовых координатах имеет вид*

$$\Phi = \bar{u}^2 U_{(a_2)} U^{(a_2)} = g_{(ab)} \, dX^{(a)} \, dX^{(b)}, \qquad g_{(ab)} = \eta_{(ab)} + \gamma_{(ab)}, \qquad (2.166)$$
$$\gamma_{(ab)} = -2X^{(c)} X^{(d)} \int_0^1 w(1-w) R_{(acbd)} \, dw + O_2.$$

В частном случае, когда пространство — время характеризуется малой постоянной кривизной K, имеем

$$R_{(acbd)} = K(\eta_{(ab)}\eta_{(cd)} - \eta_{(ad)}\eta_{(cb)}), \qquad (2.167)$$

и, следовательно,

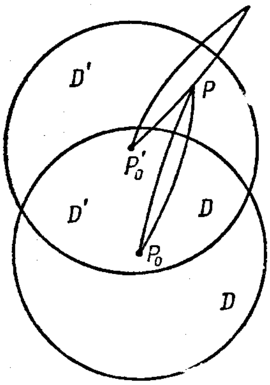
$$\gamma_{(ab)} = \frac{1}{3} K (X_{(a)} X_{(b)} - \eta_{(ab)} X^{(c)} X_{(c)}) + O_2. \qquad (2.167a)$$

В начале КД-координат в силу (2.166) будет

$$g_{(ab)} = \eta_{(ab)}, \quad \frac{\partial g_{(ab)}}{\partial X^{(c)}} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 g_{(ab)}}{\partial X^{(c)} \partial X^{(d)}} = -2 (R_{(acbd)} + R_{(adbc)}) \int_0^1 w (1 - w)\, dw = S_{(abcd)}. \qquad (2.168)$$

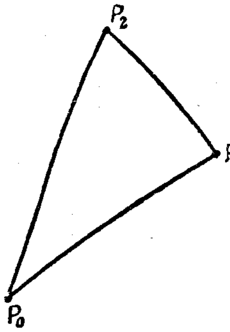
§ 9. Изменение начала квазидекартовых координат

Для построения квазидекартовых координат (КД) методом, предложенным в § 8, необходимо, чтобы геодезическая, связывающая начало P_0 с текущей точкой P, была единственной. Если существуют две или более геодезических, связывающих эти точки, то все построение оказывается безуспешным, и, следовательно, весь метод приближенного рассмотрения геодезического отклонения в том виде, в каком мы его изложили, рушится. Далее, если указанное выше требование выполняется, то все целиком пространство — время можно покрыть единой системой квазидекартовых координат (это наверняка возможно, если пространство — время плоское); однако чтобы справиться с физическими ситуациями, возникающими в действительности, желательно предположить, что геодезические, выходящие из P_0, могут пересекаться [1]). Однако будет существовать некоторая область D, содержащая точку P_0 такая, что выходящие из P_0 геодезические в D не пересекаются, причем в ней можно построить КД-координаты (фиг. 23).



Фиг. 23. Продолжение квазидекартовых координат.

Чтобы продолжить эти КД-координаты, выберем в D другую точку (назовем ее P'_0) и используем последнюю в качестве начала новых КД-координат в области D'. Таким способом можно продолжать КД-координаты как угодно далеко. Постараемся теперь отыскать формулы для преобразований КД-координат, соответствующих изменению начала координат. Как отмечалось ранее, в случае плоского пространства это преобразование тривиально. Когда же пространство искривлено, вопрос существенно усложняется.



Фиг. 24. Перенос начала квазидекартовых координат из точки P_0 в точку P_1.

Пусть P_0 и P_1 — начала двух систем КД-координат (фиг. 24), а P_2 — текущая точка, лежащая в области, где применимы обе эти системы. Во избежание какой-либо неоднозначности запишем вполне определенно:

КД-координаты точки P_0 относительно

$$P_1 = X_{(a)} (\overrightarrow{P_1 P_0}) = -\Omega_{i_1} (P_1 P_0) \lambda^{i_1}_{(a)},$$

КД-координаты точки P_2 относительно

$$P_0 = X_{(a)} (\overrightarrow{P_0 P_2}) = -\Omega_{i_0} (P_0 P_2) \lambda^{i_0}_{(a)}, \qquad (2.169)$$

[1]) Это означает, что здесь мы сталкиваемся с наличием сопряженных точек (см. гл. II, § 3).

КД-координаты точки P_2 относительно

$$P_1 = X_{(a)}(\overrightarrow{P_1P_2}) = -\Omega_{i_1}(P_1P_2)\lambda^{i_1}_{(a)}.$$

Так как процесс замены векторного базиса тривиален (он сводится просто к преобразованию Лоренца), будем, для простоты, предполагать, что $\lambda^{i_0}_{(a)}$ параллельны (вдоль P_0P_1) $\lambda^{i_1}_{(a)}$, так что с помощью оператора параллельного переноса можно записать

$$\lambda_{(a)i_0} = g_{i_0j_1}\lambda^{j_1}_{(a)}. \qquad (2.170)$$

Тогда с помощью (2.169) получаем

$$X_{(a)}(\overrightarrow{P_1P_2}) - X_{(a)}(\overrightarrow{P_1P_0}) - X_{(a)}(\overrightarrow{P_0P_2}) = \theta_{(a)}, \qquad (2.171)$$

где

$$\theta_{(a)} = \lambda^{j_1}_{(a)}[-\Omega_{j_1}(P_1P_2) + \Omega^{i_0}(P_0P_2)g_{i_0j_1} + \Omega_{j_1}(P_1P_0)]. \qquad (2.172)$$

Определим двухточечный тензор $h_{i_0j_1}$ соотношением

$$h_{i_0j_1} = g_{i_0j_1} + \Omega_{i_0j_1}(P_0P_1), \qquad (2.173)$$

и трехточечный инвариант χ соотношением

$$\chi = \Omega(P_1P_2) - \Omega(P_0P_1) - \Omega(P_0P_2) + \Omega_{i_0}(P_0P_1)\Omega^{i_0}(P_0P_2), \qquad (2.174)$$

так что при дифференцировании по P_1

$$\chi_{j_1} = \Omega_{j_1}(P_1P_2) - \Omega_{j_1}(P_0P_1) + \Omega_{i_0j_1}(P_0P_1)\Omega^{i_0}(P_0P_2). \qquad (2.175)$$

Тогда (2.172) можно записать в виде

$$\theta_{(a)} = \lambda^{j_1}_{(a)}[-\chi_{j_1} + h_{i_0j_1}\Omega^{i_0}(P_0P_2)]. \qquad (2.176)$$

Эту величину следует подставить в соотношение (2.171), которое можно записать в виде равенства

$$X_{(a)}(\overrightarrow{P_1P_2}) = X_{(a)}(\overrightarrow{P_1P_0}) + X_{(a)}(\overrightarrow{P_0P_2}) + \theta_{(a)}, \qquad (2.177)$$

определяющего *закон преобразования квазидекартовых координат при переносе начала из P_0 в P_1.*

Значение этой формулы заключается в том, что мы фактически приближенно вычислили $\theta_{(a)}$ для пространства — времени с малой кривизной. Так, после соответствующей замены обозначений из (2.95) получаем

$$h_{i_0j_1} = \frac{3}{2}X^{(c)}(\overrightarrow{P_0P_1})X^{(d)}(\overrightarrow{P_0P_1})\int_0^1 v(1-v)S_{(i_1cd)}\,dv + O_2, \qquad (2.178)$$

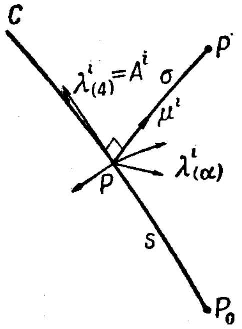
где интегрирование по каноническому параметру v, принимающему в точках P_0 и P_1 значения нуль и единица соответственно, проводится вдоль P_0P_1. Что касается χ, то, сравнивая (2.174) с (2.161), находим

$$\chi = \frac{1}{2}\varphi + O_2, \qquad (2.179)$$

где величина φ определяется сложными формулами (2.161), интерпретация которых значительно облегчается при использовании фиг. 21.

§ 10. Координаты Ферми и оптические координаты

Рассмотренные в предыдущем параграфе квазидекартовы координаты зависят от выбора начала и векторного базиса, а при рассмотрении физических проблем выбор подходящего начала — вопрос не тривиальный. Кроме того, мы убедились, что если замена векторного базиса не составляет никакого труда, то перенос начала координат сопряжен со значительными трудностями. С физической точки зрения удобнее пользоваться координатами, связанными не с отдельной точкой, а с временноподобной кривой[1]).



Фиг. 25. Координаты Ферми, отнесенные к временноподобной базисной линии C.

Пусть C — временноподобная кривая, а P_0 — некоторая точка на этой кривой (фиг. 25). Пусть $\lambda^i_{(\alpha)}$ — ортонормированный 4-репер (ОР), переносимый вдоль кривой C посредством переноса Ферми — Уолкера, причем $\lambda^i_{(4)}$ — вектор, касательный к кривой C. Пусть A^i, B^i и b будут соответственно единичным вектором, касательным к кривой C, первой единичной нормалью к ней и ее первой кривизной, так что аналогично (1.84)

$$\frac{\delta}{\delta s}\lambda^i_{(\alpha)}=bA^i\lambda^j_{(\alpha)}B_j,\quad \lambda^i_{(4)}=A^i, \qquad (2.180)$$

где греческие индексы, как обычно, принимают значения 1, 2, 3, а s здесь представляет собой меру кривой C от точки P_0 до текущей точки. Пусть P' — некоторая точка в пространстве — времени, такая, что через нее можно провести единственную геодезическую, пересекающую кривую C, скажем, в точке P и ортогональную к ней в точке пересечения. Пусть s и σ — меры отрезков P_0P и PP' соответственно, а μ^i — единичный вектор, касательный к отрезку PP' в точке P (PP', разумеется, пространственноподобен, так как он ортогонален к временноподобной кривой C). Определим теперь *контравариантные координаты Ферми*[2]) (кратко, КФ) *точки P' относительно базисной линии C с помощью соотношений*

$$X^{(\alpha)}=\sigma\mu^i\lambda^{(\alpha)}_i,\quad X^{(4)}=s, \qquad (2.181)$$

а *ковариантные* КФ соотношениями

$$\begin{aligned} X_{(\alpha)}&=\eta_{(\alpha b)}X^{(b)}=X^{(\alpha)},\\ X_{(4)}&=\eta_{(4b)}X^{(b)}=-X^{(4)}. \end{aligned} \qquad (2.182)$$

Мы видим, что для первых трех координат контравариантная и ковариантная формы совпадают, тогда как для четвертой координаты переход от одной формы к другой сопряжен с изменением знака.

КФ представляют собой *двухточечные инварианты, связанные с кривой*. Другими словами, это инварианты, определенные (в данном пространстве — времени) двумя точками P' и P_0 и кривой C. Последняя может быть и геодезической, но в общем случае это не обязательно.

---

[1]) На языке физики временноподобная кривая — это «история» (или мировая линия) наблюдателя. Как мы увидим в последующих главах, математические рассуждения настоящего параграфа тесно связаны с физическим опытом.

[2]) Термин «координаты Ферми» иногда употребляется в другом смысле, а именно для обозначения таких координат, для которых символы Кристоффеля обращаются в нуль на некоторой кривой или в каком-либо другом подпространстве (Ферми [324], О'Райфертай [840]).

При переходе от одной базисной линии к другой КФ преобразуются весьма сложным образом. Эту сторону вопроса мы здесь не будем пытаться обсуждать. Если же базисную линию не заменять, а просто смещать точки P_0 вдоль этой линии, то закон преобразования КФ становится тривиальным (к $X^{(4)}$ прибавляется постоянная). Преобразование выглядит очень просто и в том случае, когда заменяется 3-репер $\lambda^i_{(\alpha)}$, так как последний можно подвергнуть лишь вращению с *постоянными* коэффициентами:

$$\overline{\lambda}^i_{(\alpha)} = H^{\beta}_{(\alpha)}\lambda^i_{(\beta)}, \quad H^{(\beta)}_{(\alpha)}H^{(\beta)}_{(\gamma)} = \delta_{\alpha\gamma}. \tag{2.183}$$

Соответствующее преобразование для X_α выглядит следующим образом:

$$\overline{X}_{(\alpha)} = H^{(\beta)}_{(\alpha)}X_{(\beta)}. \tag{2.184}$$

при неизменном $X^{(4)}$.

Сравнивая (2.18) и (2.181), мы видим, что первые три ковариантные КФ можно точно выразить через мировую функцию $\Omega(PP')$:

$$X_{(\alpha)} = -\Omega_i(PP')\,\lambda^i_{(\alpha)}. \tag{2.185}$$

Мы имеем

$$X_{(\alpha)}X^{(\alpha)} = 2\Omega(PP') = \sigma^2. \tag{2.186}$$

Если обозначать черточкой сверху значение величины в случае, когда в качестве системы координат используются контравариантные КФ ($X^{(\alpha)} = \overline{x}^{(\alpha)}$), то

$$\overline{\lambda}^i_{(\alpha)} = \delta^i_\alpha, \quad \overline{A}^\alpha = 0, \quad \overline{A}^4 = 1. \tag{2.187}$$

Учитывая, что кривая PP' — геодезическая, и используя (2.180) и (1.55 а), легко доказать, что на кривой C выполняются следующие равенства [в обозначениях (1.45)]:

$$\overline{g}_{ij} = \eta_{ij}, \quad \overline{\Gamma}^i_{\alpha\beta} = 0, \quad \overline{\Gamma}^\alpha_{\beta 4} = 0, \quad \overline{\Gamma}^4_{\alpha 4} = \overline{\Gamma}^\alpha_{44}, \quad \overline{\Gamma}^4_{44} = 0. \tag{2.188}$$

В частности, если окажется, что C — геодезическая, то на C

$$\overline{g}_{ij} = \eta_{ij}, \quad \overline{g}_{ij,k} = 0, \quad \overline{\Gamma}^i_{jk} = 0, \tag{2.188a}$$

где запятая в индексе означает частную производную.

С геометрической точки зрения рассмотренные выше координаты Ферми являются простейшими из координат, которые можно определить с помощью временноподобной базисной линии C. Однако с физической точки зрения пространственноподобная геодезическая PP' — вещь несколько искусственная и с этой точки зрения выгоднее исходить из другого построения, заменив пространственноподобную геодезическую изотропной.

На фиг. 26 показана временноподобная кривая C. Точка P_0 на этой кривой служит началом отсчета меры s. Пусть $\lambda^i_{(\alpha)}$ — какой-нибудь ОР, претерпевающий вдоль C перенос Ферми—Уолкера, причем $\lambda^i_{(4)} = A^i$ — единичный вектор, касательный к кривой C, как это показано на фиг. 25. Пусть P' — произвольная точка пространства—времени. Проведем через P' в направлении будущего изотропную геодезическую, пересекающую кривую C, скажем, в точке P.

Определим контравариантные и ковариантные *оптические координаты*[1]) (сокращенно ОК) *точки P' относительно базисной линии C*

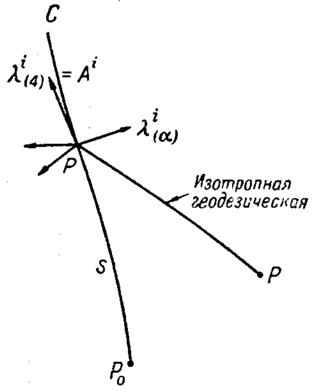
[1]) Эти оптические координаты отличаются от оптических координат Темпле [1230]; в определении последнего фигурирует параллельный перенос изотропных векторов, а не ферми-перенос 3-репера.

с помощью соотношений

$$X^{(\alpha)} = X_{(\alpha)} = -\Omega_i (PP') \lambda^i_{(\alpha)},$$
$$X^{(4)} = -X_{(4)} = s, \qquad (2.189)$$

где s — мера отрезка P_0P. Заметим, что, если в качестве определения первых трех КФ использовать соотношение (2.185), то уравнения, определяющие КФ и ОК, формально идентичны. Разница состоит лишь в том, что в КФ геодезическая PP' *ортогональна* базисной линии, тогда как в ОК эта геодезическая *изотропна*. Оба эти факта можно выразить математически следующим образом:

$$\Omega_i (PP') A^i = 0 \quad \text{для КФ}, \qquad (2.190а)$$
$$\Omega (PP') = 0 \quad \text{для ОК}. \qquad (2.190б)$$



Фиг. 26. Оптические координаты, отнесенные к временноподобной базисной линии C.

Таким образом, мировая функция играет важную роль, объединяя и упрощая обращение этими координатами[1]).

Для полноты сравнения ФК и ОК заметим, что (2.181) для ОК не выполняется, так как мера PP' равна пулю. Однако если на изотропной геодезической PP' взять канонический параметр u, пробегающий значения от $u=0$ в точке P до $u=\sigma$ в точке P' (σ — произвольное число), то (2.189) можно записать в виде

$$X^{(\alpha)} = \sigma \lambda^{(\alpha)}_i \left(\frac{dx^i}{du}\right)_P. \qquad (2.191)$$

Для ОК соотношение (2.186) оказывается неверным. Чтобы найти соответствующее соотношение для ОК, заметим, что

$$\lambda^{(\alpha)}_i \lambda^j_{(\alpha)} = \delta^j_i - \lambda^{(4)}_i \lambda^j_{(4)} = \delta^j_i + A_i A^j \qquad (2.192)$$

и, следовательно,

$$X_{(\alpha)} X^{(\alpha)} = \Omega_j \lambda^j_{(\alpha)} \Omega^i \lambda^{(\alpha)}_i = \Omega_j \Omega^i (\delta^j_i + A_i A^j) = (\Omega_i A^i)^2, \qquad (2.193)$$

поскольку [см. (1.20)] $\Omega_i \Omega^i = 2\Omega = 0$.

В плоском пространстве — времени величины $X^{(\alpha)}$ и для КФ, и для ОК имеют простой смысл — это пространственные декартовы координаты точки P' относительно осей, движущихся так, что начало координат находится в точке P, а ось x^4 касательна к кривой C.

§ 11. Метрики для координат Ферми и оптических координат

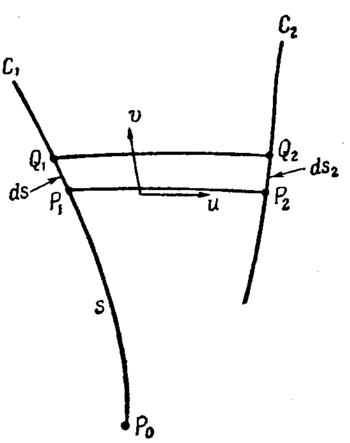
Чтобы исследовать метрики для координат Ферми (КФ) и для оптических координат (ОК), будем исходить из самой общей ситуации, изображенной графически на фиг. 27. Мы имеем временноподобную кривую C_1 и другую кривую C_2 (не обязательно временноподобную). Эти кривые соединены ∞^1 геодезических, на каждой из которых определен канони-

[1]) Хотя для КФ и ОК мы употребляем название *координаты*, следует, однако, помнить, что на самом деле они представляют собой инварианты и что всегда где-то в основе скрыто присутствие системы координат общего вида; используя эти координаты, мы избегаем появления несимметричных выражений, подобных (2.188).

ческий параметр u, принимающий значения от $u=u_1$ на C_1 до $u=u_2$ на C_2. «Занумеруем» эти геодезические с помощью параметра v, равного мере s кривой C_1, откладываемой от некоторой точки P_0 на этой кривой. Тогда мы получим двумерное пространство $x^i=x^i(u, v)$, и, как обычно, запишем

$$U^i=\frac{\partial x^i}{\partial u},$$

$$V^i=\frac{\partial x^i}{\partial v}.$$



Фиг. 27. Определение метрики для координат Ферми и оптических координат.

Для частной производной мировой функции $\Omega(P_1P_2)$ относительно точки P_1 имеем

$$\begin{aligned}\Omega_{i_1}&=-k^{-1}U_{i_1},\\ k^{-1}&=u_2-u_1,\end{aligned} \tag{2.194}$$

а дифференцирование по v дает

$$\Omega_{i_1j_1}V^{j_1}+\Omega_{i_1j_2}V^{j_2}=-W_{i_1},\quad W_{i_1}=k^{-1}\frac{\delta U_{i_1}}{\delta v}. \tag{2.195}$$

Поэтому для пространства — времени малой кривизны (порядка O_1) получим

$$\begin{aligned}\Omega_{i_1j_1}&=g_{i_1j_1}+h_{i_1j_1},\\ \Omega_{i_1j_2}&=-g_{i_1j_2}+h_{i_1j_2},\end{aligned} \tag{2.196}$$

где $g_{i_1j_2}$ — оператор параллельного переноса, а h-члены представляют собой малые интегральные члены, задаваемые формулами (2.95). Следовательно,

$$g_{i_1j_2}V^{j_2}=W_{i_1}+V_{i_1}+h_{i_1j_1}V^{j_1}+h_{i_1j_2}V^{j_2}. \tag{2.197}$$

Слева стоит выражение, представляющее собой результат сдвига V^{j_2} из точки P_2 в точку P_1 посредством параллельного переноса, при котором абсолютная величина вектора не меняется. Следовательно, если для краткости положить

$$W^i+V^i=Z^i, \tag{2.198}$$

то, поскольку h-члены имеют порядок O_1, мы получим

$$V_{i_2}V^{i_2}=Z_{i_1}Z^{i_1}+2Z^{i_1}(h_{i_1j_1}V^{j_1}+h_{i_1j_2}V^{j_2})+O_2. \tag{2.199}$$

В силу (2.197)

$$V^{j_2}=g^{j_2k_1}Z_{k_1}+O_1 \tag{2.200}$$

и, следовательно, (2.199) можно записать в виде

$$V_{i_2}V^{i_2}=Z_{i_1}Z^{i_1}+2Z^{i_1}h_{i_1j_1}V^{j_1}+2Z^{i_1}h_{i_1j_2}g^{j_2k_1}Z_{k_1}+O_2. \tag{2.201}$$

Все векторы, входящие в правую часть (2.201), берутся теперь в точке P_1.

Если геодезические P_1P_2 и Q_1Q_2 (см. фиг. 27) соответствуют значениям параметра v и $v+dv$ (т. е. s и $s+ds$), то

$$V_{i_2}V^{i_2}ds^2=\overrightarrow{P_2Q_2}^2=2\Omega(P_2\Omega_2)=\varepsilon ds_2^2, \tag{2.202}$$

где ds_2 — мера P_2Q_2, а ε — индикатор P_2Q_2. Таким образом, для нахождения метрической формы в точке P_2 в предположении, что Z^i и V^i на кривой C_1 известны, нужно просто умножить (2.201) на ds^2. Фактически мы знаем, что на C_1 $V^i = A^i$ представляет собой единичный вектор, касательный к кривой C_1; с другой стороны, вектор Z^i зависит от выбора кривой C_2.

Как в КФ, так и в ОК, мы имеем ОР $\lambda^i_{(a)}$, претерпевающий перенос Ф — У вдоль базисной линии (кривая C_1 на фиг. 27). Кроме того, $\lambda^i_{(4)} = A^i$. Определим ОР в двумерном пространстве геодезических, изображенных на фиг. 27, с помощью параллельного переноса вдоль этих геодезических, и выразим (2.201) через инвариантные компоненты в этом ОР. Можно, не опасаясь недоразумений, опустить вторичный числовой индекс у векторов в правой части (2.201) (все они берутся в точке P_1), однако для h-членов эти индексы необходимо сохранять, так как они связаны и с точкой P_1 и с точкой P_2. Имеем

$$V^{(\alpha)} = 0, \quad V^{(4)} = 1, \quad V_{(4)} = -1, \tag{2.203}$$

и, следовательно,

$$2\Omega(P_2Q_2) = ds^2 [Z_{(a)}Z^{(a)} + 2Z^{(a)}h_{(a_1 4_1)} + 2Z^{(a)}h_{(a_1 b_2)}Z^{(b)}] + O_2. \tag{2.204}$$

Беря в качестве базисной линии кривую C_1 и помня, что все векторы следует вычислять на базисной линии (так что вторичный индекс 1 можно опустить), получим для КФ и ОК

$$X_{(\alpha)} = k^{-1}U_i\lambda^i_{(\alpha)} = k^{-1}U_{(\alpha)}, \qquad X^{(4)} = s, \tag{2.205}$$

и, следовательно,

$$DX_{(\alpha)} = W_{(\alpha)} + k^{-1}U_iA^ibB_{(\alpha)}, \tag{2.206}$$

где

$$D = \frac{d}{ds} = \frac{d}{dv}.$$

Продолжим рассмотрение КФ, отложив на время вопрос об ОК с тем, чтобы вернуться к ним позднее. Вследствие ортогональности, очевидной из фиг. 25, имеем для КФ

$$U_iA^i = 0, \tag{2.207}$$

что после дифференцирования дает

$$kW_iA^i + bU_iB^i = 0, \qquad W_{(4)} = -bX_{(\alpha)}B^{(\alpha)}. \tag{2.208}$$

Следовательно, в силу (2.203), (2.206) и (2.208)

$$Z^{(\alpha)} = DX^{(\alpha)}, \quad Z^{(4)} = 1 + \zeta = -Z_{(4)}, \tag{2.209}$$

где

$$\zeta = bX_{(\alpha)}B^{(\alpha)}. \tag{2.210}$$

(Вспомним, что b есть кривизна базисной линии, а B^i — ее первая единичная нормаль.)

Подстановка (2.203) и (2.209) в (2.204) приводит к следующему выражению для *метрической формы для координат Ферми в простран-*

стве — времени малой кривизны:

$$\begin{aligned}
&2\Omega(P_2Q_2) = \Phi = g_{(rs)}\,dX^{(r)}\,dX^{(s)},\\
&g_{(\alpha\beta)} = \delta_{\alpha\beta} + 2h_{(\alpha_1\beta_2)} + O_2,\\
&g_{(\alpha 4)} = h_{(\alpha_1 4_1)} + 2h_{(\alpha_1 4_2)}(1+\zeta) + O_2,\\
&g_{(44)} = -(1+\zeta)^2 + 2(1+\zeta)\,h_{(4_1 4_1)} + 2(1+\zeta)^2 h_{(4_1 4_2)} + O_2.
\end{aligned} \tag{2.211}$$

Что касается малых h-членов, то они входят в (2.97) в виде интегралов от симметризованного тензора Римана S. Чтобы получить их выражения относительно координат Ферми, необходимо изменить обозначения, вводя требование, что канонический параметр u в (2.97) должен быть мерой на геодезической, с условием, что $u_1 = 0$ и $u_2 = \sigma$. Положим для краткости

$$\frac{3}{2}\sigma^{-3}X^{(\mu)}X^{(\nu)} = Y^{(\mu\nu)}. \tag{2.212}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&h_{(\alpha_1\beta_2)} = Y^{(\mu\nu)}\int_0^\sigma (\sigma-u)\,uS_{(\alpha\beta\mu\nu)}\,du + O_2,\\
&h_{(\alpha_1 4_1)} = Y^{(\mu\nu)}\int_0^\sigma (\sigma-u)^2 S_{(\alpha 4\mu\nu)}\,du + O_2,\\
&h_{(\alpha_1 4_2)} = h_{(\alpha_2 4_1)} = Y^{(\mu\nu)}\int_0^\sigma (\sigma-u)\,uS_{(\alpha 4\mu\nu)}\,du + O_2,\\
&h_{(4_1 4_1)} = Y^{(\mu\nu)}\int_0^\sigma (\sigma-u)^2 S_{(44\mu\nu)}\,du + O_2,\\
&h_{(4_1 4_2)} = Y^{(\mu\nu)}\int_0^\sigma (\sigma-u)\,uS_{(44\mu\nu)}\,du + O_2.
\end{aligned} \tag{2.213}$$

Если кривизна b базисной линии мала (как это имеет место в физических приложениях), то в силу (2.210) ζ оказывается малой *величиной при условии, что* КФ $X_{(\alpha)}$ *не принимают больших значений.* В этом случае можно несколько упростить (2.211), пренебрегая ζ^2 и произведениями ζ на h.

Отыскав, таким образом, метрику для КФ (в указанном приближении), вернемся к обсуждению ОК, для которых имеют место формулы (2.205) и (2.206), но вместо (2.207) в силу (2.193) выполняются следующие соотношения:

$$k^{-1}U_iA^i = r > 0, \qquad r^2 = X_{(\alpha)}X^{(\alpha)}. \tag{2.214}$$

Положительный знак у r обусловлен тем, что мы выбрали касательный вектор A^i так, что он направлен в будущее, а вектор U^i — в прошедшее (фиг. 26). Из (1.206) теперь вытекает, что

$$W_{(\alpha)} = DX_{(\alpha)} - rbB_{(\alpha)}. \tag{2.215}$$

В ОК U^i — вектор изотропный, и, следовательно,

$$\begin{aligned}
&U_iU^i = 0, \qquad U_iW^i = 0,\\
&U_{(4)}W^{(4)} = -U_{(\alpha)}W^{(\alpha)} = -kX_{(\alpha)}W^{(\alpha)} = -kX_{(\alpha)}DX^{(\alpha)} + kr\zeta,
\end{aligned} \tag{2.216}$$

где ζ имеет тот же смысл, что и в (2.210). Но

$$U_{(4)} = -U^{(4)} = (U_{(\alpha)}U^{(\alpha)})^{1/2} = kr \tag{2.217}$$

и, таким образом,

$$W^{(4)} = -r^{-1}X_{(\alpha)}DX^{(\alpha)} + \zeta = \zeta - Dr. \tag{2.218}$$

Следовательно, в силу (2.198) и (2.203)

$$\begin{aligned} Z_{(\alpha)} &= Z^{(\alpha)} = DX^{(\alpha)} - rbB^{(\alpha)}, \\ Z^{(4)} &= -Z_{(4)} = 1 + \zeta - Dr. \end{aligned} \tag{2.219}$$

Теперь мы в состоянии выписать метрическую форму для оптических координат, но, поскольку точная формула имеет несколько громоздкий вид, мы не будем выполнять всех подстановок. Достаточно сказать, что в силу (2.204) эту форму можно записать так:

$$\begin{aligned} \Phi &= g_{(rs)}\, dX^{(r)}\, dX^{(s)} = 2\Omega\,(P_2Q_2) = \\ &= ds^2\,[Z_{(a)}Z^{(a)} + 2Z^{(a)}h_{(a_1 4_1)} + 2Z^{(a)}h_{(a_1 b_2)}Z^{(b)}], \end{aligned} \tag{2.220}$$

куда следует подставить

$$\begin{aligned} Z^{(\alpha)}\, ds &= Z_{(\alpha)}\, ds = dX^{(\alpha)} - rbB^{(\alpha)}\, dX^{(4)}, \\ Z^{(4)}\, ds &= -Z_{(4)}\, ds = (1 + \zeta)\, dX^{(4)} - dr. \end{aligned} \tag{2.221}$$

Что же касается h-членов в (2.220), то вместо них следует подставить выражения, подобные формулам (2.97):

$$\begin{aligned} h_{(m_1 n_1)} &= \frac{3}{2}\sigma^{-1} U^{(r)}U^{(s)} \int_0^\sigma (\sigma - u)^2\, S_{(mnrs)}\, du + O_2, \\ h_{(m_1 n_2)} &= \frac{3}{2}\sigma^{-1} U^{(r)}U^{(s)} \int_0^\sigma (\sigma - u)\, u\, S_{(mnrs)}\, du + O_2, \\ U^{(\alpha)} &= \sigma^{-1}X^{(\alpha)},\quad U^{(4)} = -r\sigma^{-1},\quad r = (X_{(\alpha)}X^{(\alpha)})^{1/2}. \end{aligned} \tag{2.222}$$

Как и в случае КФ, выражение для метрики можно упростить, когда кривизна b базисной линии мала, при условии, что $X^{(\alpha)}$ не принимают больших значений.

§ 12. Геодезические в координатах Ферми и оптических координатах

Рассмотрим уравнения геодезических в координатах Ферми (КФ) и в оптических координатах (ОК). Как выяснится в дальнейшем, нижеследующее обсуждение имеет непосредственную физическую интерпретацию: базисная линия C этих координат оказывается мировой линией наблюдателя (например, находящегося на земле астронома), а геодезическая Γ', уравнение которой мы собираемся найти, — мировой линией некоторой свободной частицы (например, планеты).

В предыдущем параграфе мы нашли приближенные выражения для метрического тензора в КФ и ОК, откуда, используя (1.31), мы, несомненно, могли бы, хотя и не без труда, получить уравнения геодезической. Однако этот способ связан с дифференцированием метрического тензора, и лучше решать задачу заново. На фиг. 28 изображены временноподобная базисная линия C и временноподобная геодезическая Γ', причем связь

между точками P и P' показана как в случае КФ, так и в случае ОК. Точки P_0 и P'_0 — соответствующие базисные точки на C и на Γ'. Положим $P_0P = s$, $P'_0P' = s'$. Тогда $s = X^{(4)}$, т. е. интервал равен четвертой координате в КФ и ОК. Полагая $\Omega = \Omega(PP')$, получим

$$X^{(\alpha)} = X_{(\alpha)} = -\Omega_i \lambda^i_{(\alpha)}, \quad X^{(4)} = -X_{(4)} = s \tag{2.223}$$

и в силу (2.207) и (2.214)

$$\Omega_i A^i = -\theta r. \tag{2.224}$$

Вводя множитель θ, мы сможем одновременно рассмотреть и КФ и ОК. Поскольку геодезическая определена, как только задана точка на ней и направление кривой, мы с необходимостью приходим к следующего вида дифференциальным уравнениям для Γ':

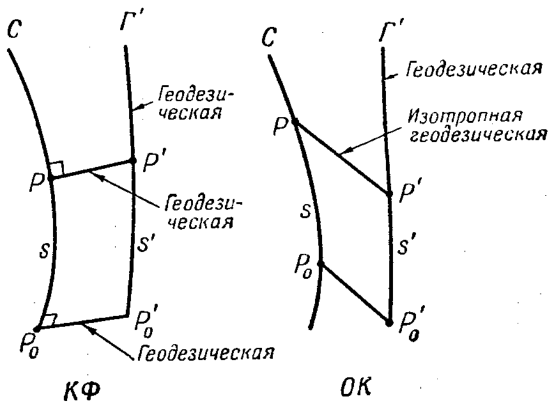
$$D^2 X_{(\alpha)} = f_{(\alpha)}(X_{(\beta)}, DX_{(\gamma)}, s), \tag{2.225}$$

$$D = \frac{d}{ds}.$$

Наша задача состоит в отыскании $f_{(\alpha)}$. Проведем некоторые предварительные выкладки. Согласно (2.180), имеем

$$D\lambda^i_{(\alpha)} = bA^i B_{(\alpha)}, \quad \lambda^i_{(4)} = A^i, \tag{2.226}$$

где $D = \delta/\delta s$[1]), а b — первая кривизна C. Если $A^{i'}$ — единичный вектор, касательный к Γ' в точке P', то, поскольку касательные к геодезической единичные векторы переносятся вдоль последней параллельно,



Ф и г. 28. Проблема геодезической для координат Ферми и оптических координат.

$$DA^{i'} = 0, \quad A^{i'}A_{i'} = -1. \tag{2.227}$$

Удобно определить

$$H^{i'} = A^{i'} Ds', \tag{2.228}$$

так что

$$(Ds')^2 = -H^{i'} H_{i'} \tag{2.229}$$

и

$$DH^{i'} = A^{i'} D^2 s' = \chi H^{i'}, \quad \chi = \frac{D^2 s'}{Ds'}. \tag{2.230}$$

Далее, определим

$$L_{(\alpha)} = \Omega_{ij'} \lambda^i_{(\alpha)} H^{j'}, \tag{2.231}$$

так что

$$DL_{(\alpha)} = bL_{(4)} B_{(\alpha)} + \chi L_{(\alpha)} + \Omega_{ij'k} \lambda^i_{(\alpha)} H^{j'} A^k + \Omega_{ij'k'} \lambda^i_{(\alpha)} H^{j'} H^{k'}, \tag{2.232}$$

$$DL_{(4)} = bL_{(\alpha)} B^{(\alpha)} + \chi L_{(4)} + \Omega_{ij'k} A^i H^{j'} A^k + \Omega_{ij'k'} A^i H^{j'} H^{k'}. \tag{2.233}$$

[1]) Эти обозначения согласуются с обозначениями (2.225), так как $\delta/\delta s = d/ds$, когда этот оператор действует на инвариант.

Дифференцируя (2.223) с учетом (2.224) и (2.226), получаем

$$DX_{(\alpha)} = \theta rbB_{(\alpha)} - \Omega_{ij}\lambda^i_{(\alpha)}A^j - L_{(\alpha)}, \qquad (2.234)$$

а повторное дифференцирование дает

$$D^2X_{(\alpha)} = \theta D\,(rbB_{(\alpha)}) - \Omega_{ij}A^iA^jbB_{(\alpha)} - \\ - \Omega_{ij}\lambda^i_{(\alpha)}bB^j - \Omega_{ijk}\lambda^i_{(\alpha)}A^jA^k - \Omega_{ijk'}\lambda^i_{(\alpha)}A^jH^{k'} - DL_{(\alpha)}. \qquad (2.235)$$

Итак, мы пришли к уравнению геодезической (2.225). Теперь необходимо вычислить правую часть (2.235).

Мы имеем также уравнение (2.224), дифференцирование которого дает

$$\theta Dr - \zeta + \Omega_{ij}A^iA^j + L_{(4)} = 0, \qquad (2.236)$$

$$\zeta = bX_{(\alpha)}B^{(\alpha)}$$

и

$$\theta D^2r - D\zeta + 2\Omega_{ij}A^ibB^j + \Omega_{ijk}A^iA^jA^k + \Omega_{ijk'}A^iA^jH^{k'} + DL_{(4)} = 0. \qquad (2.237)$$

До сих пор все уравнения были точными, но дальнейшие вычисления без аппроксимаций становятся затруднительными. Однако общая схема рассуждений свелась бы к вычислению $DL_{(4)}$ с помощью (2.237); затем из (2.233) следовало бы определить χ; далее с помощью (2.232) найти $DL_{(\alpha)}$ и, наконец, полученные результаты подставить в (2.235), чтобы получить уравнения геодезической.

Ситуация значительно упрощается, если принять следующие приближения (каждое из которых в физических приложениях вполне применимо):

1) Пространство — время почти плоско, вследствие чего [см. (2.95)]

$$\Omega_{ij} = g_{ij} + h_{ij}, \quad \Omega_{ij'} = -g_{ij'} + h_{ij'}, \qquad (2.238)$$

где $g_{ij'}$ — оператор параллельного переноса, а h-члены малы; кроме того, малы Ω-члены с тремя индексами.

2) Первая кривизна b кривой C мала, также весьма мала и скорость изменения b (т. е. Db). Кроме того, вторая кривизна C мала.

3) Геодезическая Γ' почти параллельна[1]) кривой C.

Если бы C представляла собой геодезическую в плоском пространстве — времени, то, очевидно, мы имели бы $D^2X_{(\alpha)} = 0$. Как легко видеть из (2.235), при сделанных выше приближениях $D^2X_{(\alpha)}$ оказывается малой величиной и, следовательно, в правой части (2.235) нужно оставить лишь главные члены. В таком случае второй и третий члены исчезают, а поскольку $Ds' = 1$ (приблизительно), то (приблизительно) $H^{i'} = A^{i'}$ и, таким образом, (2.235) можно записать в виде

$$D^2X_{(\alpha)} = \theta D\,(rbB_{(\alpha)}) - DL_{(\alpha)} - \Omega_{ijk}\lambda^i_{(\alpha)}A^jA^k - \Omega_{ijk'}\lambda^i_{(\alpha)}A^jA^{k'}. \qquad (2.239)$$

Из (2.231) видно, что $L_{(\alpha)}$ — малая величина, а $L_{(4)}$ приблизительно равна единице. Кроме того, малой величиной является χ, и, таким образом, (2.232) дает

$$DL_{(\alpha)} = bB_{(\alpha)} + \Omega_{ij'k}\lambda^i_{(\alpha)}A^{j'}A^k + \Omega_{ij'k'}\lambda^i_{\alpha}A^{j'}A^{k'}. \qquad (2.240)$$

Удобно ввести компоненты относительно репера $\lambda^i_{(\alpha)}$, переносимого вдоль PP' по правилам параллельного переноса. В этом случае из (2.239)

[1]) На языке физических приложений это означает, что относительная скорость мала по сравнению со скоростью света.

и (2.240) следует, что

$$D^2X_{(\alpha)} = \theta D(rbB_{(\alpha)}) - bB_{(\alpha)} - M_{(\alpha)}, \tag{2.241}$$

где

$$M_{(\alpha)} = \Omega_{(\alpha 44)} + 2\Omega_{(\alpha 4 4')} + \Omega_{(\alpha 4' 4')}. \tag{2.242}$$

Легко видеть, что θ-член в формуле (2.241) можно опустить. В самом деле, кривизна b мала, величиной Db можно пренебречь, Dr — малая величина и в силу формул Френе — Серре (1.55)

$$B_{(\alpha)} = B_i \lambda^i_{(\alpha)},$$

$$DB_{(\alpha)} = (cC_i + bA_i)\lambda^i_{(\alpha)} + B_i A^i bB_{(\alpha)}. \tag{2.243}$$

Таким образом, как для КФ, так и для ОК, мы получаем следующее приближенное уравнение геодезической Г′:

$$D^2X_{(\alpha)} = -bB_{(\alpha)} - M_{(\alpha)}. \tag{2.244}$$

Как мы видим, отклонение правой части (2.244) от нулевого значения состоит из двух слагаемых. Первый член обусловлен кривизной базисной линии[1]), а второй обязан кривизне пространства — времени.

Остается вычислить $M_{(\alpha)}$, что мы и сделаем с помощью (2.115), произведя предварительно следующие изменения в обозначениях:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = \sigma, \quad k = \sigma^{-1}. \tag{2.245}$$

Что касается U-членов в (2.115), то следует взять $U^i = dx^i/du$ вдоль геодезической PP'. Таким образом, в силу (2.224)

$$\Omega_i = -\sigma U_i, \quad U^{(\alpha)} = U_{(\alpha)} = -\sigma^{-1}\Omega_i\lambda^i_{(\alpha)} = \sigma^{-1}X_{(\alpha)}, \tag{2.246}$$

$$U^{(4)} = -U_{(4)} = \sigma^{-1}\Omega_i\lambda^i_{(4)} = \sigma^{-1}\Omega_i A^i = -\theta r\sigma^{-1}.$$

Отметим, что мы учитываем здесь и случай КФ ($\theta = 0$), и случай ОК ($\theta = 1$). Тогда величина $M_{(\alpha)}$ в (2.244) определится из (2.242) при следующих значениях Ω-членов:

$$\Omega_{(\alpha 44)} = -3\sigma^{-2}U^{(q)}\int_0^\sigma (\sigma-u)^2 S_{(\alpha 44q)}\,du + \frac{3}{2}\sigma^{-2}U^{(p)}U^{(q)}\int_0^\sigma (\sigma-u)^3 S_{(\alpha 4pq4)}\,du,$$

$$\Omega_{(\alpha 44')} = 3\sigma^{-2}U^{(q)}\int_0^\sigma (\sigma-u)^2 S_{(\alpha 44q)}\,du + \frac{3}{2}\sigma^{-2}U^{(p)}U^{(q)}\int_0^\sigma (\sigma-u)^2 uS_{(\alpha 44pq4)}\,du,$$

$$\Omega_{(\alpha 4'4')} = -3\sigma^{-2}U^{(q)}\int_0^\sigma u^2 S_{(44\alpha q)}\,du + \frac{3}{2}\sigma^{-2}U^{(p)}U^{(q)}\int_0^\sigma (\sigma-u)\,u^2 S_{(44pq\alpha)}\,du. \tag{2.247}$$

Заметим, что в последней формуле порядок индексов изменился.

С целью проверки этих весьма громоздких формул рассмотрим случай, когда кривая C является геодезической (так что $b = 0$), Г′ проходит вблизи C. В этом случае основной вклад в (2.247) дают первые интег-

[1]) Вот почему тела падают на Землю! Позднее этот вопрос будет рассмотрен более детально. См. гл. III, § 9.

ралы, и мы имеем

$$\Omega_{(\alpha 44)} = -3\sigma^{-2}\cdot\sigma^{-1}X^{(\beta)}S_{(\alpha 44\beta)}\int_0^\sigma (\sigma-u)^2\,du = -S_{(\alpha 44\beta)}X^{(\beta)},$$
$$\Omega_{(\alpha 44')} = S_{(\alpha 44\beta)}X^{(\beta)}, \quad \Omega_{(\alpha 4'4')} = -S_{(44\alpha\beta)}X^{(\beta)}, \tag{2.248}$$

где S-члены вычислены в точке P. Таким образом,

$$M_{(\alpha)} = (S_{(\alpha 44\beta)} - S_{(44\alpha\beta)})\,X^{(\beta)} = R_{(\alpha 4\beta 4)}X^{(\beta)} \tag{2.249}$$

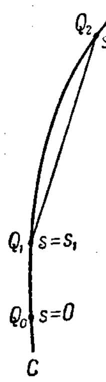
и уравнение геодезической (2.244) гласит

$$D^2X_{(\alpha)} = -R_{(\alpha 4\beta 4)}X^{(\beta)}. \tag{2.250}$$

Как и следовало ожидать, это согласуется с уравнением геодезического отклонения (1.140).

§ 13. Мировая функция и ее производные для двух точек на временноподобной кривой

Пусть C временноподобная кривая[1]) в пространстве — времени (фиг. 29). Эту кривую можно определить, задав главный 4-репер (касательную и нормали) в некоторой точке Q_0 $(s=0)$ и три кривизны как функции s. Эту же кривую можно определить в окрестности точки Q_0 и другим способом: задать единичную касательную A^i и абсолютные производные $DA^i, D^2A^i, \ldots$ в точке Q_0 (здесь $D=\delta/\delta s$). Мы примем последнее определение.



Фиг. 29. Мировая функция $\Omega(Q_1Q_2)$ для двух точек на временноподобной кривой.

Пусть Q_1 $(s=s_1)$ и Q_2 $(s=s_2)$ — две точки на кривой C в окрестности Q_0, так что s_1 и s_2 малы (O_1). Мировая функция $\Omega(Q_1Q_2)$ зависит от s_1 и s_2, и ее можно разложить в двойной степенной ряд вида

$$\Omega(Q_1Q_2) = [\Omega] + s_1[D_1\Omega] + s_2[D_2\Omega] + \\ + \frac{1}{2}\{s_1^2[D_1^2\Omega] + 2s_1s_2[D_1D_2\Omega] + s_2^2[D_2^2\Omega]\} + \ldots \tag{2.251}$$

где $D_1=\partial/\partial s_1$, $D_2=\partial/\partial s_2$, а квадратные скобки означают, что стоящие в них величины берутся в точке Q_0, где $s_1=s_0=0$; фактически, это пределы совпадения в том смысле, в каком они определены в § 2, и их можно вычислить (после незначительных изменений с помощью (2.69). Имеем

$$\begin{aligned} D_1\Omega &= \Omega_{i_1}A^{i_1}, \\ D_1^2\Omega &= \Omega_{i_1}D_1A^{i_1} + \Omega_{i_1j_1}A^{i_1}A^{j_1}, \\ D_1D_2\Omega &= \Omega_{i_1j_2}A^{i_1}A^{j_2}, \\ D_1^3\Omega &= \Omega_{i_1}D_1^2A^{i_1} + 3\Omega_{i_1j_1}DA^{i_1}A^{j_1} + \Omega_{i_1j_1k_1}A^{i_1}A^{j_1}A^{k_1}, \\ D_1^2D_2\Omega &= \Omega_{i_1j_2}D_1A^{i_1}A^{j_2} + \Omega_{i_1j_1k_2}A^{i_1}A^{j_1}A^{k_2}, \end{aligned} \tag{2.252}$$

[1]) Хотя выдерживая стиль, мы придаем всему изложению чисто геометрический характер, эта кривая C могла бы быть вашей или моей мировой линией — мировой линией земного наблюдателя, движущегося с какой-нибудь точкой на вращающейся Земле. Как мы увидим позднее, результаты проводимых здесь вычислений имеют простую и весьма фундаментальную физическую интерпретацию. См. гл. III, § 10.

а также аналогичные уравнения, получающиеся из приведенных при перестановке индексов $1 \leftrightarrow 2$. Отсюда в силу (2.69)

$$\begin{aligned} &[\Omega]=0, \\ &[D_1\Omega]=[D_2\Omega]=0, \\ &[D_1^2\Omega]=-1,\ [D_1D_2\Omega]=1,\ [D_2^2\Omega]=-1, \\ &[D_1^3\Omega]=[D_1^2D_2\Omega]=[D_1D_2^2\Omega]=[D_2^3\Omega]=0. \end{aligned} \tag{2.253}$$

Из двух последних строчек в (2.252), используя после дифференцирования (2.69), получаем

$$\begin{aligned} &[D_1^4\Omega]=[4\Omega_{i_1j_1}D_1^2A^{i_1}A^{j_1}+3\Omega_{i_1j_1}D_1A^{i_1}D_1A^{j_1}+\Omega_{i_1j_1k_1m_1}A^{i_1}A^{j_1}A^{k_1}A^{m_1}], \\ &[D_1^3D_2\Omega]=[\Omega_{i_1j_2}D_1^2A^{i_1}A^{j_2}+\Omega_{i_1j_1k_1m_2}A^{i_1}A^{j_1}A^{k_1}A^{m_2}], \\ &[D_1^2D_2^2\Omega]=[\Omega_{i_1j_2}D_1A^{i_1}D_2A^{i_2}+\Omega_{i_1j_1k_2m_2}A^{i_1}A^{j_1}A^{k_2}A^{m_2}]. \end{aligned} \tag{2.254}$$

Завершая подстановку из (2.69), опустим числовые индексы у A-членов; при этом вследствие кососимметричности тензора Римана Ω-члены с четырьмя индексами обращаются в нуль. Кроме того,

$$\begin{aligned} &A_iA^i=-1,\ A_iDA^i=0, \\ &A_iD^2A^i=-DA_iDA^i=-b^2, \end{aligned} \tag{2.255}$$

где b — первая кривизна C. Следовательно, мы получим

$$\begin{aligned} &[D_1^4\Omega]=-b^2,\ [D_1^3D_2\Omega]=b^2, \\ &[D_1^2D_2^2\Omega]=-b^2, \end{aligned} \tag{2.256}$$

а также аналогичные уравнения, получающиеся из (2.256) при перестановке индексов 1 и 2. После подстановки производных из формул (2.253) и (2.256) в (2.251) мы придем к следующему приближенному выражению для *мировой функции двух точек на* C:

$$\Omega(Q_1Q_2)=-\frac{1}{2}(s_2-s_1)^2-\frac{1}{24}b^2(s_2-s_1)^4+O_5. \tag{2.257}$$

Заметим, что в этом приближении кривизна линии C присутствует, кривизна же пространства — времени в выражение мировой функции не входит.

Если τ — мера геодезической Q_1Q_2 (изображенная на фиг. 29 в виде прямой линии), то мы имеем

$$\Omega(Q_1Q_2)=-\frac{1}{2}\tau^2, \tag{2.258}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} &\tau^2=(s_2-s_1)^2+\frac{1}{12}b^2(s_2-s_1)^4+O_5, \\ &\tau=(s_2-s_1)+\frac{1}{24}b^2(s_2-s_1)^3+O_4, \end{aligned} \tag{2.259}$$

если $s_2>s_1$. Это соотношение совпадает с евклидовой формулой для хорды (τ) окружности радиуса b^{-1}, связывающей хорду с дугой (s_2-s_1); возникающее здесь важное отличие состоит в смене знака, в результате чего $\tau>(s_2-s_1)$.

Предположим вычисление ковариантных производных функции $\Omega(Q_1Q_2)$, но будем рассматривать лишь инвариантные компоненты

в 3-репере Ферми $\lambda^i_{(\alpha)}$. Эти компоненты имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\Omega_{(\alpha_1)} = \Omega_{i_1}\lambda^{i_1}_{(\alpha)},\\
&\Omega_{(\alpha_1\beta_1)} = \Omega_{i_1j_1}\lambda^{i_1}_{(\alpha)}\lambda^{j_1}_{(\beta)},\\
&\Omega_{(\alpha_1\beta_2)} = \Omega_{i_1j_2}\lambda^{i_1}_{(\alpha)}\lambda^{j_2}_{(\beta)},\\
&\Omega_{(\alpha_1\beta_1\gamma_1)} = \Omega_{i_1j_1k_1}\lambda^{i_1}_{(\alpha)}\lambda^{j_1}_{(\beta)}\lambda^{k_1}_{(\gamma)},\\
&\Omega_{(\alpha_1\beta_1\gamma_2)} = \Omega_{i_1j_1k_2}\lambda^{i_1}_{(\alpha)}\lambda^{j_1}_{(\beta)}\lambda^{k_2}_{(\gamma)},\\
&\Omega_{(\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1)} = \Omega_{i_1j_1k_1m_1}\lambda^{i_1}_{(\alpha)}\lambda^{j_1}_{(\beta)}\lambda^{k_1}_{(\gamma)}\lambda^{m_1}_{(\delta)},\\
&\Omega_{(\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_2)} = \Omega_{i_1j_1k_1m_2}\lambda^{i_1}_{(\alpha)}\lambda^{j_1}_{(\beta)}\lambda^{k_1}_{(\gamma)}\lambda^{m_2}_{(\delta)},\\
&\Omega_{(\alpha_1\beta_1\gamma_2\delta_2)} = \Omega_{i_1j_1k_2m_2}\lambda^{i_1}_{(\alpha)}\lambda^{j_1}_{(\beta)}\lambda^{k_2}_{(\gamma)}\lambda^{m_2}_{(\delta)}.
\end{aligned} \tag{2.260}$$

Остальные компоненты строятся из выписанных выше посредством перестановки индексов 1 и 2.

Вычислим эти выражения, определяющие производные первого, второго, третьего и четвертого порядков, с погрешностью соответственно O_4, O_3, O_2, O_1, так как именно такая степень точности нам понадобится в следующем параграфе. В силу определения переноса Ферми (1.84)

$$\begin{aligned}
&D\lambda^i_{(\alpha)} = A^i\lambda^j_{(\alpha)}DA_j,\\
&D^2\lambda^i_{(\alpha)} = DA^i\lambda^j_{(\alpha)}DA_j + A^i\lambda^j_{(\alpha)}D^2A_j,
\end{aligned} \tag{2.261}$$

и, следовательно, при использовании очевидных обозначений

$$\begin{aligned}
&D\lambda^i_{(\alpha)}A_i = -\lambda^j_{(\alpha)}DA_j = -(DA)_{(\alpha)},\\
&D\lambda^i_{(\alpha)}DA_i = 0,\\
&D^2\lambda^i_{(\alpha)}A_i = -\lambda^j_{(\alpha)}D^2A_j = -(D^2A)_{(\alpha)},\\
&D^2\lambda^i_{(\alpha)}DA_i = DA_iDA^i\lambda^j_{(\alpha)}DA_j = b^2\,(DA)_{(\alpha)}.
\end{aligned} \tag{2.262}$$

Разложение в двойной степенной ряд дает

$$\begin{aligned}
\Omega_{(\alpha_1)} = {}& [\Omega_{(\alpha_1)}] + s_1\,[D_1\Omega_{(\alpha_1)}] + s_2\,[D_2\Omega_{(\alpha_1)}] +\\
&+\frac{1}{2}\{s_1^2\,[D_1^2\Omega_{(\alpha_1)}] + 2s_1s_2\,[D_1D_2\Omega_{(\alpha_1)}] + s_2^2\,[D_2^2\Omega_{(\alpha_1)}]\} + \ldots
\end{aligned} \tag{2.263}$$

Теперь

$$\begin{aligned}
&D_1\Omega_{(\alpha_1)} = \Omega_{i_1}D_1\lambda^{i_1}_{(\alpha)} + \Omega_{i_1j_1}\lambda^{i_1}_{(\alpha)}A^{j_1},\\
&D_2\Omega_{(\alpha_1)} = \Omega_{i_1j_2}\lambda^{i_1}_{(\alpha)}A^{j_2},\\
&D_1^2\Omega_{(\alpha_1)} = \Omega_{i_1}D_1^2\lambda^{i_1}_{(\alpha)} + 2\Omega_{i_1j_1}D_1\lambda^{i_1}_{(\alpha)}A^{j_1} +\\
&\qquad + \Omega_{i_1j_1}\lambda^{i_1}_{(\alpha)}D_1A^{j_1} + \Omega_{i_1j_1k_1}\lambda^{i_1}_{(\alpha)}A^{j_1}A^{k_1},\\
&D_1D_2\Omega_{(\alpha_1)} = \Omega_{i_1j_2}D_1\lambda^{i_1}_{(\alpha)}A^{j_2} + \Omega_{i_1j_1k_2}\lambda^{i_1}_{(\alpha)}A^{j_1}A^{k_2},\\
&D_2^2\Omega_{(\alpha_1)} = \Omega_{i_1j_2}\lambda^{i_1}_{(\alpha)}D_2A^{j_2} + \Omega_{i_1j_2k_2}\lambda^{i_1}_{(\alpha)}A^{j_2}A^{k_2}.
\end{aligned} \tag{2.264}$$

Пределы совпадения в точке Q_0 определяются формулами:

$$\begin{aligned}
&[\Omega_{(\alpha_1)}] = [D_1\Omega_{(\alpha_1)}] = [D_2\Omega_{(\alpha_1)}] = 0,\\
&[D_1^2\Omega_{(\alpha_1)}] = -[D_1D_2\Omega_{(\alpha_1)}] = [D_2^2\Omega_{(\alpha_1)}] = -(DA)_{(\alpha)}.
\end{aligned} \tag{2.265}$$

Так как в нашем приближении члены порядка O_4 можно отбросить, то нет необходимости выписывать полностью следующие производные,

получающиеся из формул (2.264). Часть операций, необходимых для вычисления нужных нам пределов совпадения, можно проделать в уме; таким образом, с помощью (2.69) и (2.262) получаем

$$\begin{aligned} [D_1^3\Omega_{(\alpha_1)}] &= [3\Omega_{i_1j_1}D_1^2\lambda^{i_1}_{(\alpha)}A^{j_1} + 3\Omega_{i_1j_1}D_1\lambda^{i_1}_{(\alpha)}D_1A^{j_1} + \Omega_{i_1j_1}\lambda^{i_1}_{(\alpha)}D_1^2A^{j_1}] = \\ &= -3(D^2A)_{(\alpha)} + 0 + (D^2A)_{(\alpha)} = -2(D^2A)_{(\alpha)}, \\ [D_1^2D_2\Omega_{(\alpha_1)}] &= [\Omega_{i_1j_2}D_1^2\lambda^{i_1}_{(\alpha)}A^{j_2}] = (D^2A)_{(\alpha)}, \\ [D_1D_2^2\Omega_{(\alpha_1)}] &= [\Omega_{i_1j_2}D_1\lambda^{i_1}_{(\alpha)}D_2A^{j_2}] = 0, \\ [D_2^3\Omega_{(\alpha_1)}] &= [\Omega_{i_1j_2}\lambda^{i_1}_{(\alpha)}D_2^2A^{j_2}] = -(D^2A)_{(\alpha)}. \end{aligned} \tag{2.266}$$

После подстановки пределов совпадения из (2.265) и (2.266) в ряд (2.263) получим

$$\Omega_{(\alpha_1)} = -\frac{1}{2}(s_2 - s_1)^2\{(DA)_{(\alpha)} + \frac{1}{3}(2s_1 + s_2)(D^2A)_{(\alpha)}\} + O_4. \tag{2.267}$$

Нужно еще вычислить производные второго, третьего и четвертого порядков в (2.260). Вычисления проводятся по той же схеме, что и выше, однако оказываются несколько проще, так как с возрастанием порядка производной становится допустимой все более низкая степень точности. Читателя не должна затруднить проверка следующих формул, в число которых для облегчения ссылок включены и формулы (2.257) и (2.267):

$$\Omega_4^{\prime}(Q_1Q_2) = -\frac{1}{2}(s_2 - s_1)^2 - \frac{1}{24}b^2(s_2 - s_1)^4 + O_5, \tag{2.268}$$

$$\begin{aligned} \Omega_{(\alpha_1)} &= -\frac{1}{2}(s_2 - s_1)^2\left\{(DA)_{(\alpha)} + \frac{1}{3}(2s_1 + s_2)(D^2A)_{(\alpha)}\right\} + O_4, \\ \Omega_{(\alpha_2)} &= -\frac{1}{2}(s_2 - s_1)^2\left\{(DA)_{(\alpha)} + \frac{1}{3}(s_1 + 2s_2)(D^2A)_{(\alpha)}\right\} + O_4, \end{aligned} \tag{2.269}$$

$$\begin{aligned} \Omega_{(\alpha_1\beta_1)} &= \Omega_{(\alpha_2\beta_2)} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(s_2 - s_1)^2 S_{(\alpha\beta44)} + O_3, \\ \Omega_{(\alpha_1\beta_2)} &= -\delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(s_2 - s_1)^2\{(DA_{(\alpha)}(DA)_{(\beta)} + S_{(\alpha44\beta)}\} + O_3, \end{aligned} \tag{2.270}$$

$$\begin{aligned} \Omega_{(\alpha_1\beta_1\gamma_1)} &= -(s_2 - s_1)S_{(\alpha\beta\gamma4)} + O_2, \\ \Omega_{(\alpha_1\beta_1\gamma_2)} &= \Omega_{(\alpha_2\beta_2\gamma_2)} = (s_2 - s_1)S_{(\alpha\beta\gamma4)} + O_2, \\ \Omega_{(\alpha_1\beta_2\gamma_2)} &= -(s_2 - s_1)S_{(\beta\gamma\alpha4)} + O_2, \end{aligned} \tag{2.271}$$

$$\begin{aligned} \Omega_{(\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1)} &= \Omega_{(\alpha_1\beta_1\gamma_2\delta_2)} = \Omega_{(\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2)} = S_{(\alpha\beta\gamma\delta)} + O_1, \\ \Omega_{(\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_2)} &= -S_{(\alpha\beta\gamma\delta)} + O_1, \\ \Omega_{(\alpha_1\beta_2\gamma_2\delta_2)} &= -S_{(\alpha\delta\beta\gamma)} + O_1. \end{aligned} \tag{2.272}$$

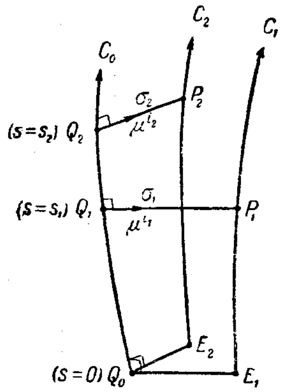
Заметим, что в этом приближении появляются первая и вторая кривизны линии C, третья же кривизна не фигурирует. Производные второго и более высоких порядков в (2.270) уже зависят от кривизны пространства — времени, зависимость от которой входит в виде симметризованного тензора Римана [см. (2.69)]. Что касается производных от этого тензора, то они в данном приближении не появляются.

§ 14. Мировая функция в координатах Ферми для двух точек на смежных временноподобных кривых

На фиг. 30 изображена временноподобная мировая линия C_0, которую мы выберем в качестве базисной линии для координат Ферми (КФ). Кривые C_1 и C_2 — две другие временноподобные мировые линии, смежные

с C_0, а P_1 и P_2—точки на этих линиях. Пусть s — мера на C_0 такая, что $s=0$ в точке Q_0. Выполняя надлежащие построения для КФ, мы проводим геодезические P_1Q_1 и P_2Q_2 ортогонально к C_0. Пусть $s=s_1$ в точке Q_1 и $s=s_2$ в точке Q_2. Тогда s_1 и s_2 будут четвертыми координатами Ферми ($X^{(4)}$) точек P_1 и P_2 соответственно.

Пусть E_1, E_2 — точки на C_1, C_2 соответствующие $s=0$. Будем считать, что совокупность трех линий, C_0, C_1 C_2, определяется тремя точками, Q_0, E_1, E_2, и данными Коши[1]) в этих точках. Наша задача состоит в том, чтобы выразить $\Omega(P_1P_2)$ через координаты Ферми точек P_1 и P_2 и данные Коши. Пусть $\lambda^i_{(\alpha)}$ — 3-репер, образованный векторами Ферми на кривой C_0. Положим $Q_1P_1=\sigma_1$, $Q_2P_2=\sigma_2$ и пусть μ^{i_1} и μ^{i_2} — единичные векторы, касательные к этим линиям в точках Q_1 и Q_2. Тогда для КФ точек P_1 и P_2 справедливы следующие формулы:



Фиг. 30. Мировая функция $\Omega\ (P_1P_2)$ в координатах Ферми.

$$P_1: X^{(\alpha_1)}=X_{(\alpha_1)}=\sigma_1\mu_{i_1}\lambda^{i_1}_{(\alpha)},\quad X^{(4)}=-X_{(4)}=s_1,$$
$$P_2: X^{(\alpha_2)}=X_{(\alpha_2)}=\sigma_2\mu_{i_2}\lambda^{i_2}_{(\alpha)},\quad X^{(4)}=-X_{(4)}=s_2. \tag{2.273}$$

Если закрепить геодезические Q_1P_1 и Q_2P_2, но менять σ_1 и σ_2 так, чтобы точки P_1 и P_2 скользили вдоль кривых в ту или другую сторону, то $\Omega(P_1P_2)$ будет функцией σ_1 и σ_2, и мы можем разложить ее в двойной степенной ряд вида

$$\Omega(P_1P_2)=\Omega(Q_1Q_2)+L_1+\frac{1}{2}L_2+\frac{1}{6}L_3+\frac{1}{24}L_4+O_5. \tag{2.274}$$

Здесь O_5 означает остаточный член пятого порядка относительно σ_1, σ_2, s_1, и s_2, если считать, что порядок каждой из этих величин есть O_1. Что касается L-членов, то они имеют вид

$$\begin{aligned} L_1&=\sigma_1(D_1\Omega)+\sigma_2(D_2\Omega),\\ L_2&=\sigma_1^2(D_1^2\Omega)+2\sigma_1\sigma_2(D_1D_2\Omega)+\sigma_2^2(D_2^2\Omega)\ \text{и т. д.} \end{aligned} \tag{2.275}$$

Здесь $D_1=\partial/\partial\sigma_1$ и $D_2=\partial/\partial\sigma_2$, а круглые скобки означают, что стоящие в них величины берутся при $\sigma_1=\sigma_2=0$, т. е. в точках Q_1 и Q_2 (они *не являются* пределами совпадения).

Придадим теперь μ^{i_1} и μ^{i_2} несколько иной смысл, считая, что они представляют собой единичные векторы, касательные к Q_1P_1 и Q_2P_2 в точках P_1 и P_2, которые рассматриваются в этом случае как текущие точки. Тогда аргументами Ω будут P_1 и P_2; мы имеем

$$\begin{aligned} D_1\Omega&=\Omega_{i_1}\mu^{i_1},\quad D_2\Omega=\Omega_{i_2}\mu^{i_2},\\ D_1^2\Omega&=\Omega_{i_1j_1}\mu^{i_1}\mu^{j_1},\quad D_1D_2\Omega=\Omega_{i_1j_2}\mu^{i_1}\mu^{j_2}\ \text{и т. д.} \end{aligned} \tag{2.276}$$

Перейдем теперь к вычислению пределов выражений, стоящих в круглых скобках, и подставим их в формулы (2.275). Появляющиеся в этом случае инварианты можно выразить через инвариантные компоненты 3-репера

[1]) В физической литературе чаще встречается эквивалентное понятие «начальные данные». — *Прим. ред.*

Ферми. Получаем следующие выражения:

$$L_1 = \Omega_{(\alpha_1)} X^{(\alpha_1)} + \Omega_{(\alpha_2)} X^{(\alpha_2)},$$
$$L_2 = \Omega_{(\alpha_1\beta_1)} X^{(\alpha_1)} X^{(\beta_1)} + 2\Omega_{(\alpha_1\beta_2)} X^{(\alpha_1)} X^{(\beta_2)} + \Omega_{(\alpha_2\beta_2)} X^{(\alpha_2)} X^{(\beta_2)},$$
$$L_3 = \Omega_{(\alpha_1\beta_1\gamma_1)} X^{(\alpha_1)} X^{(\beta_1)} X^{(\gamma_1)} + 3\Omega_{(\alpha_1\beta_1\gamma_2)} X^{(\alpha_1)} X^{(\beta_1)} X^{(\gamma_2)} +$$
$$+ 3\Omega_{(\alpha_1\beta_2\gamma_2)} X^{(\alpha_1)} X^{(\beta_2)} X^{(\gamma_2)} + \Omega_{(\alpha_2\beta_2\gamma_2)} X^{(\alpha_2)} X^{(\beta_2)} X^{(\gamma_2)}, \quad (2.277)$$
$$L_4 = \Omega_{(\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1)} X^{(\alpha_1)} X^{(\beta_1)} X^{(\gamma_1)} X^{(\delta_1)} + 4\Omega_{(\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_2)} X^{(\alpha_1)} X^{(\beta_1)} X^{(\gamma_1)} X^{(\delta_2)} +$$
$$+ 6\Omega_{(\alpha_1\beta_1\gamma_2\delta_2)} X^{(\alpha_1)} X^{(\beta_1)} X^{(\gamma_2)} X^{(\delta_2)} + 4\Omega_{(\alpha_1\beta_2\gamma_2\delta_2)} X^{(\alpha_1)} X^{(\beta_2)} X^{(\gamma_2)} X^{(\delta_2)} +$$
$$+ \Omega_{(\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2)} X^{(\alpha_2)} X^{(\beta_2)} X^{(\gamma_2)} X^{(\delta_2)}.$$

Аргументами Ω-членов служат теперь точки Q_1, Q_2 и фактически эти члены в точности совпадают с уже вычисленными в (2.269)—(2.272). Подставляя их значения из этих равенств в (2.277), мы окажемся уже вблизи от своей цели. Однако КФ, в которых записаны формулы (2.277), отнесены к P_1, P_2, а мы хотим использовать данные Коши в точках E_1, E_2. Помечая чертой сверху величины, вычисленные в точках E_1, E_2, составим выражения

$$X^{(\alpha_1)} = \overline{X}^{(\alpha_1)} + s_1 \overline{DX}^{(\alpha_1)} + \frac{1}{2} s_1^2 \overline{D^2X}^{(\alpha_1)} + O_3,$$
$$X^{(\alpha_2)} = \overline{X}^{(\alpha_2)} + s_2 \overline{DX}^{(\alpha_2)} + \frac{1}{2} s_2^2 \overline{D^2X}^{(\alpha_2)} + O_3, \quad (2.278)$$

где $D = d/ds$ (заметим, что дифференцирование выполняется не относительно меры C_1 и C_2, а относительно меры C_0, т. е. по четвертой координате Ферми). Подставим теперь эти разложения в формулы (2.277) и учтем (2.269)—(2.272). Во избежание громоздкости обозначений опустим черточки, но будем иметь в виду, что ферми-координаты и их производные берутся в точках E_1 и E_2. Производные A определяют свойства кривизны линии C_0 в точках Q_0, в этой же точке берутся и компоненты симметризованного тензора Римана (S-члены). Окончательный результат имеет следующий вид:

$$\Omega(P_1P_2) = M_2 + M_3 + N_3 + M_4 + N_4 + O_5, \quad (2.279)$$

где

$$M_2 = -\frac{1}{2}(s_2 - s_1)^2 + \frac{1}{2} r_{12}^2, \quad r_{12}^2 = (X_{(\alpha_1)} - X_{(\alpha_2)})(X^{(\alpha_1)} - X^{(\alpha_2)}), \quad (2.280)$$
$$M_3 = -\frac{1}{2}(s_2 - s_1)^2 (X^{(\alpha_1)} + X^{(\alpha_2)})(DA)_{(\alpha)}, \quad (2.281)$$
$$N_3 = (X_{(\alpha_1)} - X_{(\alpha_2)})(s_1 DX^{(\alpha_1)} - s_2 DX^{(\alpha_2)}), \quad (2.282)$$
$$M_4 = -\frac{1}{2}(s_2 - s_1)^2 S_{(\alpha44\beta)} (X^{(\alpha_1)} X^{(\beta_1)} + X^{(\alpha_1)} X^{(\beta_2)} + X^{(\alpha_2)} X^{(\beta_2)} +$$
$$+ \frac{1}{2}(s_2 - s_1) S_{(\alpha\beta\gamma4)} (X^{(\alpha_1)} X^{(\beta_1)} X^{(\gamma_2)} - X^{(\alpha_2)} X^{(\beta_2)} X^{(\gamma_1)}) +$$
$$+ \frac{1}{4} S_{(\alpha\beta\gamma\delta)} X^{(\alpha_1)} X^{(\beta_1)} X^{(\gamma_2)} X^{(\delta_2)}, \quad (2.283)$$

$$N_4 = -\frac{1}{24} b^2 (s_2 - s_1)^4 - \frac{1}{2} (s_2 - s_1)^2 (s_1 DX^{(\alpha_1)} + s_2 DX^{(\alpha_2)}) (DA)_{(\alpha)} -$$
$$- \frac{1}{2} (s_2 - s_1)^2 (DA)_{(\alpha)} (DA)_{(\beta)} X^{(\alpha_1)} X^{(\beta_2)} -$$
$$- \frac{1}{6} (s_2 - s_1)^2 \{(2s_1 + s_2) X^{(\alpha_1)} + (s_1 + 2s_2) X^{(\alpha_2)}\} (D^2 A)_{(\alpha)} +$$
$$+ \frac{1}{2} (X_{(\alpha_1)} - X_{(\alpha_2)}) (s_1^2 D^2 X^{(\alpha_1)} - s_2^2 D^2 X^{(\alpha_2)}) +$$
$$+ \frac{1}{2} (s_1^2 DX^{(\alpha_1)} DX_{(\alpha_1)} - 2s_1 s_2 DX^{(\alpha_1)} DX_{(\alpha_2)} + s_2^2 DX^{(\alpha_2)} DX_{(\alpha_2)}). \qquad (2.284)$$

В предыдущих вычислениях было использовано тождество

$$S_{(\alpha\beta 44)} = -2S_{(\alpha 44\beta)}. \qquad (2.285)$$

В качестве своего рода проверки формулы (2.279) заметим, что оно должно быть (и оно действительно является) инвариантным относительно перестановки индексов 1 и 2.

Мы проделали формальные вычисления для случая, когда σ_1, σ_2, s_1 и s_2 рассматриваются как малые величины первого порядка, причем индексы у M и N в формуле (2.279) указывают на порядок величины. Мы не делали никаких допущений относительно малости кривизны пространства — времени и кривизны трех рассмотренных здесь мировых линий, а также не предполагали, что последние близки к параллельности.

Основное следствие таких добавочных предположений заключается в понижении порядка малости безразмерных величин M_3/M_2, N_3/M_2 и т. д. Кривизна пространства — времени входит лишь в M_4, причем для плоского пространства $M_4 = 0$. С другой стороны, если C_0 — геодезическая, а координаты Ферми постоянны, то

$$M_3 = N_3 = N_4 = 0.$$

В процессе применения формулы (2.279) к физическим примерам в § 7 гл. XI для того, чтобы исследовать эффект гравитационного поля, опустим N_4, а M_4 сохраним.

Глава III

ХРОНОМЕТРИЯ В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ—ВРЕМЕНИ

§ 1. Физические наблюдения (ФН) и математические наблюдения (МН)

За исключением отдельных упоминаний о возможных физических приложениях две предыдущие главы носят чисто математический характер (риманова геометрия). В математических рассуждениях здесь могло недоставать полной логической строгости, однако можно с уверенностью утверждать, что эти главы не содержат поводов для полемики; математика вообще дает мало таких поводов, поскольку все математики придают один и тот же смысл используемым ими терминам.

К той же категории наук относится и экспериментальная физика. Однако этого нельзя сказать о теоретической физике нашего времени и едва ли будет возможным — о теоретической физике будущего. Это неизбежно, так как цель теоретической физики состоит в том, чтобы втиснуть чрезвычайно сложный механизм природы в узкую математическую форму, прибегая к идеализациям и упрощениям, которые совершенно необходимы и (несочувствующему уму) кажутся совершенно нелепыми.

Поскольку основой физической науки служат наблюдения, полезно перечислить четыре типа наблюдений[1]), а именно.

1. Неконтролируемые физические наблюдения (НФН),
2. Контролируемые физические наблюдения (КФН),
3. Воображаемые физические наблюдения (ВФН),
4. Математические наблюдения (МН).

} (ФН)

Смысл, вкладываемый нами в эти понятия, лучше всего пояснить на примерах. НФН выполняются астрономами, когда они наблюдают звезды или фотографируют участки неба, а также метеорологами, когда последние взвешивают дождевые капли. С КФН имеют дело физики при хронометрировании простейшего маятника или при наблюдении рассеяния пучка протонов, создаваемого ускорителем. ВФН выполняют физики, заранее планируя эксперимент, или астрономы, обсуждая структуру обратной стороны Луны[2]) или положение Юпитера за столетия вперед. Однако НФН, КФН и ВФН не разграничены совершенно резко. *Сегодняшние* НФН могут *завтра*

---

[1]) Ни *наблюдение*, ни *эксперимент* нельзя считать полностью подходящим словом. Для простоты и единообразия мы используем слово *наблюдение*, хотя в некоторых контекстах слово *эксперимент* отражало бы суть дела значительно вернее.

[2]) После того как были написаны эти строки, ВФН Луны превратились в НФН.

стать КФН, и наоборот. Каждое наблюдение следует считать ВФН до того, как оно выполнено (это относится и к НФН, и к КФН). Возможно, лучше забыть о различиях между НФН, КФН и ВФН и объединить их под общим названием ФН.

Между ФН и МН существует четкое и определенное различие. Лишь наиболее простые МН (счет) можно рассматривать одновременно и как ФН (например, наблюдение, состоящее в констатации того, что число 23 — простое). В общем случае в МН входят операции с бесконечностью (иррациональные числа, дифференциальное исчисление и т. д.) и они, таким образом, лежат вне физики и вне природы (за исключением разве тех случаев, когда объект человеческого мышления материален). Примерами МН могут служить совпадение биссектрис углов в евклидовой геометрии или эллиптичность орбит планет в ньютоновой астрономии. И первое и второе наблюдения бессмысленны в терминах ФН, ибо в природе не существует ни прямых линий евклидовой геометрии, ни эллипсов ньютоновой теории.

Одна из самых удивительных и необычных особенностей теоретической физики состоит в умении извлечь полную смысла истину из бессмысленного уравнения МН=ФН, представляющего собой символическую форму утверждения, что физические явления подчиняются точным математическим законам[1]. О существующем в действительности неравенстве ФН$\neq$МН лучше не говорить громче, чем шепотом, ибо это чрезвычайно опасно. Стоит поверить этому неравенству, как тут же окажется разорванной связь между физикой и математикой и как та, так и другая станут бесплодными, потеряв возможность взаимного оплодотворения. Здесь мы позволим себе сказать об этом шепотом лишь в качестве извинения перед читателем, который надеялся увидеть математику и физику общей теории относительности, связанными прочными цепями ясной и последовательной логической мысли. Это невозможно. Сначала и до конца нам неизбежно придется изворачиваться, действуя наобум. И если в этой книге будут допущены некорректности при различении МН и ФН, то их будет не больше, чем допущено (и с необходимостью должно быть допущено) во всех аналогичных книгах. Такого рода печальное положение дел присуще не только общей теории относительности; формула МН $\neq$ ФН — вечный спутник любой области математической физики.

Предыдущие замечания представляют собой не более чем попытку дать краткое введение в предмет, о котором можно написать целые книги, а неизбежная путаница в котором столь велика, что любой автор может считать себя вполне удовлетворенным, если ему удалось уменьшить ее в самой малой мере — тщетно было бы пытаться избежать ее полностью. Проникнемся, однако, пониманием того, что эта трудность, эта возможность впасть в заблуждение существует, так как лишь такое понимание позволит нам избежать споров яростных и бурных, но ровным счетом ни к чему не приводящих. Некоторые осложнения, возникающие в такой ситуации, превосходно рассмотрены Бриджменом [86] в заметке, посвященной обсуждению ценности и ограничений так называемого *операционного метода*, в котором смысл того или иного термина понимается, исходя из операций, выполняемых в процессе его применения. Пользуясь именно этим методом, Эйнштейн дал убедительную аргументацию против абсолютного ньютоновского времени. Однако Бриджмен обвиняет Эйнштейна в том, что последний не сумел распространить этот метод на общую теорию относительности. Настоящая книга представляет собой попытку сделать общую теорию относительности «более операционной», чем она была до сих пор. Однако у меня

[1]) Даже в рамках формальной логики автор упускает альтернативу: «математические законы отражают приближенно некоторые физические явления».— *Прим. ред.*

нет ложной уверенности в полной безукоризненности этого метода, и чем дальше мы будем углубляться в наши рассуждения, тем менее ясно будет и автору и читателю, к какому классу относятся рассматриваемые «эксперименты» (иногда их называют *идеальными* или *мысленными экспериментами*) — к классу МН или к классу ФН. На этом вопросе мы еще раз кратко остановимся в § 3, а затем оставим его совсем.

§ 2. Хронометрия и римановы гипотезы

Ключевое понятие теории относительности — *событие*[1]). Множество всех возможных событий (точек[2])) образует четырехмерный континуум, называемый *пространством — временем*, координаты x^i в котором можно выбрать большим числом различных способов.

Введем понятие *материальной частицы*. Траектория ее движения представляет собой последовательность точек (событий) — кривую в пространстве — времени. Назовем эту кривую *мировой линией*.

Введем также понятие *временнóй последовательности* на мировой линии материальной частицы так, чтобы любая точка на этой мировой линии разделяла все другие точки на два класса — *прошедшее* и *будущее*.

В качестве меры *времени* на мировой линии материальной частицы можно было бы использовать любой непрерывный параметр, монотонно возрастающий при переходе от прошедшего к будущему. Однако в силу своей произвольности такая мера времени не имела бы большого физического смысла. Понятие времени приобретает более конкретный смысл, если предположить существование *стандартных часов*, которые можно жестко связать с материальными частицами. Ход этих часов определяет меру *собственного времени*. Поскольку в теории относительности существенную роль играет только эта мера времени, мы будем прилагательное *собственное* опускать и говорить просто о *времени*[3]).

Таким образом, приняв в качестве отправного пункта измерение времени вдоль мировой линии материальной частицы, мы установили понятие *хронометрии*. Наблюдение этого времени есть математическое наблюдение (МН): было бы глупо задавать вопрос о цвете глаз наблюдателя, так как математические наблюдения выполняются безликими роботами. Однако отнюдь не глупо ставить вопрос о том, с помощью какого рода приборов производится *физическое* наблюдение (ФН) времени. При обсуждении таких вопросов целесообразно прибегнуть к методичной последовательности и давать ответы в рамках словесной формы, напоминающей форму словаря. В данном случае можно образовать следующую группу словарных «гнезд», составив таблицу, в первой колонке которой стоят математические, а во второй — соответствующие физические термины:

МН	ФН
Время	Время
Стандартные часы	Атом
Ход стандартных часов	Испускание гребней волн излучения

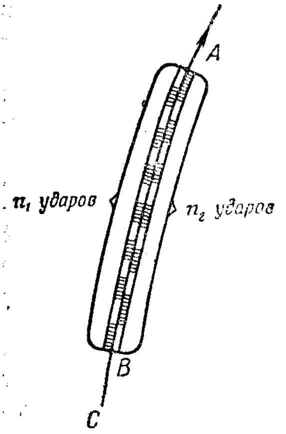
[1]) *Событие*, а также другие понятия, обсуждаемые здесь, были рассмотрены почти с такой же точки зрения, но более детально — в книге Синга ([1190], гл. I).

[2]) Наряду с термином *событие* будем употреблять термин *точка*.— *Прим. ред.*

[3]) Позднее нам придется ввести понятие *координатного времени*; здесь не должно возникать никакой путаницы.

Чтобы пояснить смысл ФН (правый столбец), обратимся к простому примеру излучения, генерируемого возбужденным атомом, и представим себе электромагнитную радиацию, высвобождаемую в виде строго определенных волн. Какой атом и какие уровни энергии участвуют в этом процессе? Ответ гласит: это не существенно, если мы используем лишь один и тот же тип атомов (все атомы одного и того же типа считаются идентичными) и одну и ту же пару энергетических уровней. Для определенности можно взять атом кадмия при излучении красной линии.

Необходимо исследовать здесь некоторые физические допущения, присущие внутренней структуре теории относительности. Пусть C (фиг. 31) — мировая линия материальной частицы, а B и A — две точки, лежащие на этой линии, причем B предшествует A. Каждая частица несет на себе стандартные часы. Часы отличаются друг от друга тем, что атомы, из которых они состоят,— разного типа. Возможен и другой вариант — атомы однотипны, но излучают с разных энергетических уровней. Каждые из часов регистрируют определенное число ударов «маятника» между B и A. Обозначим эти числа через n_1 и n_2. Физические предположения, о которых мы только что упоминали, формулируются в виде следующей *гипотезы о согласованности* (хода часов). *Для двух стандартных часов отношение* $n_1 : n_2$ *есть естественная константа, не зависящая от мировой линии, на которой проводятся наблюдения, и от точек на этой мировой линии.* Современная умозрительная картина атома и испускаемой им радиации настолько расплывчата, что было бы нелепо ожидать прямого и определенного ответа на вопрос о том, справедлива ли предлагаемая гипотеза. Лучшее, что можно сделать,—это констатировать, что не существует никаких указаний на несправедливость этих гипотез с точки зрения данных спектроскопии (ФН) (если не учитывать ширины линий). Из этого мы и будем исходить при построении физики общей теории относительности. Без этого мы были бы вынуждены либо отказаться от общей теории относительности в ее современной форме, либо принять странное предположение о том, что, независимо от всех возможных атомных часов, существуют одни, или, может быть, целый привилегированный класс таких часов, которые позволяют измерять время, в каком-то смысле играющее действительно важную роль. С другой стороны, вооружившись гипотезой о согласованности, мы можем, как было принято выше, считать частный выбор используемых часов несущественным, так как единица времени меняется лишь при переходе от одних часов к другим, причем отношение двух единиц измерения — универсальная постоянная. Важно, однако, отметить, что природа не предписывает естественной единицы времени и при установлении уравнений теории относительности это следует иметь в виду. Но мы тем не менее будем для простоты предполагать, что раз и навсегда выбраны некоторые определенные стандартные часы — можно было бы взять хотя бы атом кадмия, испускающий красную линию. Поскольку отныне все часы будут считаться стандартными, мы опустим это прилагательное и будем называть их просто *часами*.



Фиг. 31. Согласованность хода стандартных часов.

Переходим теперь к существу общей теории относительности к хронометрическим предположениям, благодаря которым пространство — время можно считать римановым. Пусть x^i и $x^i + dx^i$ — координаты двух соседних точек на траектории движения материальной частицы. Пусть ds соответ-

ствует времени, регистрируемому часами, связанными с этой частицей. Тогда ds есть функция x^i и dx^i, с необходимостью однородная относительно первых степеней дифференциалов. Мы принимаем *гипотезы Римана*:

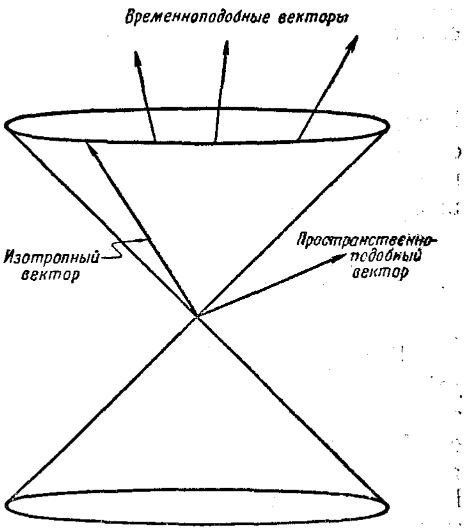
$$ds^2 = -g_{ij}\,dx^i\,dx^j, \tag{3.1}$$

где $g_{ij}(=g_{ji})$ — функция x^i. Тензорный характер g_{ij} следует из инвариантности ds (интервал был определен безотносительно к какой-либо частной системе координат). Допустим, далее, что квадратичная форма

$$\Phi = g_{ij}\,dx^i\,dx^j, \tag{3.2}$$

как и в гл. I, § 2, имеет сигнатуру + 2. Чтобы соответствие (в математическом отношении) с гл. I стало более полным, мы будем предполагать существование в пространстве — времени допустимых координат, для которых, как мы помним, g_{ij} и его первые производные непрерывны.

Теперь квадратичной форме Φ придан физический смысл, ибо $ds = (-\Phi)^{1/2}$, а эту величину можно измерить с помощью часов, связанных с частицей. Однако это возможно лишь в случае, когда Φ отрицательна; если Φ положительна, то ds, согласно (3.1), становится мнимой величиной.



Фиг. 32. Элементарный изотропный конус и временноподобные, изотропные и пространственноподобные векторы.

В общей теории относительности в связи с вопросом о физическом смысле Φ возникало немало недоразумений. Это было отражением запутанной и полумистической позиции, которую занимали в геометрии математики до Гильберта. Похоже на то, что Φ мыслилась как имеющая две, коренным образом отличающиеся одна от другой физические интерпретации в зависимости от того, отрицателен или положителен знак Φ. Когда Φ отрицательна, мы имеем хронометрическую интерпретацию, в точности совпадающую с изложенной выше. Положительные Φ было широко принято считать мерами *длины*. В этой книге мы не разделяем подобную точку зрения. Для нас единственной *основной мерой является время*. Длина (или расстояние), поскольку возникнет необходимость или желательнсть их введения, будет рассматриваться как строго производное понятие.

Теперь мы пришли к задаче придания физического смысла римановой геометрии, изложенной в двух первых главах. Фактически мы имеем дело с римановой *хронометрией*, а не с *геометрией*, и слово *геометрия*, внушающее опасение, что нам, чего доброго, придется возиться с измерениями *длин* с помощью *метровой линейки*, можно было бы в этой связи полностью исключить из употребления, если бы грубое буквальное значение понятия геометрии не приобрело глубокой связи с абстрактными математическими определениями «пространства», «метрик» и т. д.

На фиг. 32 изображен элементарный изотропный конус в точке событий. Временноподобные векторы лежат внутри конуса; физически в них можно узнать касательные к возможным четырехмерным траекториям материальных частиц. Изотропные векторы лежат на изотропном конусе; физически

мы отождествляем их с касательными к возможным четырехмерным траекториям движения *фотонов* (квантов света) при условии, что в сплошной среде фотоны имеют очень высокую энергию. (Вплоть до гл. XI слово *фотон* будет пониматься в этом смысле.) Пространственноподобный вектор лежит вне изотропного конуса; кривая, касательную к которой он образует, не может быть траекторией частицы или фотона.

Но все эти интерпретации отдельных элементов касаются лишь деталей и будут общими и для специальной, и для общей теории относительности. Сущность общей теории относительности Эйнштейна состоит в предположении о том, что влияние гравитационных свойств природы обнаруживает себя в кривизне риманова пространства—времени. Если бы тензор Римана R_{ijkm} для метрики (3.1.) обратился в нуль, мы снова пришли бы к плоскому пространству — времени специальной теории относительности, т. е. к пространству — времени без гравитации. По существу, можно символически записать

$$R_{ijkm} = \text{Поле гравитации.}$$

В гл. IV мы исследуем уравнения поля, связывающие кривизну пространства — времени с присутствующей в нем материей. Пока же будем просто предполагать, что пространство — время искривлено, не указывая конкретных причин его искривления.

§ 3. Гипотезы геодезических

В ньютоновской физике частицу называют *свободной*, если на нее не действуют никакие силы, в том числе и гравитационные. В теории относительности понятие силы гравитации отсутствует, так как гравитационные свойства органически входят в структуру пространства — времени и проявляются в кривизне пространства — времени, т. е. в том, что тензор Римана R_{ijkm} отличен от нуля. В качестве сил мы признаем лишь эффекты механических напряжений и электромагнитных полей; встав на такую точку зрения, мы вместе с Ньютоном можем утверждать, что частица свободна, когда на нее не действуют силы.

Мы полагаем, что частица обладает инвариантной *собственной массой* m и эта масса постоянна. Поскольку под *массой* мы всюду будем понимать *собственную массу*, прилагательное оказывается излишним и мы его опустим. Частица имеет также мировую линию, причем ее 4-*скорость* V^i есть единичный вектор, касательный к этой мировой линии, так что

$$V^i = \frac{dx^i}{ds}, \quad V_i V^i = -1. \tag{3.3}$$

Определим 4-*импульс* частицы как

$$p^i = mV^i. \tag{3.4}$$

Как естественное обобщение первого закона Ньютона, примем *гипотезы геодезических*: мировая линия свободной частицы есть геодезическая в пространстве — времени. Символически это записывается в следующем виде:

$$DV^i = 0 \quad \left(D = \frac{\delta}{\delta u}\right), \tag{3.5}$$

где u — некоторый (канонический.— *Ред.*) параметр, монотонно меняющийся вдоль мировой линии в (качестве этого параметра, в частности, можно

выбрать время s). Предполагая m постоянной, с помощью (3.4) и (3.5) получаем уравнение

$$Dp^i = 0, \tag{3.6}$$

т. е. 4-импульс свободной частицы претерпевает параллельный перенос.

Рассмотренная частица — материальная. Масса фотона равна нулю ($m = 0$), однако фотон также несет *4-импульс* p^i. Дополним гипотезы геодезических, так чтобы включить в рассмотрение и фотон: предположим, что мировая линия фотона есть изотропная геодезическая. Примем, кроме того, добавочное предположение о том, что p^i— вектор, касательный к мировой линии, и что он претерпевает вдоль последней параллельный перенос, так что уравнение (3.6) справедливо и для фотона, и для материальной частицы.

В гл. I было показано, что любая геодезическая (и изотропная, и неизотропная) допускает класс канонических параметров u (определенных лишь с точностью до линейного преобразования), для которых уравнения геодезической имеют вид

$$D\frac{dx^i}{du} = 0 \qquad \left(D = \frac{\delta}{\delta u}\right). \tag{3.7}$$

Если использовать один из таких канонических параметров на мировой линии материальной частицы или фотона, то получим

$$p_i = \theta\frac{dx^i}{du}, \tag{3.8}$$

где θ — некоторый скаляр. Применяя к (3.8) оператор D и учитывая (3.6) и (3.7), получаем

$$D\theta\frac{dx^i}{du} = 0, \qquad D\theta = 0, \tag{3.9}$$

так что θ постоянен вдоль мировой линии. В случае материальной частицы среди данного класса канонических параметров один имеет выделенное значение, а именно $u = s$ (время). В случае же фотона $s = 0$, так что выделенный параметр следует искать другим способом. Наиболее простым оказывается требование $\theta = 1$. Оно приводит к выделенному каноническому параметру u, такому, что

$$p^i = \frac{dx^i}{du}. \tag{3.10}$$

Поступив аналогичным образом в случае материальной частицы, мы получим выделенный канонический параметр u, такой, что

$$du = \frac{ds}{m}. \tag{3.11}$$

Как бы все это просто ни звучало и как бы удовлетворительным это ни выглядело с точки зрения МН (МН понимаются в смысле § 1), мы ступаем по границе с противоречивостью. Физик имеет полное право потребовать, чтобы ему дали примеры материальных частиц или фотонов, которые он мог бы рассмотреть своими глазами или ощутить руками через посредство соответствующих приборов. Можно ли считать, что материальная частица — это, скажем, Солнце, Луна, ракета или атом водорода? Можно ли взять в качестве фотона пучок γ-лучей или радиоволн? Если бы наша цель состояла исключительно в построении рациональной математической схемы, которую мы решили назвать «теорией относительности», то требование дать такого рода примеры следовало бы отбросить прочь так же уверенно, как отбрасывается требование изготовить линейку длиной $\sqrt{2}$ *см*, ибо каждый

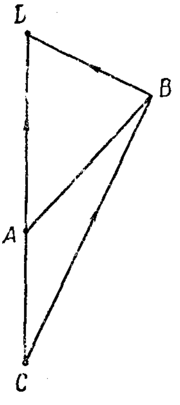
знает, что иррациональные числа относятся к МН, а не к ФН. Наши частицы и фотоны в такой же мере искусственны.

Позднее мы будем иметь дело с движением конечных количеств материи и электромагнитных волн, и можно было бы ждать, что в этом случае трудность перехода от МН к ФН будет преодолена с помощью предельного перехода, при котором тело конечных размеров сжимается в точку, и то же самое происходит с плотностью электромагнитного поля. Такого рода соображения, действительно, проливают свет на трудность сложившегося положения; однако они не разрешают этих трудностей.

Наилучшим вариантом сейчас будет просто сказать, что мы занимаемся построением логически последовательной математической схемы (МН), наклеивая при этом некоторые физические ярлыки (с адресами соответствующих ФН), и практичный физик должен прибегнуть к суду собственного опыта при истолковании надписей на этих ярлыках. Такого рода процедура стала обычной фактически во всех областях теоретической физики.

§ 4. Пространственная мера, ортогональность и скалярные произведения[1])

Две соседние точки определяют бесконечно малый вектор в пространстве — времени. Если этот фактор временноподобен, его мера (величина) имеет простой физический, или хронометрический смысл: это время, измеренное часами, движущимися вместе с частицей, траектория которой содержит обе эти точки. Если же вектор пространственноподобен, то эта интерпретация становится неверной, поскольку такие две точки не могут лежать на траектории одних и тех же часов. Тем не менее, как мы сейчас покажем, бесконечно малые пространственноподобные векторы можно измерять хронометрически.



Фиг. 33. Пространственная мера или длина AB, определенная хронометрически (заметьте, что линия AB стрелки не имеет!).

На фиг. 33 изображен бесконечно малый пространственноподобный вектор AB. Проведем через точку A временноподобную кривую, и пусть C и D — точки, в которых эта кривая пересекает изотропный конус с вершиной в точке B. Это — физическое построение, поскольку можно потребовать, чтобы ломаная CAD представляла траекторию частицы, а изотропные линии CB и BD — траектории фотонов. Работая в бесконечно малой области и используя для бесконечно малых векторов обычные обозначения, имеем

$$BD^i = AD^i - AB^i, \quad CB^i = CA^i + AB^i. \qquad (3.12)$$

Учитывая изотропный, пространственноподобный и временноподобный характер входящих сюда векторов, получаем

$$\begin{gathered} BD_iBD^i = 0, \quad CB_iCB^i = 0, \quad AD_iAD^i = -AD^2, \\ CA_iCA^i = -CA^2, \quad AB_iAB^i = AB^2, \end{gathered} \qquad (3.13)$$

где AD, CA, AB — римановы меры при условии, что AD и CA — времена,

[1]) Кривизна пространства — времени здесь не играет никакой роли, поэтому полученные выводы будут общими и для специальной, и для общей теории относительности; см. книгу Синга [1190], гл. III которой может, в частности, принести значительную пользу читателю, которому пространственно-временные схемы кажутся трудными для понимания.

измеренные с помощью часов, движущихся по CAD. В данной бесконечно малой области имеет также место соотношение

$$CA^i = \theta AD^i, \quad CA = \theta AD, \tag{3.14}$$

где θ — положительный скаляр. Из (3.12) и (3.13) получаем

$$\begin{aligned} -AD^2 - 2AD_i AB^i + AB^2 = 0, \\ -CA^2 + 2CA_i AB^i + AB^2 = 0. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Исключая с помощью (3.14) средние члены, в левой части (3.15) получаем формулу

$$AB^2 = \theta AD^2 = CA \cdot AD, \tag{3.16}$$

которая выражает пространственноподобную меру AB через хронометрические меры CA, AD. Назовем эту меру *длиной* бесконечно малого пространственноподобного вектора.

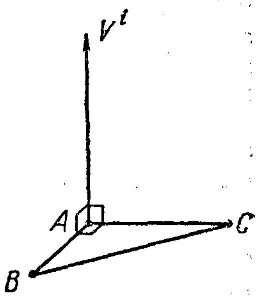
Если окажется, что $CA = AD$, то $\theta = 1$, и мы имеем

$$AB = CA = AD, \tag{3.17}$$

и из (3.15) следует выражение

$$AD_i AB^i = 0, \tag{3.18}$$

которое представляет собой условие *ортогональности* AB^i и AD^i. Таким образом, мы пришли к хронометрической интерпретации ортогональности двух векторов, один из которых пространственноподобен, а другой временноподобен.



Фиг. 34. Ортогональность двух пространственноподобных векторов и временноподобный вектор, ортогональный к ним.

Другой важный случай ортогональности — ортогональность двух пространственноподобных векторов. Существует ∞^1 временноподобных направлений (как, например, V^i на фиг. 34), ортогональных [1]) к любой наперед заданной ортогональной пространственноподобной паре (AB и AC на фиг. 34). Условие ортогональности для пары пространственноподобных векторов имеет вид

$$AB_i AC^i = 0. \tag{3.19}$$

Легко показать (вводя специальные локальные координаты), что последнее соотношение эквивалентно формуле Пифагора

$$BC^2 = AB^2 + AC^2. \tag{3.20}$$

Так как векторам AB, BC, AC уже был дан хронометрический смысл, то это — хронометрическое уравнение.

Скалярное произведение векторов играет в физике весьма важную роль, и было бы естественным желание иметь прямую физическую (т. е. хронометрическую) интерпретацию для каждого скалярного произведения, которое можно построить. Часть этой программы уже выполнена — уравнение (3.15) позволяет дать хронометрическую интерпретацию скалярного произведения двух бесконечно малых векторов, один из которых временноподобен, а другой пространственноподобен. Подробное и систематическое изучение вопроса, связанного с такой интерпретацией, было бы слишком

[1]) Определенный парой неортогональных пространственноподобных направлений двумерный элемент может пересекать изотропный конус. В этом случае нельзя установить временноподобное направление, ортогональное к обоим упомянутым выше.

громоздким. Представляется более целесообразным пойти дальше, не останавливаясь на этом вопросе, указав, однако, следующие математические факты, касающиеся скалярных произведений.

1. Если U^i и V^i— два единичных вектора, каждый из которых временноподобен и направлен в будущее, то

$$U_i V^i \leqslant -1. \tag{3.21}$$

2. Если V^i— фиксированный временноподобный вектор, а U^i— пространственноподобный единичный вектор произвольного направления, то $U_i V^i$ может принимать все возможные вещественные значения.

3. Если V^i— временноподобный вектор, а N^i— изотропный вектор, причем оба они направлены в будущее, то

$$N_i V^i < 0. \tag{3.22}$$

В § 3 мы встретились с понятием 4-импульса p^i материальной частицы и фотона. Мы могли бы назвать первые три компоненты p^i 3-импульсом, а четвертую компоненту p^4— энергией. Однако более правильно сохранить эти важные физические названия для инвариантов, поскольку значения компонент вектора, разумеется, зависят от выбора координатной системы. Поэтому мы отложим определение 3-импульса до следующего параграфа, а здесь *определим* лишь *энергию относительно наблюдателя, имеющего 4-скорость* V^i с помощью формулы

$$E = -p_i V^i. \tag{3.23}$$

Это определение применимо, естественно, лишь в том случае, если траектории наблюдателя и материальной частицы (или фотона) имеют общую точку, причем E вычисляется именно в этой точке. Знак в формуле (3.23) выбран так, чтобы [см. (3.21) и (3.22)] величина E была положительной, когда и V^i и p^i направлены в будущее. Это — нормальное положение вещей; однако в случае p^i могли возникнуть колебания, так как в современной физике существуют некоторые указания на то, что p^i может быть направлен в прошедшее. Это означало бы, что энергия отрицательна.

§ 5. Жесткость в смысле Борна и системы отнесения

Рассмотрим ∞^1 временноподобных кривых, вообще говоря, не геодезических. Они образуют двумерное пространство W_2, в котором можно провести ортогональные траектории заданной системы кривых, так что получится сетка (фиг. 35). Параметризуем W_2 таким образом, чтобы его уравнение имело вид $x^i = x^i(u, v)$, где $v = \text{const}$ на каждой из временноподобных кривых, а $u = \text{const}$ на каждой из ортогональных траекторий. Как и в (1.125), полагаем

$$\frac{\partial x^i}{\partial u} = U^i, \quad \frac{\partial x^i}{\partial v} = V^i, \tag{3.24}$$

и для вектора отклонения, проведенного из точки на временноподобной кривой (v) к временноподобной кривой $(v + \delta v)$, имеем формулу, совпадающую с (1.127):

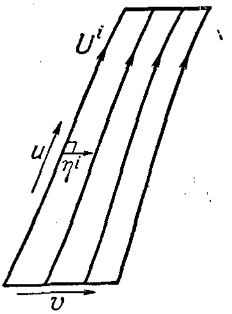
$$\eta^i = V^i \delta v. \tag{3.25}$$

Вследствие ортогональности имеем по построению

$$U_i V^i = 0, \tag{3.26}$$

т. е. вектор η^i ортогонален U^i всюду на W_2.

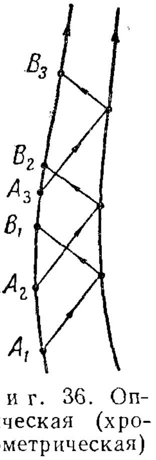
Абсолютная величина вектора отклонения η, вообще говоря, меняется по мере перемещения вдоль одной из этих временноподобных кривых. Следуя определению, сформулированному в специальной теории относительности Борном, мы будем говорить, что две соседние временноподобные кривые *жестко связаны*, если при перемещении вдоль этих кривых η = const.



Фиг. 35. Жесткость по Борну ($d\eta/du = 0$).

Поскольку, как это было показано в предыдущем параграфе, вектор η имеет хронометрическую меру, *жесткость* можно проверить на опыте, посылая фотоны от одной временноподобной кривой к другой и улавливая рассеянные (или отраженные) фотоны. Критерий жесткости состоит в том, что время, прошедшее с момента излучения до момента приема (*время путешествия*), должно быть постоянным. Этот опыт проиллюстрирован на фиг. 36, где времена путешествия представляют собой хронометрические меры A_1B_1, A_2B_2... и т. д. В этих рассуждениях нет ничего особенно нового, ибо такая проверка жесткости с помощью измерения времени путешествия на самом деле ничем не отличается от измерения длин с помощью интерферометра — прибора, служащего, по существу, средством сравнения времен путешествия.

Хотя применительно к одномерному телу (стержню) критерий Борна для жесткости не содержит трудностей, с возрастанием числа измерений эти трудности возрастают, и следует особо подчеркнуть, что в трехмерном случае понятие жесткости из ньютоновской физики в теорию относительности «*не переходит*». Следовало бы относиться сообенно скептически ко всем релятивистским рассуждениям, в которых используется или предполагается концепция жесткости, словно смысл этого слова ясен и очевиден. В связи с этим необходимо проверить и переопределить понятие системы (отнесения) (в ньютоновской физике твердого тела).



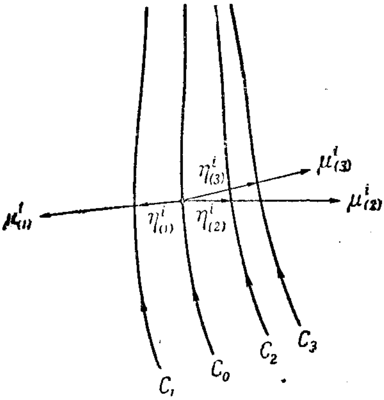
Фиг. 36. Оптическая (хронометрическая) проверка жесткости по Борну ($A_1B_1 = A_2B_2 = \ldots$).

Трудности, возникающие при определении жесткости в теории относительности, связаны с неинтегрируемостью[1]) и их можно устранять, работая в бесконечно малой области. Начнем с рассмотрения временноподобной кривой C_0 (фиг. 37), которую будем считать заданной; она могла бы быть мировой линией наблюдателя, находящегося на Земле (или его глаза, или части фотопластинки, или даже угла комнаты). Рассмотрим также три временноподобных кривых C_1, C_2, C_3, положениями которых можно управлять. Фактически было бы достаточно двух, но ради симметрии лучше взять три. Эти кривые следует мыслить как мировые линии частиц, относительное положение которых можно регулировать с помощью винтов или других приспособлений. Четыре мировые линии *могли бы* быть четырьмя соседними углами каменного бруска (но в этом случае следует быть готовым суметь деформировать камни, что потребуется для соблюдения условий, которые мы сейчас наложим).

Каждая из трех «регулируемых» мировых линий имеет три степени свободы. Таким образом, всего в нашем распоряжении *девять* степеней свободы. Будем так смещать эти мировые линии, чтобы для каждой пары

[1]) Речь идет о неинтегрируемости римановой связности.— *Прим. ред.*

выполнялось условие жесткости Борна. Поскольку всего можно образовать *шесть* пар, то мы используем при этом шесть степеней свободы, оставив *три* из них неиспользованными. Заметим, что управляемые операции относятся к физическим (хронометрическим).



Фиг. 37. Система координат, определенная с помощью C_0, C_1, C_2 и C_3.

Не касаясь большего числа степеней свободы, будем выполнять регулирование несколько более определенным образом, потребовав, чтобы три вектора отклонения, проведенные из C_0, были равными по абсолютной величине и взаимно ортогональными. Тогда в трехмерном подпространстве, ортогональном к C_0, мы получим малый жесткий тетраэдр $C_0C_1C_2C_3$, как это показано на фиг. 38, где изображены также единичные векторы $\mu^i_{(\alpha)}$, проведенные в направлениях векторов отклонения $\eta_{(\alpha)}$. Этот ортонормированный репер $\mu^i_{(\alpha)}$ образует *систему координат.*

Фактически в качестве системы отнесения можно взять *любую* ортонормированную триаду (3-репер), ортогональную к 4-скорости мировой линии C_0 наблюдателя. Все, что мы делали выше, преследовало единственную цель — придать математическим понятиям физический (хронометрический) смысл, так чтобы любой астроном, строящий систему координат, знал, как к этому подойти. Из всех систем отнесения математически самой простой оказывается ферми-триада (3-репер) (см. гл. I, § 4 и гл. II, § 10), которая в обозначениях (2.180) удовлетворяет уравнению

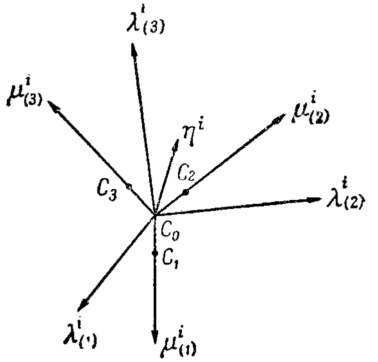
$$\frac{\delta}{\delta s}\lambda^i_{(\alpha)} = bA^i\lambda^j_a B_j. \qquad (3.27)$$

Если $\mu^i_{(\alpha)}$ — какая-нибудь другая ортонормированная триада, ортогональная C_0, то существует ортогональная матрица $M_{(\alpha\beta)}$, элементы которой представляют собой девять взаимнонаправляющих косинусов, такая, что

$$\mu^i_{(\alpha)} = M_{(\alpha\beta)}\lambda^i_{(\beta)}, \qquad M_{(\alpha\beta)}M_{(\alpha\gamma)} = \delta_{\beta\gamma}. \qquad (3.28)$$

Матричные элементы $M_{(\alpha\beta)}$ являются функциями s (время на C_0) и, поскольку производная ортогональной матрицы есть кососимметричная матрица, то можно записать

$$\frac{d}{ds}M_{(\alpha\beta)} = \omega_{(\alpha\beta)} = -\omega_{(\beta\alpha)}, \qquad (3.29)$$



Фиг. 38. Система координат $\mu^i_{(\alpha)}$, видимая в трехмерном элементе, ортогональном к C_0 и 3-репер Ферми $\lambda^i_{(\alpha)}$.

где три независимые компоненты $\omega_{(\alpha\beta)}$ фактически представляют собой компоненты *угловой скорости* вращения $\mu^i_{(\alpha)}$ относительно $\lambda^i_{(\alpha)}$.

У нас есть еще три степени свободы для управления мировыми линиями C_1, C_2, C_3, определяющими $\mu^i_{(\alpha)}$, и мы можем использовать их для того, чтобы обратить $\omega_{(\alpha\beta)}$ в нуль. В этом случае система отнесения становится ферми-системой. Как мы увидим позднее, эта система бывает очень полезна в физических задачах.

Все, что было сделано выше, носит отчасти физический, а отчасти математический характер. Ортонормальность $\mu^i_{(\alpha)}$ имеет физический (хронометрический) смысл, тогда как закон Ферми (3.27) — просто математический факт. Более полное физическое истолкование можно дать, лишь рассмотрев с физической точки зрения смысл переноса Ферми (что будет сделано позднее). Пока же будем пользоваться переносом Ферми так, как будто это физически вполне понятная вещь.

Как только мы обзавелись системой отнесения $\mu^i_{(\alpha)}$ (Ферми или какой-нибудь другой), нетрудно записать подходящее определение 3-импульса материальной частицы (или фотона) относительно этой системы:

$$p_{(\alpha)} = p_i \mu^i_{(\alpha)}. \tag{3.30}$$

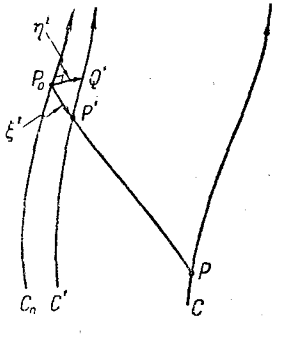
Обозначив 4-скорость C_0 через $\mu^i_{(4)}$, мы можем объединить 3-импульс и энергию [см. (3.23)] с помощью формулы

$$p_{(\alpha)} = p_i \mu^i_{(\alpha)}, \qquad E = -p_{(4)} = p^{(4)}, \tag{3.31}$$

причем здесь подразумеваются правила, указанные в (1.54).

§ 6. Измерение направления

Взаимосвязанные понятия *направления* и *угла* играют в ньютоновской физике настолько фундаментальную роль, что трудно себе представить необходимость их переопределения в теории относительности. Задача состоит в определении направления некоторого объекта с мировой линией C относительно наблюдателя с мировой линией C_0, причем мы должны помнить, что наблюдатель C_0 может получать информацию о C лишь с помощью каких-либо сигналов, исходящих из C и достигающих C_0. «Сигналами» могли бы служить свободные частицы или фотоны в вакууме, однако мы встанем на более общую точку зрения и предположим лишь, что «сигналы» распространяются вдоль некоторой временноподобной или изотропной мировой линии. Чтобы наблюдатель C_0 мог «доложить» о направлении, вдоль которого прибыл «сигнал», он должен иметь ловушку, имеющую другую мировую линию C', смежную с C_0 и «отрегулированную» так, чтобы мировая линия «сигнала» пересекала C'. Именно так обстоит дело при наблюдении звезды астрономом: при этом C_0 — мировая линия глаза, а C' — мировая линия центра линзы объектива телескопа. Если расстояние между C_0 и C' конечно, то возникают различные усложнения, в которые нет смысла углубляться, так как прибор, с помощью которого проводится наблюдение, практически очень мал по сравнению с параметрами наблюдаемого явления; нас вполне устроит предположение, что расстояние между C_0 и C' бесконечно мало. На фиг. 39 показана мировая линия «сигнала», покидающего объект C в точке P, пересекающего мировую линию C' в точке P' и, наконец, достигающего наблюдателя C_0 в точке P_0. Именно бесконечно малый вектор ξ^i, проведенный от P_0 к P', и следует использовать для определения направления C относительно C_0.



Фиг. 39. Наблюдение направления.

Пусть $\mu^i_{(\alpha)}$ — система отнесения на C_0, аналогичная рассмотренной в предыдущем параграфе.

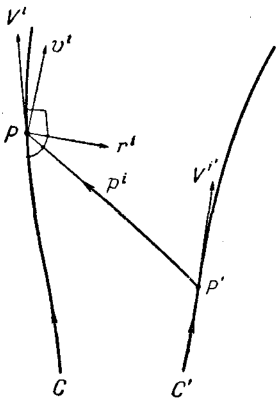
Так как ξ^i не ортогонален C_0, то его невозможно было изобразить на фиг. 38. Однако если перемещаться вдоль линии C' до ее пересечения в точке Q' с трехмерным элементом, ортогональным линии C_0 в точке P_0, мы получим вектор η^i $(= P_0Q')$, который можно изобразить на фиг. 38 и который относительно 3-репера $\mu^i_{(\alpha)}$, взятого в точке P_0, имеет *направляющие коэффициенты* $\eta_i\mu^i_{(\alpha)}$. Определим *направление* C *относительно* C_0 с помощью этих направляющих коэффициентов, которые, очевидно, равны компонентам $\xi_i\mu^i_{(\alpha)}$. Эти направляющие коэффициенты, естественно, зависят не только от выбора системы координат, но и от вида используемого «сигнала». Например, в случае астрономического наблюдения, если пренебречь атмосферной рефракцией, то PP_0 будет изотропной геодезической.

Так как мы оперируем с бесконечно малыми, то несущественно, брать ли $\mu^i_{(\alpha)}$ в точке P_0 и η^i, как это показано на фигуре, или выбрать $\mu^i_{(\alpha)}$ в точке основания перпендикуляра, восстановленного из точки P' на C_0, а η^i — вдоль этого перпендикуляра. Различие было бы существенным лишь в том случае, когда необходимо было бы считать длину телескопа (или другого используемого прибора) конечной, т. е. когда нельзя пренебречь временем распространения «сигнала» от P' до P_0.

Направление можно было бы измерить и механически с помощью формулы (3.30) для 3-импульса.

§ 7. Относительная скорость и эффект Допплера

Было бы полезно дать математическим формулам в римановом пространстве — времени соответствующее физическое (хронометрическое) толкование. Однако последовательное выполнение этой программы было бы сопряжено с громоздкими рассуждениями. Нам представляется более целесообразным двигаться дальше, опираясь на математические построения (например параллельный перенос), имея в виду, что позднее, в случае необходимости, этим построениям будет дана физическая интерпретация.



Фиг. 40. Относительная скорость и эффект Допплера (в энергетическом представлении).

Понятие 4-скорости частицы уже было определено; это единичный вектор V^i $(= dx^i/ds)$, касательный к мировой линии частицы. Попытаемся сформулировать полезное определение скорости одной частицы относительно другой. Пусть C (фиг. 40) — мировая линия наблюдателя, а C' — мировая линия какого-нибудь светящегося объекта, например звезды или планеты. Соединим линии C и C' изотропной геодезической, скажем $P'P$. Мы не можем непосредственно сравнить 4-скорость V^i наблюдателя C в точке P с 4-скоростью $V^{i'}$ светящегося объекта C' в точке P', так как эти векторы исходят из разных точек. Очевидный план состоит в том, чтобы свести их в одну точку, подвергнув $V^{i'}$ параллельному переносу вдоль $P'P$. Эта операция даст в точке P вектор

$$v_i = g_{ij'}V^{j'}, \tag{3.32}$$

где $g_{ij'}$ — оператор параллельного переноса, определенный по (2.71). Пусть $\lambda^i_{(\alpha)}$ — система отнесения на линии C, причем $\lambda^i_{(4)} = V^i$. Таковой

могла бы служить система Ферми, однако вопрос о ее конкретизации пока не возникает, поскольку мы ограничиваемся рассмотрением лишь точки P.

Определим теперь 3-*скорость* C' *относительно* C с помощью трех инвариантных компонент:

$$v_{(\alpha)} = v_i \lambda^i_{(\alpha)}. \tag{3.33}$$

Поскольку v^i и V^i — единичные векторы, четвертую компоненту

$$v_{(4)} = v_i \lambda^i_{(4)} = v_i V^i \tag{3.34}$$

можно выразить через три другие:

$$v^{(4)} = -v_{(4)} = (1+v^2)^{1/2}, \quad v^2 = v_{(\alpha)} v^{(\alpha)}. \tag{3.35}$$

Величину v можно назвать *относительной скоростью*. Заметим, что $v^{(4)} = 1$ тогда, и только тогда, когда все три компоненты $v_{(\alpha)}$ равны нулю. В этом случае $V^{i'}$ и V^i при переносе вдоль изотропной геодезической $P'P$ остаются параллельными, и можно утверждать, что C' *покоится* относительно C.

Пусть r^i — единичный вектор в точке P (см. фиг. 40), ортогональный к линии C $(r_i V^i = 0)$ и лежащий в двумерном элементе, содержащем касательную к C в точке P и отрезок $P'P$. Определим *скорость удаления* C'

$$v_R = v_i r^i = v_{(\alpha)} r^{(\alpha)}, \tag{3.36}$$

где $r^{(\alpha)}$ — компоненты r^i в данной системе отнесения.

Рассмотрим теперь эффект Допплера двумя способами — с механической точки зрения и в терминах частоты.

Обратимся к механическому рассмотрению. Возьмем фотон, мировая линия которого совпадает с $P'P$, и пусть он испускается из точки P', лежащей на линии C', 4-импульсом $p^{i'}$, так что энергия излучения, согласно (3.23), равна

$$E' = -p_{i'} V^{i'}. \tag{3.37}$$

Этот 4-импульс переносится параллельно вдоль $P'P$ (см. § 3), и, следовательно, в точке P мы будем иметь

$$p_i v^i = p_{i'} V^{i'}, \tag{3.38}$$

так как при параллельном переносе двух векторов вдоль одной и той же кривой их скалярное произведение остается постоянным. Таким образом, в силу (3.37)

$$p_{(\alpha)} v^{(\alpha)} + p_{(4)} v^{(4)} = -E'. \tag{3.39}$$

Энергия фотона относительно C равна

$$E = -p_i V^i = -p_{(4)} = p^{(4)} \tag{3.40}$$

и, следовательно, из (3.39) получаем

$$E v^{(4)} - p_{(\alpha)} v^{(\alpha)} = E'. \tag{3.41}$$

Из определения r^i с учетом изотропности p^i, имеем

$$p^i = \theta (V^i - r^i), \tag{3.42}$$

где θ — некоторый скаляр. Умножая (3.42) на V_i, находим, что

$$\theta = -p_i V^i = E. \tag{3.43}$$

Следовательно,

$$p_{(\alpha)}v^{(\alpha)} = p_i\lambda^i_{(\alpha)}v^{(\alpha)} = -Er_{(\alpha)}v^{(\alpha)} = -Ev_R. \tag{3.44}$$

Подставляя это соотношение в (3.41) и учитывая (3.35), получаем следующую связь между E, *энергией фотона в момент достижения им точки* p, *и* E', *его энергией в момент излучения в точке* p':

$$E\left[(1+v^2)^{1/2}+v_R\right]=E'. \tag{3.45}$$

Это и есть эффект Допплера в энергетическом представлении. Красное смещение задается формулой

$$\frac{E'-E}{E'}=1-\frac{1}{(1+v^2)^{1/2}+v_R}, \tag{3.46}$$

причем отрицательное красное смещение представляет собой фиолетовое смещение. Когда относительная скорость мала, мы получаем

$$\frac{E'-E}{E'}=v_R-v_R^2+\frac{1}{2}v^2+\dots, \tag{3.47}$$

где основной вклад, очевидно, вносит радиальная скорость v_R.

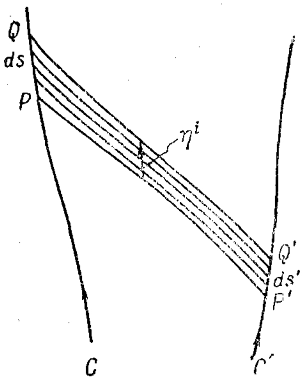
Чтобы исследовать эффект Допплера в частотном представлении, рассмотрим (фиг. 41) набор соединяющих линий C' и C изотропных геодезических, каждая из которых соответствует траектории гребня волны. Если таких гребней n, а ds', ds — хронометрические меры элементов $P'Q'$ и PQ соответственно, то

$$n=\nu'\,ds'=\nu\,ds, \tag{3.48}$$

где ν' и ν — частоты *излученной* и *принятой волн* соответственно. Следовательно, *эффект Допплера в частотном представлении выражается формулой*

$$\frac{\nu}{\nu'}=\frac{ds'}{ds}, \tag{3.49}$$

так что он зависит лишь от соотношения между мерами соответствующих элементов, когда C' отображается на C с помощью изотропных геодезических. Такое отображение было рассмотрено в гл. I, § 6, где использовались лишь другие обозначения (теперь V^i — 4-скорость). Если η^i — вектор отклонения, проведенный от $P'P$ к $Q'Q$, то второе из условий (1.133) дает



Фиг. 41. Эффект Допплера (для частоты).

$$\eta_i p^i=\eta_{i'}p^{i'}, \tag{3.50}$$

где p^i, как и ранее, означает 4-импульс. Но

$$\begin{aligned} \eta_i &= V_i\,ds, & \eta_{i'} &= V_{i'}\,ds', \\ \eta_i p^i &= -E\,ds, & \eta_{i'}p^{i'} &= -E'\,ds', \end{aligned} \tag{3.51}$$

где, как и ранее, E и E' — энергии. Комбинируя эти соотношения с (3.49) и (3.50), получаем $\nu/\nu'=ds'/ds=E/E'$ и, следовательно, в силу (3.46) для красного смещения в частотном представлении

$$\frac{\nu'-\nu}{\nu'}=1-\frac{1}{(1+v^2)^{1/2}+v_R}=v_R-v_R^2+\frac{1}{2}v^2+\dots. \tag{3.52}$$

Квантовое уравнение $E = h\nu$ (h — постоянная Планка) в приведенном выше расчете не использовалось; разумеется, оно ему не противоречит. Ясно, что, вообще говоря, наблюдатель, следящий за светящимся источником, заметит спектральное смещение — радиация, испущенная с частотой ν' относительно источника, будет иметь другую частоту ν относительно наблюдателя, осуществляющего прием.

Касаясь вопроса о *причине* спектрального смещения, следует отметить, что, как это видно из (3.52), спектральное смещение обусловлено относительной скоростью наблюдателя. По существу это и есть эффект Допплера в первоначальном смысле этого слова. Этот эффект не имеет никакого отношения к гравитации, так как в наших формулах тензор Римана нигде не фигурирует[1]).

Это положение противоречит часто встречающемуся в работах по общей теории относительности утверждению о том, что причиной красного смещения является гравитационное поле. Рассуждения, касающиеся этого вопроса, совершенно ошибочны, так как представляют собой крайне поверхностные попытки толковать явления без необходимого анализа смысла употребляемых терминов. Приняв равенство (3.33), мы взяли на себя ответственность за некоторое определение относительной скорости; не приняв этого определения, также нельзя было бы принять и утверждения о том, что причиной спектрального смещения является относительная скорость. Любое недоразумение, которое здесь может возникнуть, обязано лишь тому, что слишком большое внимание уделяется статическим гравитационным полям, для которых справедливо определение скорости, не имеющее смысла в нестатических случаях.

Поскольку это нам понадобится в дальнейшем (см. гл. VII, § 9; гл. VIII, § 3; гл. XI, § 9), заметим, что в силу (3.37) и (3.40) красное смещение можно выразить через производные мировой функции Ω $(P'P)$ следующим образом:

$$\frac{\nu'-\nu}{\nu'} = \frac{\Omega_{i'}V^{i'}+\Omega_i V^i}{\Omega_{j'}V^{j'}}. \tag{3.53}$$

§ 8. Перенос Ферми и отражающийся фотон

Мы переходим к описанию эксперимента, с помощью которого наблюдатель может выяснить, претерпевает ли некоторая заданная система координат перенос Ферми. Этот эксперимент весьма прост, и описать его можно в обычных физических терминах. В качестве наблюдателя можно выбрать человека, находящегося на поверхности Земли. Его прибором служит фотонная пушка, которую мы условимся здесь представлять себе как трубку, из которой можно выстрелить фотоном в том направлении, в каком она установлена, и через которую фотон можно принять (аналогично случаю с телескопом). Наблюдатель запускает в воздух нечто вроде воздушного шара и, тщательно прицелившись, дает из своей пушки «пулеметную очередь» фотонов, стараясь попасть в шар. Фотоны испытывают рассеяние и один из них возвращается обратно к наблюдателю. Если последний будет не внимателен, он может не поймать этот фотон, так как может случиться, что его пушка будет неправильно ориентирована. Но предположим, что фотон наблюдателем пойман. Тогда относительно любой системы координат,

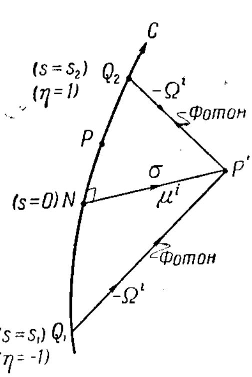
---

[1]) Это было установлено Ланчосом [583]; последний исходил из несколько иной аргументации.

которую может использовать наблюдатель, существуют два направления, представляющие интерес: направление, в котором фотон вылетел из пушки, и направление пушки в момент принятия ею фотона.

Далее, если расстояние от наблюдателя до шара есть величина первого порядка малости, то время «путешествия» фотона — величина того же порядка малости, ибо мы так определили длины (или расстояния), что «скорость света» у нас оказывается равной единице. Если даны две системы координат, движущиеся одна относительно другой с конечной угловой скоростью, то за то же малое время одна система координат повернется по отношению к другой на угол первого порядка малости. Если окажется, что обе ориентации пушки (при испускании и при поглощении) совпадают в одной системе координат, то расхождение в ориентациях пушки, измеренное в другой системе, будет первого порядка малости.

Если наблюдения выполняются над множеством шаров и если для некоторого закона переноса системы координат ориентация пушки при излучении и приеме одна и та же для каждого шара, то ясно, что этот опыт выделяет некоторый частный закон переноса. Как мы убедимся с помощью вычислений, этот закон и есть не что иное, как перенос Ферми. Однако поскольку можно рассчитывать на получение из проблемы отражающегося фотона более обширную информацию, мы выполним вычисления с более высокой степенью точности, чем была бы необходима для установления этого важного свойства переноса Ферми.



Фиг. 42. Перенос Ферми и отражающийся фотон.

Приведенным выше пояснениям придан квазиньютоновский характер, чтобы убедить читателя, относящегося с недоверием к пространственно-временным схемам, что предложенный опыт вполне физичен. При этом следует учесть, что здесь принята некоторая идеализация (допустимая при любом теоретическом обсуждении). Существо дела в действительности выглядит гораздо проще, если работать в рамках пространственно-временной геометрии. Полное представление о рассматриваемой ситуации дает фиг. 42, на которой изображены мировая линия наблюдателя C, точка P', в которой фотоны сталкиваются с шаром и рассеиваются, точка испускания фотона Q_1 и точка приема Q_2; Q_1P' и $P'Q_2$ представляют собой изотропные геодезические, изображающие траектории фотонов. Чтобы не загромождать рисунок, ортонормированные 3-реперы, представляющие систему координат в точках Q_1 и Q_2, на нем не изображены.

В качестве математического построения проведем пространственноподобную геодезическую NP', ортогональную к C, и обозначим через P текущую точку на дуге Q_1Q_2. Через s обозначим время наблюдателя в точке P, причем $s = 0$ в точке N. Положим $NP' = \sigma$ и обозначим через μ^i единичный вектор, касательный к NP' в точке N. Степень приближения определяется малостью σ ($\sigma = O_1$).

Прежде чем начать вычисления, заметим, что геометрия фиг. 42 определяется в данном пространстве — времени кривой C и точкой P'. Кривая C определена точкой N и данными Коши в этой точке, а именно, 4-скоростью A^i и ее производными DA^i, D^2A^i ... , где $D = \delta/\delta s$ (оператор абсолютного дифференцирования). В этом случае P' определяется через σ и μ^i. Таким образом, если $s = s_1$ в Q_1 и $s = s_2$ в Q_2, то s_1 и s_2 определяются перечисленными выше величинами. Первый шаг в наших вычислениях состоит в нахождении s_1 и s_2.

Так как P перемещается вдоль C, мировая функция $\Omega(PP')$ зависит от s, и можно разложить ее в степенной ряд следующего вида:

$$\begin{aligned}\Omega(PP') = {} & \Omega + s\Omega_i A^i + \frac{1}{2}s^2(\Omega_i DA^i + \Omega_{ij}A^i A^j) + \\ & + \frac{1}{6}s^3(\Omega_i D^2A^i + 3\Omega_{ij}DA^i A^j + \Omega_{ijk}A^i A^j A^k) + \\ & + \frac{1}{24}s^4(\Omega_i D^3A^i + 4\Omega_{ij}D^2A^i A^j + 3\Omega_{ij}DA^i DA^j + \\ & + 5\Omega_{ijk}DA^i A^j A^k + \Omega_{ijk}A^i A^j DA^k + \\ & + \Omega_{ijkm}A^i A^j A^k A^m) + O_5. \end{aligned} \tag{3.54}$$

Справа $\Omega = \Omega(NP')$ и дифференцирование выполняется относительно N. При вычислении коэффициентов мы учли тот факт, что $\Omega_{ij} = \Omega_{ji}$ в самом общем случае. Итак, имеем точные соотношения

$$\Omega(NP') = \frac{1}{2}\sigma^2, \qquad \Omega_i(NP') = -\sigma\mu_i. \tag{3.55}$$

Разлагая в ряд относительно NP', имеем

$$\begin{aligned} \Omega_{ij}(NP') &= [\Omega_{ij}] + \sigma\mu^k[\Omega_{ijk'}] + \frac{1}{2}\sigma^2\mu^k\mu^m[\Omega_{ijk'm'}] + O_3, \\ \Omega_{ijk}(NP') &= [\Omega_{ijk}] + \sigma\mu^m[\Omega_{ijkm'}] + O_2, \\ \Omega_{ijkm}(NP') &= [\Omega_{ijkm}] + O_1, \end{aligned} \tag{3.56}$$

где [ ] означает предел совпадения при $P' \to N$. Учитывая (2.69), получаем

$$\begin{aligned} \Omega_{ij}(NP') &= g_{ij} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_{ijkm}\mu^k\mu^m + O_3, \\ \Omega_{ijk}(NP') &= -\sigma S_{ijkm}\mu^m + O_2, \\ \Omega_{ijkm}(NP') &= S_{ijkm} + O_1, \end{aligned} \tag{3.57}$$

где g_{ij} и симметризованный тензор Римана S_{ijkm} вычислены в точке N. Подставим теперь (3.55) и (3.57) в (3.54) и используем следующие равенства:

$$\begin{aligned} & A_i\mu^i = 0, \ A_iA^i = -1, \ A_iDA^i = 0, \\ & A_iD^2A^i + DA_iDA^i = 0. \end{aligned} \tag{3.58}$$

Мы получим

$$\begin{aligned} \Omega(PP') = {} & \frac{1}{2}\sigma^2 - \frac{1}{2}s^2\left(\sigma\mu_i DA + 1 - \frac{1}{2}\sigma^2 S_{ijkm}A^iA^j\mu^k\mu^m\right) - \\ & - \frac{1}{6}s^3\sigma\mu_i D^2A^i - \frac{1}{24}s^4 DA_iDA^i + O_5. \end{aligned} \tag{3.59}$$

Тогда в силу (2.69) и (1.99) имеем

$$S_{ijkm}A^iA^j\mu^k\mu^m = -\frac{2}{3}R_{ikjm}A^i\mu^kA^j\mu^m = \frac{2}{3}K, \tag{3.60}$$

где K — риманова кривизна двумерного элемента, определенного в точке N через A^i и μ^i. Имеем также

$$DA_iDA^i = b^2, \tag{3.61}$$

где b — первая кривизна линии C в точке N. Таким образом, (3.59) можно переписать в виде

$$2\Omega(PP') = \sigma^2 - s^2\left(1 + \sigma\mu_i DA^i - \frac{1}{3}\sigma^2 K\right) - \frac{1}{3}s^3\sigma\mu_i D^2A^i - \frac{1}{12}s^4b^2 + O_5. \tag{3.62}$$

Для нахождения s_1 и s_2 нужно положить $\Omega(PP')=0$. Ясно, что

$$s_1,\ s_2=\eta\sigma+O_2, \tag{3.63}$$

где $\eta=-1$ для s_1 и $\eta=1$ для s_2. Тогда при определении s_1 и s_2 формула (3.62) приводит к простому квадратному уравнению

$$s^2\left(1+\sigma\mu_i DA^i-\frac{1}{3}\sigma^2 K\right)=M(\sigma,\ \eta)+O_3, \tag{3.64}$$

где

$$M(\sigma,\ \eta)=\sigma^2-\frac{1}{3}\eta\sigma^4\mu_i D^2A^i-\frac{1}{12}\sigma^4 b^2. \tag{3.65}$$

Итак, находим

$$s_1=-\frac{1}{2}\tau+\frac{1}{2}f+O_4,\quad s_2=\frac{1}{2}\tau+\frac{1}{2}f+O_4, \tag{3.66}$$

где

$$\tau=2\sigma-\sigma^2\mu_i DA^i+\sigma^3\left(\frac{1}{3}K-\frac{1}{12}b^2+\frac{3}{4}(\mu_i DA^i)^2\right),$$

$$f=-\frac{1}{3}\sigma^3\mu_i D^2A^i. \tag{3.67}$$

Таким образом, время путешествия фотона из точки Q_1 в Q_2, равно

$$s_2-s_1=\tau+O_4. \tag{3.68}$$

Заметим, что если C — геодезическая, то

$$\tau=2\sigma+\frac{1}{3}K\sigma^3. \tag{3.69}$$

До сих пор в наших выкладках нигде не фигурировали направления распространения ни испускаемого, ни принимаемого фотонов. Чтобы рассмотреть эти направления, введем 4-репер Ферми $\lambda^i_{(\alpha)}$ на C; каждый из этих четырех векторов удовлетворяет уравнению переноса Ф — У (1.72):

$$D\lambda^i=\lambda_j(A^iDA^j-A^jDA^i). \tag{3.70}$$

Здесь $\lambda^i_{(4)}=A^i$, т. е. текущему вектору 4-скорости C. Далее, $-\Omega^i(Q_1P')$ и $-\Omega^i(Q_2P')$ — изотропные векторы в точках Q_1, Q_2, касательные к изотропным геодезическим Q_1P', Q_2P', исходящим из точки, где находится наблюдатель, в направлении шара, как показано на фиг. 42. Разумеется, направление излучения совпадает с направлением движения вылетающего фотона, а направление приема совпадает с направлением движения падающего фотона (взятым с обратным *знаком*). Таким образом направляющие коэффициенты (косинусы) направления излучения и приема имеют вид

$$\theta_{(\alpha)}=-\chi\Omega_i\lambda^i_{(\alpha)}=-\chi\Omega_{(\alpha)}, \tag{3.71}$$

где χ — *положительный* скаляр, такой, что

$$\chi^{-2}=\Omega_{(\alpha)}\Omega^{(\alpha)}=-\Omega_{(4)}\Omega^{(4)}=(\Omega_{(4)})^2. \tag{3.72}$$

Последнее вытекает из изотропного характера векторов Ω^i. Теперь

$$\Omega^{(4)}<0,\quad \Omega_{(4)}>0 \text{ в точке } Q_1,$$

$$\Omega^{(4)}>0,\quad \Omega_{(4)}<0 \text{ в точке } Q_2$$

и, следовательно,

$$\chi=-\frac{\eta}{\Omega_{(4)}}. \tag{3.73}$$

Таким образом, направляющие коэффициенты для излучения и приема задаются формулами

$$\theta_{(\alpha)}=\eta\,\frac{\Omega_{(\alpha)}}{\Omega_{(4)}}=\eta\,\frac{\Omega_i\lambda^i_{(\alpha)}}{\Omega_j\lambda^j_{(4)}}=\eta\,\frac{\Omega_i\lambda^i_{(\alpha)}}{\Omega_j A^j}. \qquad (3.74)$$

Наша задача состоит в том, чтобы подсчитать, как изменятся эти направляющие косинусы при переходе от точки Q_1 к точке Q_2.

Этот расчет лучше всего выполнить, опустив, во-первых, индексы Лоренца у векторов репера Ферми, и, во-вторых, забыв об уравнении (3.70) и оперируя с произвольным векторным полем λ^i, заданным на кривой C. Тогда величина

$$\varphi(PP')=\Omega_i(PP')\,\lambda^i(P) \qquad (3.75)$$

есть функция s на кривой C, и можно разложить ее в ряд следующим образом:

$$\begin{aligned}\varphi(PP')&=\Omega_i\lambda^i+s\,(\Omega_iD\lambda^i+\Omega_{ij}\lambda^iA^j)+\\&+\frac{1}{2}s^2(\Omega_iD^2\lambda^i+2\Omega_{ij}D\lambda^iA^j+\Omega_{ij}\lambda^iDA^j+\\&+\Omega_{ijk}\lambda^iA^jA^k)+\frac{1}{6}s^3(\Omega_iD^3\lambda^i+\\&+3\Omega_{ij}D^2\lambda^iA^j+3\Omega_{ij}D\lambda^iDA^j+\Omega_{ij}\lambda^iD^2A^j+\\&+2\Omega_{ijk}\lambda^iDA^jA^k+3\Omega_{ijk}D\lambda^iA^jA^k+\\&+\Omega_{ijk}\lambda^iA^jDA^k+\Omega_{ijkm}\lambda^iA^jA^kA^m)+O_4. \end{aligned} \qquad (3.76)$$

В правой части (3.76) $\Omega=\Omega(NP')$, а производные относятся к дифференцированию по N; $\lambda^i=\lambda^i(N)$. Воспользовавшись соотношениями (3.55) и (3.57), получим

$$\begin{aligned}\varphi(PP')&=-\sigma\mu_i\lambda^i+s\Big(\lambda_iA^i-\sigma\mu_iD\lambda^i+\\&+\frac{1}{2}\sigma^2S_{ijkm}\lambda^iA^j\mu^k\mu^m\Big)+\frac{1}{2}s^2(2A_iD\lambda^i+\\&+\lambda_iDA^i-\sigma\{\mu_iD^2\lambda^i+S_{ijkm}\lambda^iA^jA^k\mu^m\})+\\&+\frac{1}{6}s^3(3A_iD^2\lambda^i+3DA_iD\lambda^i+\lambda_iD^2A^i)+O_4. \end{aligned} \qquad (3.77)$$

Последнюю формулу можно несколько упростить, используя (3.70). Мы имеем

$$\begin{aligned}&A_i\lambda^i=\text{const},\\&A_iD\lambda^i+DA_i\lambda^i=0,\\&A_iD^2\lambda^i+2DA_iD\lambda^i+D^2A_i\lambda^i=0,\\&2A_iD\lambda^i+DA_i\lambda^i=-DA_i\lambda^i,\\&3A_iD^2\lambda^i+3DA_iD\lambda^i+\lambda_iD^2A^i=-2D^2A_i\lambda^i-3DA_iD\lambda^i.\end{aligned} \qquad (3.78)$$

Две последние строчки можно подставить в формулу (3.77).

Коэффициенты при различных степенях s и σ в (3.77) вычислены в точке N. Для нахождения величин $\varphi(Q_1P')$ и $\varphi(Q_2P')$ следует, как и в (3.66), положить

$$\begin{aligned}&s=\frac{1}{2}\eta\tau+\frac{1}{2}f+O_4,\quad f=O_3,\\&s^2=\frac{1}{4}\tau^2+O_4,\quad s^3=\frac{1}{8}\eta\tau^3+O_4,\end{aligned} \qquad (3.79)$$

где $\eta = -1$ в точке Q_1 и $\eta = 1$ в точке Q_2. Следовательно,

$$\varphi(QP') = -\sigma\mu_i\lambda^i + \frac{1}{2}\eta\tau(A_i\lambda^i - \sigma\mu_i D\lambda^i + \frac{1}{2}\sigma^2 S_{ijkm}\lambda^i A^j\mu^k\mu^m) + \\ + \frac{1}{2}fA_i\lambda^i - \frac{1}{8}\tau^2(DA_i\lambda^i + \sigma\{\mu_i D^2\lambda^i + S_{ijkm}\lambda^i A^j A^k\mu^m\}) - \\ - \frac{1}{48}\eta\tau^3(2D^2A_i\lambda^i + 3DA_iD\lambda^i) + O_4, \tag{3.80}$$

где Q означает либо точку Q_1, либо Q_2. Подставляя теперь из (3.67)

$$\frac{1}{2}\tau = \sigma - \frac{1}{2}\sigma^2\mu_i DA^i + \sigma^3 E, \\ E = \frac{1}{6}K - \frac{1}{24}b^2 + \frac{3}{8}(\mu_i DA^i)^2, \\ \frac{1}{2}f = -\frac{1}{6}\sigma^3\mu_i D^2A^i, \tag{3.81}$$

получаем

$$\varphi(QP') = (W + \eta W^*)\sigma + (Y + \eta Y^*)\sigma^2 + (Z + \eta Z^*)\sigma^3 + O_4, \tag{3.82}$$

где коэффициенты имеют следующий вид:

$$W = -\mu_i\lambda^i, \qquad W^* = A_i\lambda^i, \\ Y = -\frac{1}{2}DA_i\lambda^i, \; Y^* = -\mu_i D\lambda^i - \frac{1}{2}\mu_i DA^i A_j\lambda^j, \\ Z = \frac{1}{2}\mu_i DA^i DA_j\lambda^j - \frac{1}{2}\mu_i D^2\lambda^i - \frac{1}{6}\mu_i D^2A^i A_j\lambda^j - \frac{1}{2}S_{ijkm}\lambda^i A^j A^k\mu^m, \\ Z^* = EA_i\lambda^i + \frac{1}{2}\mu_i DA^i\mu_j D\lambda^j - \frac{1}{3}D^2A_i\lambda^i - \frac{1}{2}DA_iD\lambda^i + \frac{1}{2}S_{ijkm}\lambda^i A^j\mu^k\mu^m. \tag{3.83}$$

Восстановим теперь индексы Лоренца у λ^i, означающие нумерацию векторов 4-репера Ферми. Если взять $\lambda^i_{(\alpha)}$ вместо λ^i, то $\varphi(QP')$ перейдет в $\Omega_{(\alpha)}(QP')$. Если же в качестве λ^i взять $A^i (= \lambda^i_{(4)})$, то $\varphi(QP')$ перейдет в $\Omega_{(4)}(QP')$. Это и есть те величины, которые нам нужны для вычисления направляющих косинусов по формулам (3.74). Перейдем к их оценке.

В силу формул Френе — Серре (1.55)

$$DA^i = bB^i, \\ DB^i = cC^i + bA^i, \\ D^2A^i = b^2A^i + DbB^i + bcC^i. \tag{3.84}$$

Обозначая компоненты $\lambda^i_{(\alpha)}$ для репера Ферми обычным образом, получаем

$$D\lambda^i_{(\alpha)} = A^i\lambda^j_{(\alpha)}DA_j = bA^i\lambda^j_{(\alpha)}B_j = bA^iB_{(\alpha)}, \\ D^2\lambda^i_{(\alpha)} = A^i(DbB_{(\alpha)} + bcC_{(\alpha)}) + B^ib^2B_{(\alpha)}. \tag{3.85}$$

Тогда

$$\mu_iA^i = 0, \quad \mu_i\lambda^i_{(\alpha)} = \mu_{(\alpha)}, \\ \mu_iDA^i = bB_{(\alpha)}\mu^{(\alpha)}, \quad \mu_iD\lambda^i_{(\alpha)} = 0, \\ \mu_iD^2A^i = DbB_{(\alpha)}\mu^{(\alpha)} + bcC_{(\alpha)}\mu^{(\alpha)}, \\ \mu_iD^2\lambda^i_{(\alpha)} = b^2B_{(\alpha)}B_{(\beta)}\mu^{(\beta)} \tag{3.86}$$

и

$$\begin{gathered}A_i\lambda^i_{(\alpha)}=0,\ \ DA_i\lambda^i_{(\alpha)}=bB_{(\alpha)},\\ DA_iD\lambda^i_{(\alpha)}=0,\\ D^2A_i\lambda^i_{(\alpha)}=DbB_{(\alpha)}+bcC_{(\alpha)},\end{gathered}\tag{3.87}$$

а также

$$\begin{gathered}S_{ijkm}\lambda^i_{(\alpha)}A^j\mu^k\mu^m=S_{(\alpha4\beta\gamma)}\mu^{(\beta)}\mu^{(\gamma)},\\ S_{ijkm}\lambda^i_{(\alpha)}A^jA^k\mu^m=S_{(\alpha44\beta)}\mu^{(\beta)}.\end{gathered}\tag{3.88}$$

Заметим, что $\mu_{(\alpha)}\ (=\mu^{(\alpha)})$ представляют собой направляющие косинусы линии NP' по отношению к ферми-реперу.

Восстанавливая в формуле (3.83) индекс Лоренца (α) и используя выше результаты, находим

$$\begin{aligned}&W_{(\alpha)}=-\mu_{(\alpha)},\quad W^*_{(\alpha)}=0,\\ &Y_{(\alpha)}=-\frac{1}{2}bB_{(\alpha)},\quad Y^*_{(\alpha)}=0,\\ &Z_{(\alpha)}=-\frac{1}{2}S_{(\alpha44\beta)}\mu^{(\beta)},\\ &Z^*_{(\alpha)}=-\frac{1}{3}(DbB_{(\alpha)}+bcC_{(\alpha)})+\frac{1}{2}S_{(\alpha4\beta\gamma)}\mu^{(\beta)}\mu^{(\gamma)}.\end{aligned}\tag{3.89}$$

Таким образом, из (3.82) следует

$$\Omega_{(\alpha)}(QP')=W_{(\alpha)}\sigma+Y_{(\alpha)}\sigma^2+(Z_{(\alpha)}+\eta Z^*_{(\alpha)})\,\sigma^3+O_4,\tag{3.90}$$

где коэффициенты определены соотношениями (3.89).

Введя теперь в формулу (3.83) $A^i\ (=\lambda^i_{(4)})$ вместо λ^i, получим

$$\begin{aligned}&W_{(4)}=0,\quad W^*_{(4)}=-1,\\ &Y_{(4)}=0,\quad Y^*_{(4)}=-\frac{1}{2}bB_{(\alpha)}\mu^{(\alpha)},\\ &Z_{(4)}=-\frac{1}{3}\mu_iD^2A^i=-\frac{1}{3}(DbB_{(\alpha)}\mu^{(\alpha)}+bcC_{(\alpha)}\mu^{(\alpha)}),\\ &Z^*_{(4)}=-E+\frac{1}{2}b^2(B_{(\alpha)}\mu^{(\alpha)})^2-\frac{1}{6}b^2+\frac{1}{2}S_{(44\beta\gamma)}\mu^{(\beta)}\mu^{(\gamma)}.\end{aligned}\tag{3.91}$$

Последнее из выписанных соотношений можно записать более сжато, так как в силу (3.60) и (3.81)

$$\begin{gathered}K=\frac{3}{2}S_{ijkm}A^iA^j\mu^k\mu^m=\frac{3}{2}S_{(44\beta\gamma)}\mu^{(\beta)}\mu^{(\gamma)},\\ E=\frac{1}{6}K-\frac{1}{24}b^2+\frac{3}{8}b^2(B_{(\alpha)}\mu^{(\alpha)})^2,\end{gathered}\tag{3.92}$$

и, следовательно,

$$Z^*_{(4)}=\frac{1}{6}K-\frac{1}{8}b^2+\frac{1}{8}b^2(B_{(\alpha)}\mu^{(\alpha)})^2=\frac{1}{6}K-\frac{1}{8}b^2\sin^2(B\mu),\tag{3.93}$$

где $(B\mu)$ означает угол между первой нормалью B^i и вектором μ^i. В таком случае из (3.82) следует, что

$$\Omega_{(4)}(QP')=-\eta\sigma+\eta Y^*_{(4)}\sigma^2+(Z_{(4)}+\eta Z^*_{(4)})\,\sigma^3+O_4.\tag{3.94}$$

Соответственно в силу (3.74), (3.90) и (3.94) направляющие косинусы для излучения $(\eta=-1)$ и приема $(\eta=1)$ имеют значения

$$\theta_{(\alpha)}=\eta\frac{\Omega_{(\alpha)}}{\Omega_{(4)}}=\frac{W_{(\alpha)}+Y_{(\alpha)}\sigma+(Z_{(\alpha)}+\eta Z^*_{(\alpha)})\,\sigma^2+O_3}{-1+Y^*_{(4)}\sigma+(Z^*_{(4)}+\eta Z_{(4)})\,\sigma^2+O_3}\,.\tag{3.95}$$

Применяя биномиальное разложение знаменателя, получаем

$$\theta_{(\alpha)} = \psi_{(\alpha)} + \eta\psi^*_{(\alpha)} + O_3, \tag{3.96}$$

где

$$\psi_{(\alpha)} = -W_{(\alpha)} - (Y_{(\alpha)} + W_{(\alpha)}Y^*_{(4)})\,\sigma - \\ - \{Y_{(\alpha)}Y^*_{(4)} + Z_{(\alpha)} + W_{(\alpha)}\,(Z^*_{(4)} + Y^{*2}_{(4)})\}\,\sigma^2, \tag{3.97}$$
$$\psi^*_{(\alpha)} = -\sigma^2\,(Z^*_{(\alpha)} + W_{(\alpha)}Z_{(4)}).$$

Следовательно, приращения направляющих косинусов равны

$$\Delta\theta_{(\alpha)} = 2\psi^*_{(\alpha)} + O_3. \tag{3.98}$$

Это равенство указывает, как следует направить фотонную пушку относительно системы координат Ферми, чтобы с ее помощью можно было поймать возвращающийся фотон. Вращение оказывается функцией второго порядка малости по σ. *Этот факт позволяет дать физическую интерпретацию переноса Ферми.* В самом деле, если мы используем систему координат, вращающуюся относительно ферми-системы, то за время эксперимента (равное приблизительно 2σ) вращающаяся система отсчета повернется относительно ферми-системы на угол порядка σ. Чтобы поймать возвращающийся фотон, наблюдателю, использующему вращающуюся систему, нужно повернуть фотонную пушку на угол порядка σ. *Таким образом, ферми-перенос характеризуется тем, что для ферми-систем (и только для них) угол вращения фотонной пушки равен нулю, если пренебречь величинами порядка* σ^2. Другими словами: если τ — время «путешествия», а θ — угол, на который следует повернуть фотонную пушку, то предел θ/τ при $\tau \to 0$ для ферми-систем, и только для них, равен нулю.

Подставляя выражения для $W_{(\alpha)}$, $Y_{(\alpha)}$, $Z_{(\alpha)}$ и $Z^*_{(\alpha)}$ из (3.89) и (3.91) в (3.97), получаем

$$\psi_{(\alpha)} = \mu_{(\alpha)} \left\{1 - \frac{1}{2}\,b\sigma\cos(B\mu) + \frac{1}{6}\,K\sigma^2 - \frac{1}{8}\,b^2\sigma^2\left(1 - 3\cos^2(B\mu)\right)\right\} + \\ + B_{(\alpha)}\left(\frac{1}{2}\,b\sigma - \frac{1}{4}\,b^2\sigma^2\cos(B\mu)\right) + \frac{1}{2}\,\sigma^2 S_{(\alpha 44\beta)}\mu^{(\beta)}, \tag{3.99}$$

$$\psi^*_{(\alpha)} = \sigma^2\left(F_{(\alpha)} - \mu_{(\alpha)}F_{(\beta)}\mu^{(\beta)} - \frac{1}{2}\,S_{(\alpha 4\beta\gamma)}\mu^{(\beta)}\mu^{(\gamma)}\right), \\ F_{(\alpha)} = \frac{1}{3}\,(DbB_{(\alpha)} + bcC_{(\alpha)}). \tag{3.100}$$

Тем самым мы выразили эти 3-векторы через их компоненты вдоль $\mu_{(\alpha)}$ (ферми-направление шара), $B_{(\alpha)}$ и $C_{(\alpha)}$ (первая и вторая нормали к мировой линии наблюдателя) и два других 3-вектора, включающих симметризованный тензор Римана (2.48).

В качестве проверки этих довольно запутанных вычислений, легко убедиться, что $\theta_{(\alpha)}\theta^{(\alpha)} = 1 + O_3$ и что $\theta_{(\alpha)}$ и $\Delta\theta_{(\alpha)}$ в рассматриваемом приближении ортогональны.

Поскольку в первом приближении мы имеем $\theta_{(\alpha)} = \mu_{(\alpha)}$ и $\tau = 2\sigma$ (где τ — время путешествия), можно (3.98) записать в виде

$$2\tau^{-2}\Delta\theta_{(\alpha)} = F_{(\alpha)} - \theta_{(\alpha)}F_{(\beta)}\theta^{(\beta)} - \frac{1}{2}\,S_{(\alpha 4\beta\gamma)}\theta^{(\beta)}\theta^{(\gamma)}. \tag{3.101}$$

Все величины, входящие в это уравнение, доступны наблюдению. Исключение составляют F- и S-члены. Таким образом, наблюдение отражающегося фотона с помощью достаточно совершенного прибора может дать сведения как о кривизне мировой линии наблюдателя, так и о тензоре Римана.

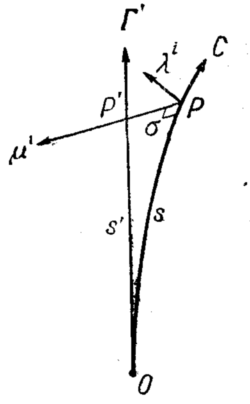
Следует, однако, помнить, что принятые выше приближения основаны на разложении в степенные ряды по малому параметру σ. Этот прием может быть правомерным при рассмотрении фотона, отражающегося от искус-

ственного спутника, но наверняка окажется некорректным при рассмотрении фотона, отражающегося от Луны.

На самом деле процесс приближения, основанный исключительно на малости σ, вообще не допустим, так как σ — размерная величина (время или расстояние). *Малыми* в абсолютном смысле этого слова можно назвать лишь безразмерные инварианты. Действительно важным в приближениях оказывается отношение отброшенных членов к оставшимся. Однако корректный метод вычислений (с точной оценкой сделанных допущений) был бы несколько утомительным; интересующийся читатель не встретил бы существенных трудностей в том, чтобы придать приведенным выше выкладкам (как и другим аналогичным выкладкам, связанным с методом приближений) необходимую точность[1]).

§ 9. Падающее яблоко

Согласно знаменитой легенде, Ньютон был вдохновлен на создание своей теории гравитации, наблюдая однажды за падением яблока с ветки дерева, и изучающие ньютонову физику даже теперь стали бы утверждать, что ускорение (980 *см/сек*^{2}) падающего яблока обусловлено гравитационным полем. Согласно теории относительности, эта точка зрения совершенно ошибочна. Мы предпримем тщательное изучение этой проблемы и убедимся, что в явлении свободного падения гравитационное поле (т. е. тензор Римана) играет, в действительности, чрезвычайно малую роль, а ускорение 980 *см/сек*^{2} обусловлено фактически кривизной мировой линии ветки дерева. В самом деле, мы могли бы убедиться, что ускорение яблока равно 980 *см/сек*^{2} и в том случае, когда оно сброшено с ракеты, движущейся с таким же ускорением на большом расстоянии от источников поля гравитации. Однако было бы непоследовательным продолжать дальнейшее рассмотрение в рамках ньютоновой теории (или обращаясь к принципу эквивалентности Эйнштейна (Мёллер [767], стр. 220)), так как эта задача относится к римановой геометрии и в принципе очень проста, хотя и несколько громоздка в деталях. Лишь в целях сравнения физического истолкования мы попытаемся связать окончательные результаты с некоторыми ньютоновскими идеями.



Фиг. 43. Свободное падение.

Обратимся к фиг. 43. Здесь C — мировая линия наблюдателя (ветки дерева), а Γ' — мировая линия свободно падающего тела (яблоко); Γ' — геодезическая, тогда как C таковой не является. Линии C и Γ' касаются друг друга в точке O, т. е. в точке, где начинается падение. При этом касание соответствует «мягкому» старту: начальная относительная скорость равна нулю. Чтобы проследить за падением яблока физически, мы должны рассматривать сигналы, приходящие из Γ' к C. Однако мы здесь ограничимся главным образом математическим рассмотрением[2]).

[1]) См. замечания о *малости* в гл. II, § 3.

[2]) По разным соображениям вычисления здесь доведены до высокого порядка точности, в связи с чем они выглядят весьма сложными. Чтобы, минуя громоздкие вычисления, получить хотя бы грубое представление о «проблеме падающего яблока», можно ряд оборвать, пренебрегая членами третьего и более высокого порядков малости; в этом случае в правой части (3.125) останется лишь первый член, представляющий собой релятивистский аналог выражения, фигурирующего в элементарном (нерелятивистском) уравнении для рассматриваемой задачи.

Пусть P' — некоторая точка на Γ', а $P'P$ (пространственноподобная) геодезическая, ортогональная к C. Пусть $\sigma = PP'$, а μ^i — единичный вектор, касательный к PP' в точке P. Мы будем изучать вектор $\sigma\mu^i$, исследуя его компоненту в направлении вектора λ^i, который некоторым образом переносится вдоль C (закон переноса будет конкретизирован позднее).

Пусть $s = OP$ и $s' = OP'$ представляют собой времена, регистрируемые с помощью часов, находящихся на ветке и на яблоке соответственно. Вытекающая из построения зависимость между s и s' задается формулой

$$S = \frac{ds'}{ds}. \tag{3.102}$$

Инвариант $\sigma\mu_i\lambda^i$ есть функция s. Вводя в рассмотрение мировую функцию, имеем

$$\sigma\mu_i\lambda^i = -\Omega_i(PP')\lambda^i(P). \tag{3.103}$$

Разложим это выражение в ряд по степеням s. Чтобы избежать необходимости писать всюду знаки минус, положим

$$\varphi(s) = \Omega_i(PP')\lambda^i(P), \tag{3.104}$$

и разложим $\varphi(s)$ в ряд:

$$\varphi(s) = [\varphi] + s[D\varphi] + \frac{1}{2}s^2[D^2\varphi] + \frac{1}{6}s^3[D^3\varphi] + \frac{1}{24}s^4[D^4\varphi] + O_5, \tag{3.105}$$

где $D = \delta/\delta s$, а [ ] означает, что соответствующая величина берется в точке O (т. е. [ ] означает предел совпадения, так как P' и P при $s = 0$ совпадают).

Пусть $A^i\,(= dx^i/ds)$ — 4-скорость на кривой C в точке P, а $A^{i'}$ — 4-скорость на кривой Γ' в точке P'. Так как кривая Γ' геодезическая, то

$$DA^{i'} = 0. \tag{3.106}$$

Заметим, что в силу ортогональности в точке P

$$\Omega_i A^i = 0. \tag{3.107}$$

Следующие формулы сходны с формулами (3.76), хотя и несколько более сложны, поскольку положение точки P' не фиксировано. Мы имеем

$$D\varphi = \Omega_i D\lambda^i + \Omega_{ij}\lambda^i A^j + \Omega_{ij'}\lambda^i A^{j'} S, \tag{3.108}$$

$$\begin{aligned} D^2\varphi = {} & \Omega_i D^2\lambda^i + \Omega_{ij}(2D\lambda^i A^j + \lambda^i DA^j) + \\ & + \Omega_{ij'}(2D\lambda^i A^{j'} S + \lambda^i A^{j'} DS) + \Omega_{ijk}\lambda^i A^j A^k + \\ & + 2\Omega_{ijk'}\lambda^i A^j A^{k'} S + \Omega_{ij'k'}\lambda^i A^{j'} A^{k'} S^2, \end{aligned} \tag{3.109}$$

$$\begin{aligned} D^3\varphi = {} & \Omega_i D^3\lambda^i + \Omega_{ij}(3D^2\lambda^i A^j + 3D\lambda^i DA^j + \lambda^i D^2 A^j) + \\ & + \Omega_{ij'}(3D^2\lambda^i A^{j'} S + 2D\lambda^i A^{j'} DS + \lambda^i A^{j'} D^2 S) + \\ & + \Omega_{ijk}(3D\lambda^i A^j A^k + 2\lambda^i DA^j A^k + \lambda^i A^j DA^k) + \\ & + \Omega_{ijk'}(6D\lambda^i A^j A^{k'} S + 3\lambda^i DA^j A^{k'} S + 3\lambda^i A^j A^{k'} DS) + \\ & + \Omega_{ij'k'}(3D\lambda^i A^{j'} A^{k'} S^2 + 3\lambda^i A^{j'} A^{k'} SDS) + \Omega_{ijkm}\lambda^i A^j A^k A^m + \\ & + 3\Omega_{ijkm'}\lambda^i A^j A^k A^{m'} S + 3\Omega_{ijk'm'}\lambda^i A^j A^{k'} A^{m'} S^2 + \\ & + \Omega_{ij'k'm'}\lambda^i A^{j'} A^{k'} A^{m'} S^3. \end{aligned} \tag{3.110}$$

Возьмем теперь $\lambda^i = A^i$. В этом случае вследствие (3.107) $\varphi = 0$. Следовательно, $D\varphi$, $D^2\varphi$ и $D^3\varphi$ обращаются в нуль; то же самое имеет место для соответствующих пределов совпадения. Обращаясь к перечню пре-

делов совпадения (2.69), получаем из (3.108)

$$[S]=1. \tag{3.111}$$

Из (3.109) следует, что

$$[DS]=0, \tag{3.112}$$

а (3.110) приводит к соотношениям

$$[D^2S]=-2b^2, \quad b^2=DA_i DA^i, \tag{3.113}$$

где b — первая кривизна кривой C в точке O. При выполнении предыдущих вычислений мы использовали тот факт, что $[A^{i'}]=[A^i]$ и то обстоятельство, что $[\Omega_{ijkm}]$ обращается в нуль, будучи трижды свернута с одним и тем же вектором.

Выберем теперь λ^i так, чтобы он был ортогонален к кривой C, т. е. чтобы было

$$\lambda^i A_i=0, \tag{3.114}$$

но без каких-либо других ограничений в настоящий момент. С помощью (3.111) — (3.113) получаем из (3.104), (3.108) — (3.110) следующие пределы совпадения:

$$[\varphi]=0, \quad [D\varphi]=0, \tag{3.115}$$

$$[D^2\varphi]=\lambda^i DA_i, \tag{3.116}$$

$$[D^3\varphi]=3D\lambda^i DA_i+\lambda^i D^2A_i, \tag{3.117}$$

где члены, стоящие справа, взяты в точке O. Нам потребуется также и $[D^4\varphi]$. Нет никакой необходимости выписывать $D^4\varphi$, поскольку дифференцирование соотношения (3.110) нетрудно выполнить в уме и найти предел совпадения сразу же, так как многие члены при этом обратятся в нуль. Таким образом, получаем

$$[D^4\varphi]=6D^2\lambda^i DA_i+4D\lambda^i D^2A_i+\lambda^i D^3A_i+ \\ +6b^2 D\lambda^i A_i+R_{ijkm}\lambda^i A^j A^k DA^m, \tag{3.118}$$

где мы учли, что $S_{imjk}-S_{ijmk}=R_{ikjm}$ [см. (2.69)]. Следовательно, для любого вектора λ^i, удовлетворяющего (3.114), разложение (3.105) имеет вид

$$\varphi(s)=\frac{1}{2}s^2[D^2\varphi]+\frac{1}{6}s^3[D^3\varphi]+\frac{1}{24}s^4[D^4\varphi]+O_5, \tag{3.119}$$

причем вид коэффициентов задается выражениями (3.116) — (3.118).

Два способа выбора λ^i, совместные с условием (3.114), представляют особый интерес. Во-первых, в качестве λ^i можно взять один из векторов 3-репера Ферми; во-вторых, можно потребовать, чтобы он был одной из главных нормалей к кривой C.

Принимая, что λ^i — ферми-вектор, мы получим следующие уравнения:

$$\begin{gathered} D\lambda^i=A^i\lambda^j DA_j, \\ D\lambda^i A_i=-\lambda^i DA_i, \quad D\lambda^i DA_i=0, \\ D\lambda^i D^2A_i=-b^2\lambda^i DA_i, \\ D^2\lambda^i=DA^i\lambda^j DA_j+A^i D\lambda^j DA_j+A^i\lambda^j D^2A_j, \quad D^2\lambda^i DA_i=b^2\lambda^i DA_i. \end{gathered} \tag{3.120}$$

Откуда следует, что

$$\varphi(s)=\frac{1}{2}s^2\lambda^i DA_i+\frac{1}{6}s^3\lambda^i D^2A_i+\frac{1}{24}s^4(\lambda^i D^3A_i- \\ -4b^2\lambda^i DA_i+R_{ijkm}\lambda^i A^j A^k DA^m)+O_5. \tag{3.121}$$

Проставим теперь всюду лоренц-индекс (α), так чтобы $\lambda^i_{(\alpha)}$ означал 3-репер Ферми. Тогда вследствие (2.185) первые три ферми-координаты точки P' равны

$$X_{(\alpha)} = -\Omega_i \lambda^i_{(\alpha)}, \qquad (3.122)$$

т. е. равны φ, взятой с обратным знаком. Таким образом, *в координатах Ферми падение яблока описывается формулой*

$$X_{(\alpha)} = -\frac{1}{2} s^2 (DA)_{(\alpha)} - \frac{1}{6} s^3 (D^2A)_{(\alpha)} + \frac{1}{24} s^4 (4b^2 (DA)_{(\alpha)} - \\ - (D^3A)_{(\alpha)} - R_{(\alpha 4 4 \beta)} (DA)^{(\beta)} + O_5. \qquad (3.123)$$

Здесь s — время, регистрируемое с помощью часов, помещенных на ветке дерева (фактически это четвертая ферми-координата), а индексы в скобках означают компоненты относительно 3-репера Ферми, вычисленные в точке O, т. е. в точке, из которой начиналось падение яблока.

Выразив производные 4-скорости A^i через главные нормали и кривизны линии C, можно записать эту формулу в другом виде. В силу формул Френе — Серре (1.55) имеем

$$DA^i = bB^i, \\ D^2A^i = b^2A^i + DbB^i + bcC^i, \qquad (3.124) \\ D^3A^i = 3bDbA^i + (D^2b + b^3 - bc^2) B^i + (bDc + 2cDb) C^i + bcdD^i,$$

где B^i, C^i и D^i — соответственно первая, вторая и третья единичные нормали, а b, c, d — первая вторая и третья кривизны линий C. Таким образом, (3.123) можно записать в виде

$$X_{(\alpha)} = -\frac{1}{2} s^2 bB_{(\alpha)} - \frac{1}{6} s^3 (DbB_{(\alpha)} + bc\ \ C_{(\alpha)}) + \frac{1}{24} s^4 \{3b^3 - D^2b + bc^2) B_{(\alpha)} - \\ - (bDc + 2cDb) C_{(\alpha)} - bc\, dD_{(\alpha)} - bR_{(\alpha 4 4 \beta)} B^{(\beta)}\} + O_5. \qquad (3.125)$$

Во избежание недоразумений, заметим, что, хотя, здесь и были введены главные нормали, в последующих формулах координаты $X_{(\alpha)}$ отнесены к 3-реперу Ферми.

Используем теперь в качестве систем координат главные векторы C, полагая поочередно

$$\lambda^i = B^i, \qquad \lambda^i = C^i, \qquad \lambda^i = D^i. \qquad (3.126)$$

В этой координатной системе координаты P' имеют вид

$$Y_{(1)} = -\Omega_i B^i, \qquad Y_{(2)} = -\Omega_i C^i, \qquad Y_{(3)} = -\Omega_i D^i. \qquad (3.127)$$

Чтобы вычислить эти координаты для падающего яблока, нам придется вернуться к уравнениям (3.115) — (3.118) и подставить в них λ^i из (3.126). Тогда, пользуясь лоренц-индексом, аналогично (3.127), получаем

$$[D^2\varphi]_{(1)} = B^i DA_i = b, \\ [D^3\varphi]_{(1)} = 3DB^i DA_i + B^i D^2 A_i = Db, \qquad (3.128) \\ [D^4\varphi]_{(1)} = D^2b - 3b^3 - 3bc^2 + bR_{(1441)};$$

$$[D^2\varphi]_{(2)} = 0, \\ [D^3\varphi]_{(2)} = -2bc, \qquad (3.129) \\ [D^4\varphi]_{(2)} = -5bDc - 2cDb + bR_{(2441)};$$

$$[D^2\varphi]_{(3)} = 0, \\ [D^3\varphi]_{(3)} = 0, \qquad (3.130) \\ [D^4\varphi]_{(3)} = 3bcd + bR_{(3441)}$$

В стоящих справа R-членах компоненты тензора Римана берутся в репере, образованном векторами B^i, C^i, D^i и A^i. Таким образом, учитывая знак минус в (3.127), мы имеем

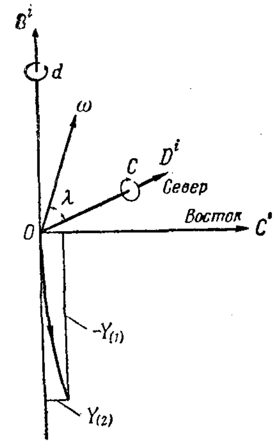
$$Y_{(1)} = -\frac{1}{2}bs^2 - \frac{1}{6}s^3Db + \frac{1}{24}s^4(3bc^2 + 3b^3 - D^2b - bR_{(1441)}) + O_5,$$
$$Y_{(2)} = \frac{1}{3}s^3bc + \frac{1}{24}s^4(5bDc + 2cDb - bR_{(2441)}) + O_5, \qquad (3.131)$$
$$Y_{(3)} = -\frac{1}{24}s^4(3bcd + bR_{(3441)}) + O_5.$$

Эти формулы описывают падение яблока в системе координат, образованной главными нормалями мировой линии ветки дерева.

По сравнению с формулами (3.123) или (3.125) интерпретация (3.131) более проста, так как $Y_{(\alpha)}$ имеют другой порядок малости. Если пренебречь членами порядка O_4, то, очевидно, движение будет совершаться главным образом в направлении вектора — B^i с малым отклонением (порядка O_3) в направлении вектора C^i. В трехмерном пространстве, в котором B^i, C^i и D^i выбраны в качестве осей координат, траектория имеет вид, показанный фиг. 44. Уравнение траектории записывается в виде

$$Y^2_{(2)} = -\frac{8}{9}\frac{c^2}{b}Y^3_{(1)}. \qquad (3.132)$$

Мы замечаем, что начальное ускорение равно b и направлено вдоль вектора—B^i.



Фиг. 44. Свободное падение, рассматриваемое относительно 3-репера, образованного тройкой главных нормалей мировой линии точки подвеса.

Эти результаты проливают свет на вопрос о мировой линии земного наблюдателя. Если последний бросает яблоко, то ускорение яблока направлено вниз (направление ватерпаса) и величина его равна g. Сопоставляя результат эксперимента с теорией относительности, видим, что *первая нормаль к мировой линии земного наблюдателя направлена вертикально вверх (направление ватерпаса с обратным знаком), а первая кривизна его мировой линии равна g; на экваторе*

$$b = g = 978{,}05\ \text{см/сек}^2 = 3{,}263 \cdot 10^{-8}\ \text{сек}^{-1}. \qquad (3.133)$$

Выписывая эти числовые данные, мы должны помнить, что на протяжении всей книги роль основного измерения играет измерение времени, поэтому в качестве единицы измерения времени удобно использовать *секунду*, которую условимся считать величиной, кратной периоду, скажем, красной линии кадмия. Исходя из экспериментального значения скорости света, можно теперь величину *сантиметра* выразить в секундах; мы имеем

$$1\ \text{сек} = 2{,}998 \cdot 10^{10}\ \text{см},$$
$$1\ \text{см} = 3{,}336 \cdot 10^{-11}\ \text{сек}. \qquad (3.134)$$

Выражение для g в *сек* [см. (3.133)] получено с учетом (3.134). Для радиуса кривизны мировой линии земного наблюдателя имеем

$$b^{-1} = 3{,}065 \cdot 10^7\ \text{сек}, \qquad (3.135)$$

что равно приблизительно 1 году[1]).

---

[1]) Перечень численных значений приведен в добавлении Б.

Если в ньютоновской механике учесть вращение Земли, то найдем, что траектория падающего тела отклоняется к востоку. Если изобразить эту траекторию на фиг. 44 так, чтобы вектор B^i был направлен вертикально вверх, а C^i— по направлению к востоку, то уравнение траектории будет согласовываться с формулой (3.132) при условии, что

$$\frac{c^2}{b}=\frac{\omega^2 \cos^2 \lambda}{g}, \tag{3.136}$$

где ω — угловая скорость Земли, а λ — географическая широта[1]). Итак, мы видим, что *вторая нормаль к мировой линии земного наблюдателя направлена к востоку, а вторая кривизна его мировой линии равна*

$$c=\omega \cos \lambda. \tag{3.137}$$

Для наблюдателя, расположенного на широте экватора, численные значения этой второй кривизны и соответствующего радиуса кривизны равны

$$\begin{gathered} c=7{,}292 \cdot 10^{-5}\ \textit{сек}^{-1}, \\ c^{-1}=1{,}371 \cdot 10^{4}\ \textit{сек}. \end{gathered} \tag{3.138}$$

Радиус равен приблизительно 4 *час.*

Интересно отметить, что, хотя ускорение, обусловленное гравитационными силами, играет в обычной механике более важную роль, чем эффекты вращения Земли, первая кривизна b фактически гораздо меньше второй кривизны c. Действительно,

$$\frac{b}{c}=4{,}475 \cdot 10^{-4}. \tag{3.139}$$

Мы убедились, что наблюдая ускорение и отклонение падающего тела, можно физически интерпретировать нормали B^i, C^i (а следовательно, в силу ортогональности и D^i) мировой линии наблюдателя, а также две первые кривизны b и c. Из формулы (3.131) не следует, что третья кривизна d доступна динамическому наблюдению. Однако здесь возможен другой подход. В § 8 нам удалось дать ферми-переносу физическое истолкование с помощью отражающегося фотона. Убедимся теперь, что значение d вытекает из связи между триадой (B^i, C^i, D^i) и 3-репером Ферми $\lambda^i_{(\alpha)}$. Последующие выкладки [вплоть до формулы (3.145) включительно] носят чисто геометрический характер.

Разложим единичные нормали на компоненты в 3-репере Ферми:

$$\begin{gathered} B^i=B_{(\alpha)}\lambda^i_{(\alpha)}, \qquad C^i=C_{(\alpha)}\lambda^i_{(\alpha)}, \\ D^i=D_{(\alpha)}\lambda^i_{(\alpha)}. \end{gathered} \tag{3.140}$$

Для большей конкретности будем мыслить $\lambda^i_{(\alpha)}$ как оси прямоугольных декартовых координат. Тогда наблюдателю, пользующемуся координатими Ферми, $B_{(\alpha)}$, $C_{(\alpha)}$, $D_{(\alpha)}$ представятся как тройка взаимно ортогональных единичных декартовых векторов. Подставим (3.140) в формулы Френе — Серре (1.55) и воспользуемся уравнением ферми-переноса

$$\frac{\delta \lambda^i_{(\alpha)}}{\delta s}=bA^i \lambda^j_{(\alpha)} B_j=bA^i B_{(\alpha)}. \tag{3.141}$$

Получаем

$$B'_{(\alpha)}=cC_{(\alpha)}, \qquad C'_{(\alpha)}=dD_{(\alpha)}-cB_{(\alpha)}, \qquad D'_{(\alpha)}=-dC_{(\alpha)}, \tag{3.142}$$

[1]) См. J. L. Synge, B. A. Griffith, Principles of Mechanics, 3d. ed. New York, 1959, p. 364. Мы приняли здесь, что истинное отклонение согласуется со значением, даваемым ньютоновской формулой. Н. А. Козырев недавно заявил, что это не так.

где штрих имеет смысл d/ds. Далее, если (в евклидовой кинематике) ортонормированный 3-репер ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$) вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, то мы имеем равенство

$$\mathbf{i}' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) = \omega_3 \mathbf{j} - \omega_2 \mathbf{k} \tag{3.143}$$

и два других аналогичных равенства, где ω_1, ω_2, ω_3 означают компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}$ относительно 3-репера. Следовательно, если ω_1, ω_2, ω_3 компоненты угловой скорости 3-репера, образованного нормалями, относительно ферми-репера (и если эти компоненты взяты вдоль указанных нормалей), то

$$\begin{aligned} B'_{(\alpha)} &= \omega_3 C_{(\alpha)} - \omega_2 D_{(\alpha)}, \\ C'_{(\alpha)} &= \omega_1 D_{(\alpha)} - \omega_3 B_{(\alpha)}, \\ D'_{(\alpha)} &= \omega_2 B_{(\alpha)} - \omega_1 C_{(\alpha)}. \end{aligned} \tag{3.144}$$

Сравнивая эти уравнения с (3.142), приходим к следующим простым выражениям для ω_1, ω_2, ω_3:

$$\omega_1 = d, \qquad \omega_2 = 0, \qquad \omega_3 = c. \tag{3.145}$$

Таким образом, мы связали компоненты угловой скорости со второй и третьей кривизнами временноподобной мировой линии, на которой заданы упомянутые 3-реперы. Эти компоненты угловой скорости изображены на фиг. 44.

Чтобы интерпретировать угловую скорость вращения системы координат применительно к случаю земного наблюдателя, целесообразно рассматривать 3-репер Ферми как репер, который в обычном смысле не вращается. Тогда угловую скорость, компоненты которой определены выражениями (3.145), следует отождествить с угловой скоростью вращения Земли (на фиг. 44 она помечена символом ω). Тогда, обозначив широту наблюдателя через λ, получаем

$$c = \omega \cos \lambda, \qquad d = \omega \sin \lambda. \tag{3.146}$$

Первое из этих равенств совпадает с равенством (3.137), полученным из динамического рассмотрения. Второе равенство дает новый результат: оно определяет третью кривизну мировой линии земного наблюдателя. Интересно, что величины c и d имеют, вообще говоря, одинаковый порядок малости. Однако на экваторе доминирует вклад c, а на полюсах — d.

Приведенное выше отождествление кривизны мировой линии земного наблюдателя с доступными наблюдению величинами, конечно, несколько грубо, так как мы не учитывали орбитального движения Земли. При более тщательном рассмотрении этого вопроса необходимо твердо помнить, что (3.145) представляет собой точный математический результат, не зависящий от какой-либо физической интерпретации.

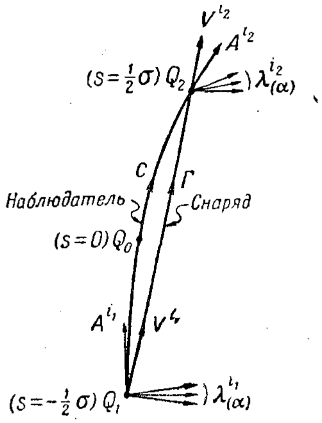
§ 10. Проблема баллистического самоубийства

Обычная баллистическая задача состоит в таком нацеливании орудия, чтобы траектория снаряда пересекала траекторию какой-нибудь цели. Мы рассматриваем проблему баллистического самоубийства: снаряд должен поразить самого наводчика!

Какой бы аморальной ни выглядела такая идея с точки зрения социологии, в общей теории относительности — это точно поставленная задача, так как здесь мы имеем дело просто с двумя наблюдениями, оба из которых выполняет один и тот же наблюдатель. Кроме того, этот пример убедит

нас в том, что, хотя траектория запущенного вертикально вверх снаряда и выглядит резко обломанной (искривленной) в вершине, с пространственно-временной точки зрения она выглядит настолько прямой, насколько это вообще возможно (геодезическая линия).

На фиг. 45 показана мировая линия C «наблюдателя — самоубийцы»: Q_1 — точка отправления снаряда, Q_2 — точка его возвращения, а геодезическая Г, соединяющая Q_1 и Q_2, представляет собой траекторию снаряда. Повторим рассуждения, изложенные в гл. II, § 13, выбрав точку Q_0 на одинаковом расстоянии от Q_1 и Q_2, так что можно записать



Фиг. 45. Баллистическое самоубийство.

$$s_1 = -\frac{1}{2}\sigma, \qquad s_2 = \frac{1}{2}\sigma, \qquad s_2 - s_1 = \sigma. \tag{3.147}$$

В таком случае σ представляет собой временной интервал между Q_1 и Q_2 (время полета снаряда), измеренный по часам, связанным с наблюдателем. Обозначим, согласно (2.258), через τ другую меру времени полета, а именно время, измеренное часами, связанными со снарядом. Тогда, как и в (2.259)

$$\tau = \sigma + \frac{1}{24} b^2\sigma^3 + O_4, \tag{3.148}$$

где b — первая кривизна линии C в точке Q_0, а σ — бесконечно малая величина (O_1).

Заметим, что $\tau > \sigma$, т. е. по сравнению с часами, связанными с наблюдателем, часы, находящиеся на снаряде, идут быстрее¹). Любопытно выяснить, на какую высоту над поверхностью Земли должен подняться снаряд, чтобы эта разница во времени оказалась в пределах наблюдаемости с помощью современных методов хронометрии²).

Чтобы достичь

$$\tau - \sigma \geqslant 10^{-10}\,\textit{сек}, \tag{3.149}$$

необходимо получить величину σ, минимум такую же большую, как дается формулой

$$b^2\sigma^3 = 24 \cdot 10^{-10}\ \textit{сек}. \tag{3.150}$$

Для земного наблюдателя b определяется формулой (3.133); в этом случае

$$\sigma^3 = 2{,}254 \cdot 10^6\ \textit{сек}^3, \qquad \sigma = 131\ \textit{сек}, \tag{3.151}$$

т. е. время полета равно приблизительно 2 *мин*. Это соответствует траектории, высота которой равна около $^1/_8\, g\sigma^2 = 21$ *км*. Вряд ли нужно доказывать, что, стремясь к принципиальной простоте, мы слишком сильно отклонились от реальности, отбросив сопротивление воздуха; последнее привело бы, однако, к весьма серьезным усложнениям.

Рассмотрим начальную и конечную скорости снаряда, измеренные в 3-репере Ферми $\lambda^i_{(\alpha)}$, связанном с мировой линией наблюдателя C. Если 4-скорость снаряда равна V^i и ее компоненты относительно 3-репера Ферми — $V_{(\alpha)}$, то эта 4-скорость связана точными соотношениями с первыми производными мировой функции $\Omega\,(Q_1Q_2)$ [см. (2.17)]:

$$\begin{aligned} \Omega_{i_1} &= -\tau V_{i_1}, & \Omega_{i_2} &= \tau V_{i_2}, \\ \Omega_{(\alpha_1)} &= -\tau V_{(\alpha_1)}, & \Omega_{(\alpha_2)} &= \tau V_{(\alpha_2)}. \end{aligned} \tag{3.152}$$

¹) Это — один из примеров того фундаментального факта, известного в общей теории относительности, которому часто дают абсурдное название *парадокса часов*.

²) В какой-то мере аналогичная проблема красного смещения для искусственного спутника рассмотрена Зингером [1111], Гоффманом [455] и Дэсом [191].

Но в силу (2.269) мы имеем

$$\begin{aligned}\Omega_{(\alpha_1)} &= -\frac{1}{2}\sigma^2\left\{(DA)_{(\alpha)}-\frac{1}{6}\sigma(D^2A)_{(\alpha)}\right\}+O_4,\\ \Omega_{(\alpha_2)} &= -\frac{1}{2}\sigma^2\left\{(DA)_{(\alpha)}+\frac{1}{6}\sigma(D^2A)_{(\alpha)}\right\}+O_4,\end{aligned} \tag{3.153}$$

где A-члены вычислены в точке Q_0. Отсюда и вследствие (3.148) и (3.152) начальная и конечная скорости определяются формулами

$$\begin{aligned}V_{(\alpha_1)} &= \frac{1}{2}\sigma(DA)_{(\alpha)}-\frac{1}{12}\sigma^2(D^2A)_{(\alpha)}+O_3,\\ V_{(\alpha_2)} &= -\frac{1}{2}\sigma(DA)_{(\alpha)}-\frac{1}{12}\sigma^2(D^2A)_{(\alpha)}+O_3.\end{aligned} \tag{3.154}$$

В первом приближении мы имеем

$$V_{(\alpha_1)}=\frac{1}{2}\sigma bB_{(\alpha)}+O_2,\qquad V_{(\alpha_2)}=-\frac{1}{2}\sigma bB_{(\alpha)}+O_2, \tag{3.155}$$

т. е. снаряд движется вдоль первой нормали к C и возвращается обратно вдоль этой нормали. Далее, как известно, для наиболее скорого самоуничтожения земного наблюдателя на Земле он должен запустить снаряд вертикально вверх со скоростью $^1/_2 g\sigma$, где σ — время полета. Следовательно, мы проверили утверждение, которое было доказано в § 9: первая нормаль к мировой линии земного наблюдателя направлена вертикально вверх, и ее первая конечная кривизна b равна, как и в (3.133), g.

Однако скорость не равна в точности начальной скорости с обратным знаком, так как в силу (3.154) и (3.124)

$$V_{(\alpha_1)}+V_{(\alpha_2)}=-\frac{1}{6}\sigma^2(D^2A)_{(\alpha)}+O_3=-\frac{1}{6}\sigma^2(DbB_{(\alpha)})+bcC_{(\alpha)})+O_3, \tag{3.156}$$

где $Db=db/ds$ в точке Q_0. Обращаясь к фиг. 44, мы видим, что в земных условиях этот 3-вектор имеет составляющую $^1/_6\sigma^2 Db$ (в направлении — B^i) и составляющую $^1/_6\sigma^2 bc$, направленную к западу (в направлении — C^i).

Таким образом, мы убеждаемся, что опыт, состоящий в баллистическом самоубийстве, позволяет в принципе определить первую и вторую нормали к мировой линии наблюдателя (B^i, C^i), а также b, c, db/ds, причем наблюдаемыми величинами оказываются время полета σ и 3-вектор, фигурирующий в (3.155) и (3.156). Что касается численных данных в земных условиях, то значения b и c (на экваторе) определяются формулами (3.133) и (3.138). Если выбрать σ согласно формуле (3.151), то получим

$$\frac{1}{2}\sigma b=2{,}137\cdot10^{-6},\qquad \frac{1}{6}\sigma^2 bc=6{,}805\cdot10^{-9}. \tag{3.157}$$

Эти члены входят в формулы (3.155), (3.156) как безразмерные и фактически выражены в долях скорости света. В более привычных единицах имеем

$$\frac{1}{2}\sigma b=6{,}41\cdot10^4\ \textit{см/сек},\qquad \frac{1}{6}\sigma^2 bc=204\ \textit{см/сек}. \tag{3.158}$$

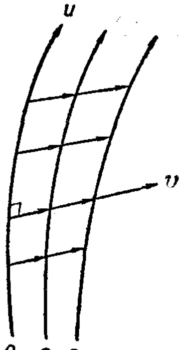
Эти цифры дают представление о значениях величин, с которыми мы имеем дело. Разумеется, следует помнить, что мы здесь ограничены рамками метода (изложенного в гл. II, § 13), который основан на разложении в степенные ряды, и что этот метод применим лишь в весьма ограниченной области пространства — времени. Задача о самоубийстве с помощью снаряда,

достигшего, например, точки в непосредственной близости к Луне и затем возвратившегося на Землю, была бы совершенно вне возможностей этого метода.

§ 11. Статическое измерение гравитационных полей

В § 9 было показано, что наблюдение падающего яблока позволяет получить сведения о мировой линии наблюдателя. Однако оказывается, что такие наблюдения проливают весьма слабый свет на «силу» (напряженность гравитационного поля), т. е. на компоненты тензора Римана R_{ijkm}. Правда, в формулу (3.131) входит зависимость от этих компонент, однако лишь через посредство других членов.

Перейдем теперь к вопросу о возможности измерения характеристик гравитационного поля с помощью экспериментов, которые можно назвать *статическими* по аналогии с общеизвестным статическим опытом, в котором два тела с одинаковыми массами m взвешиваются на разной высоте: одно — на чердаке, другое — в подвале. В ньютоновской физике разность между определенными таким образом весами, деленная на разность высот, на которых взвешивались два тела, и на m, дает скорость изменения напряженности гравитационного поля. Попытаемся выяснить смысл аналогичным образом полученной величины в теории относительности.



Фиг. 46. Статическое измерение гравитационного поля.

На фиг. 46 C_0 — мировая линия наблюдателя. Когда он роняет некоторый предмет, мировая линия предмета отклоняется от C_0, но пока этот предмет в его руках, она совпадает с C_0. Если $A^i (= dx^i/ds)$ есть 4-скорость переносимой вдоль C_0 частицы с массой m, то действующая на нее 4-сила равна

$$F^i = m \frac{\delta A^i}{\delta s} = mbB^i, \tag{3.159}$$

где b — первая кривизна C_0, а B^i — ее первая единичная нормаль. Поскольку среди физиков, работающих в рамках ньютоновской механики, существуют расхождения в мнениях по вопросу о логическом статусе понятия силы, то было бы неразумно с излишней педантичностью настаивать здесь либо на том, 1) что уравнение (3.159) есть *определение* силы, либо на том, 2) что (3.159) есть *закон движения*, в который входит уже принятое понятие 4-силы.

Независимо от нашей точки зрения на уравнение (3.159) величину F^i можно рассматривать как статически измеримую (например, с помощью пружинных весов) и, следовательно, наблюдатель может определить статическим способом вектор B^i и кривизну b. С другой стороны, наблюдатель может прибегнуть к динамическим экспериментам, наблюдая за падающим телом. Разумеется, последний метод более эффективен, ибо (как было показано в § 9) он позволяет определить не только B^i и b, но также и две другие нормали C^i, D^i и две другие кривизны c, d. Мы будем продолжать наше рассмотрение, основываясь на динамическом методе, так как он более обилен результатами, однако всегда можно вернуться к более ограниченным статическим результатам, полагая в последующих формулах $\gamma = \delta = 0$.

В каждой точке на C_0 существует ортогональная тройка нормалей (B^i, C^j, D^i). Пусть β, γ, δ — некоторые постоянные, удовлетворяющие соотношению

$$\beta^2 + \lambda^2 + \delta^2 = 1, \tag{3.160}$$

а dv — бесконечно малая постоянная. Тогда в каждой точке на C_0 можно построить вектор

$$(\beta B^i + \gamma C^i + \delta D^i)\, dv. \tag{3.161}$$

Концы этих бесконечно малых векторов задают смежную мировую линию C_1, которая может быть использована для наблюдений вторым наблюдателем. Повторив ту же самую операцию на C_1 (при тех же постоянных β, γ, δ, dv), мы получим третью смежную линию. Повторяя процесс бесконечно долго, мы получим ∞^1 мировых линий, которые образуют двумерное пространство. Выберем на этом пространстве параметры u и v следующим образом. Пусть $u = s$ на C_0 и $u = \mathrm{const}$ на каждой из кривых, касательных к векторам (3.161) (см. фиг. 46). Пусть $v = \mathrm{const}$ на каждой из мировых линий $C_0, C_1, C_2, \ldots$, а на линии C_0 параметр $v = 0$.

Полагая

$$U^i = \frac{\partial x^i}{\partial u}, \qquad V^i = \frac{\partial x^i}{\partial v}, \tag{3.162}$$

мы приходим к следующим формулам:

$$\begin{gathered} \frac{\delta U^i}{\delta v} = \frac{\delta V^i}{\delta u}, \\ V^i = \beta B^i + \gamma C^i + \delta D^i, \quad V_i V^i = 1, \\ U_i V^i = 0, \quad A^i = \frac{U^i}{U}, \quad U^2 = -U_i U^i, \\ U > 0, \quad (U)_{v=0} = 1. \end{gathered} \tag{3.163}$$

Здесь A^i, B^i, C^i и D^i представляют собой единичный касательный вектор и единичные нормали к любой из кривых, для которых $v = \mathrm{const}$.

Каждая из мировых линий $v = \mathrm{const}$ имеет первую кривизну $b(u, v)$. Наша задача состоит в том, чтобы вычислить $(\partial b/\partial v)_{v=0}$, т. е. наблюдаемый релятивистский инвариант, соответствующий скорости изменения ньютоновского поля гравитации с высотой, как это описывалось выше.

В любой точке двумерного пространства мировых линий мы имеем

$$bB^i = \frac{\delta A^i}{\delta s} = \frac{1}{U} \frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{U^i}{U}\right), \tag{3.164}$$

так как $ds/du = U$. Следовательно,

$$\begin{gathered} bB^i = \frac{1}{U^2}\frac{\delta U^i}{\delta u} - \frac{U^i}{U^3}\frac{\partial U}{\partial u}, \\ b^2 U^4 = \frac{\delta U^i}{\delta u}\frac{\delta U_i}{\delta u} + \left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)^2, \end{gathered} \tag{3.165}$$

поскольку $U(\partial U/\partial u) = -U_i(\delta U^i/\delta u)$. После дифференцирования по v получаем

$$U^4 b \frac{\partial b}{\partial v} + 2b^2 U^3 \frac{\partial U}{\partial v} = \frac{\delta U^i}{\delta u}\frac{\delta^2 U_i}{\delta v\, \delta u} + \frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial^2 U}{\partial v\, \partial u}. \tag{3.166}$$

Затем в силу (3.163) и (1.95)

$$\begin{gathered} U\frac{\partial U}{\partial v} = -U_i \frac{\delta U^i}{\delta v} = -U_i \frac{\delta V^i}{\delta u}, \\ \frac{\delta^2 U_i}{\delta v\, \delta u} = \frac{\delta^2 V_i}{\delta u^2} + R_{ijkm} U^j V^k U^m, \end{gathered} \tag{3.167}$$

и, следовательно, полагая в (3.166) $v = 0$ и замечая, что в этом случае $u = s$, $U = 1$, $\partial U/\partial u = 0$, мы получаем

$$b\frac{\partial b}{\partial v} - 2b^2 A^i \frac{\delta V_i}{\delta s} = \frac{\delta A^i}{\delta s}\left(\frac{\delta^2 V_i}{\delta s^2} + R_{ijkm} A^j V^k A^m\right), \tag{3.168}$$

или

$$\frac{\partial b}{\partial v} = 2bA^i \frac{\delta V_i}{\delta s} + B^i \left(\frac{\delta^2 V_i}{\delta s^2} + R_{ijkm} A^j V^k A^m \right). \tag{3.169}$$

С учетом (3.163) и (1.55) мы имеем

$$\frac{\delta V_i}{\delta s} = \beta (cC_i + bA_i) + \gamma (dD_i - cB_i) - \delta d C_i,$$

$$\frac{\delta^2 V_i}{\delta s^2} = \beta \{c'C_i + c(dD_i - cB_i) + b'A_i + b^2 B_i\} +$$

$$+ \gamma \{d'D_i - d^2 C_i - c'B_i - c(cC_i + bA_i)\} - \delta \{d'C_i - d(dD_i - cB_i)\}, \tag{3.170}$$

где штрих означает d/ds. Следовательно,

$$\begin{aligned} A^i \frac{\delta V_i}{\delta s} &= -\beta b, \\ B^i \frac{\delta^2 V_i}{\delta s^2} &= \beta (b^2 - c^2) - \gamma c' + \delta cd. \end{aligned} \tag{3.171}$$

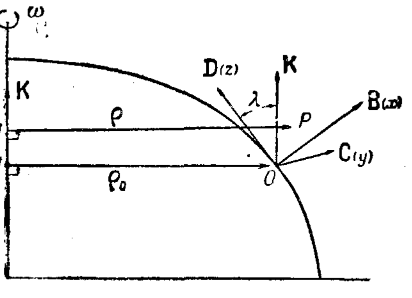
Подставим эти величины в (3.169) и используем набор чисел (1, 2, 3, 4) в качестве лоренц-индексов для компонент в ортонормированном 4-репере (B^i, C^i, D^i, A^i). (Векторы репера нумеруются в указанном порядке.) В результате (для $v = 0$, т. е. на C_0) получим

$$\frac{\partial b}{\partial v} = \beta (R_{(1414)} - b^2 - c^2) + \gamma (R_{(1424)} - c') + \delta (R_{(1434)} + cd). \tag{3.172}$$

Если теперь поочередно полагать каждую из констант β, γ, δ равной единице, а две другие нулю, то получатся следующие формулы для скоростей изменения b в направлении нормалей B^i, C^i, D^i (в заданном порядке):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial b}{\partial v}\right)_{(1)} &= R_{(1414)} - b^2 - c^2, \\ \left(\frac{\partial b}{\partial v}\right)_{(2)} &= R_{(1424)} - c', \\ \left(\frac{\partial b}{\partial v}\right)_{(3)} &= R_{(1434)} + cd. \end{aligned} \tag{3.173}$$

Поскольку dv фактически представляет собой элемент длины, то, как мы видим, *эти формулы дают оценку изменения с расстоянием натяжения в ватерпасе с единичной массой при смещениях в направлениях трех нормалей к мировой линии наблюдателя.*



Фиг. 47. Вращающееся тело

В земных условиях (см. фиг. 44) этими тремя направлениями оказываются соответственно: 1) вертикаль вверх (по ватерпасу), 2) на запад, 3) на север. Перейдем к вычислению компонент тензора Римана, фигурирующих в (3.173), в произвольной точке на поверхности вращающегося тела с помощью сравнения с результатами ньютоновской модели.

На фиг. 47 показан квадрант аксиального сечения тела, вращающегося с угловой частотой ω. Наблюдатель находится в точке O на (географической) широте λ. Единичные векторы, которые мы теперь обозначим через **B**, **C**, **D**, направлены, как указано на фиг. 47. Возьмем их в качестве осей $Oxyz$. Направление ON перпендикулярно к оси враще-

ния, направление этого вращения указано с помощью единичного вектора **K**. Примем обозначение $\overrightarrow{NO} = \varrho_0$.

Пусть $\mathbf{g}$ — вектор, изображающий натяжение в ватерпасе с единичной массой, прикрепленной в точке P с координатами (x, y, z). Пусть $V(x, y, z)$ — ньютоновский гравитационный потенциал, знак которого выбран таким образом, чтобы напряженность гравитационного поля равнялась ∇V. Тогда

$$\mathbf{g} = \nabla V + \varrho\omega^2, \tag{3.174}$$

где $\varrho = \overrightarrow{MP}$ перпендикулярно к **K**. Имеет место равенство

$$\varrho = \varrho_0 + \mathbf{r} - \mathbf{K}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{K}), \tag{3.175}$$

где

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = x\mathbf{B} + y\mathbf{C} + z\mathbf{D}. \tag{3.176}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varrho}{\partial x} &= \mathbf{B} - \mathbf{K}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{K}) = \mathbf{B} - \mathbf{K}\sin\lambda = \mathbf{B}\cos^2\lambda - \mathbf{D}\sin\lambda\cos\lambda, \\ \frac{\partial\varrho}{\partial y} &= \mathbf{C}, \\ \frac{\partial\varrho}{\partial z} &= \mathbf{D} - \mathbf{K}(\mathbf{D}\cdot\mathbf{K}) = \mathbf{D} - \mathbf{K}\cos\lambda = -\mathbf{B}\sin\lambda\cos\lambda + \mathbf{D}\sin^2\lambda. \end{aligned} \tag{3.177}$$

Абсолютная величина g вектора $\mathbf{g}$ равна значению b, фигурирующему в формуле (3.173). Попытаемся вычислить $\partial g/\partial x$, $\partial g/\partial y$, $\partial g/\partial z$ в точке O. Справедливо равенство

$$g\frac{\partial g}{\partial x} = \mathbf{g}\cdot\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x} \quad \text{и т. д.}, \tag{3.178}$$

и в точке O мы имеем

$$(\mathbf{g})_0 = -g_0\mathbf{B}, \tag{3.179}$$

так как **B** направлен вертикально вдоль ватерпаса; здесь g_0 — натяжение в ватерпасе в точке O. Следовательно, в силу (3.174) и (3.178)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_0 &= -\mathbf{B}\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x}\right)_0 = -V_{xx} - \omega^2\cos^2\lambda, \\ \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_0 &= -\mathbf{B}\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y}\right)_0 = -V_{xy} = 0, \\ \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)_0 &= -\mathbf{B}\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z}\right)_0 = -V_{xz} + \omega^2\sin\lambda\cos\lambda. \end{aligned} \tag{3.180}$$

Частные производные, стоящие справа, берутся в точке O; $(\partial g/\partial y)_0$ обращается в нуль вследствие того, что $V_y = 0$ во всей плоскости $y = 0$. Из сравнения (3.173) и (3.180) получаем

$$\begin{aligned} R_{(1414)} - b^2 - c^2 &= -V_{xx} - \omega^2\cos^2\lambda, \\ R_{(1424)} - c' &= 0, \\ R_{(1434)} + cd &= -V_{xz} + \omega^2\sin\lambda\cos\lambda. \end{aligned} \tag{3.181}$$

Подставляя в (3.181) величины c и d, определяемые формулами (3.146), убеждаемся, что некоторые члены при этом сокращаются и (поскольку

$c'=0$) мы находим, что

$$R_{(1414)} = -V_{xx} + g_0^2, \quad R_{(1424)} = 0, \qquad R_{(1434)} = -V_{xz}. \tag{3.182}$$

Таким образом, мы вычислили некоторые компоненты тензора Римана через вторые производные ньютоновского потенциала в предположении (довольно резонном), что ньютоновская механика является достаточно точным приближением к реальной физической картине. Более осторожно мы могли бы сказать, что оценка (3.182) корректна, если тело и его вращение таковы, что справедлива ньютоновская механика. Заметим, что $R_{(1414)}$ представляет собой взятую с обратным знаком риманову кривизну для двумерного элемента, заданного мировой линией наблюдателя и ее первой нормалью. Чтобы вычислить компоненты (3.182) в некоторой точке на поверхности Земли, допустим, что Земля представляет собой однородную сферу радиусом a. Тогда по теории Ньютона

$$V_{xx} = \frac{2\bar{g}}{a}, \quad V_{xz} = 0, \tag{3.183}$$

где $\bar{g}$ — ускорение, обусловленное только гравитацией. Разница между g_0 и $\bar{g}$ обязана вращению Земли; она мала, и можно положить

$$\bar{g} = g_0 = 980 \ см/сек^2 = 3{,}27 \cdot 10^{-8} \ сек^{-1}, \qquad a = 6{,}37 \cdot 10^8 \ см = 2{,}12 \cdot 10^{-2} \ сек. \tag{3.184}$$

Поскольку

$$\frac{g_0^2}{V_{xx}} = \frac{1}{2}\bar{g}a = 3{,}47 \cdot 10^{-10}, \tag{3.185}$$

членом g_0^2 в формуле (3.182) можно пренебречь, и из всех перечисленных нами компонент отлична от нуля лишь одна:

$$R_{(1414)} = -\frac{2\bar{g}}{a} = -3{,}08 \cdot 10^{-6} \ сек^{-2}. \tag{3.186}$$

Она соответствует «радиусу кривизны» в 570 *сек*, имеющему тот же порядок, что и радиус орбиты Земли (см. дополнение Б).

§ 12. Перенос Ферми—Уолкера вдоль пространственноподобной кривой и его физический смысл

Перенос Ферми — Уолкера вдоль временноподобной кривой в пространстве — времени был определен уравнением (1.72), а перенос Ферми — уравнением (1.84). Физическая интерпретация этого типа переноса дана в § 8 при помощи примера с отражающимся фотоном: критерий ферми-переноса системы координат заключается в условии, что относительно этой системы направления излучения и поглощения отраженного фотона при этом совпадают с точностью до первого порядка расстояния до объекта, от которого отражается фотон.

Физический смысл пространственноподобной кривой в пространстве — времени значительно менее прозрачен, чем в случае временноподобной кривой; последняя описывает историю движения частицы, тогда как первая может иметь лишь негативный смысл, как набор событий, между которыми

невозможно установить причинных связей, или как набор событий, с помощью которого нельзя описать эволюцию движения фотона или материальной частицы. Однако с точки зрения формализма переноса Ф — У и переноса Ферми между ними большого различия нет. Мы просто меняем знак в формулах гл. I, § 4 и устанавливаем следующие определения, справедливые для пространственноподобной кривой C:

Перенос Ферми — Уолкера:

$$DF^i = -F_j(A^i DA^j - A^j DA^i), \tag{3.187}$$

Перенос Ферми:

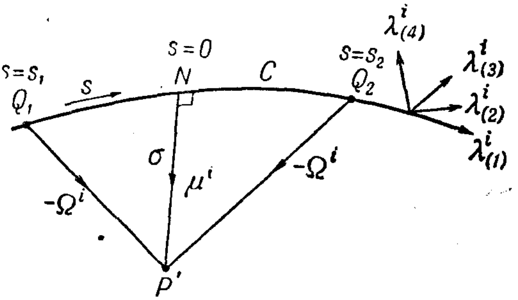
$$DF^i = -A^i F_j DA^j, \tag{3.188}$$

где $D = \delta/\delta s$ — абсолютное дифференцирование по пространственной мере кривой C, а $A^i = dx^i/ds$ — единичный вектор, касательный к C, который удовлетворяет соотношению

$$A_i A^i = 1. \tag{3.189}$$

Легко убедиться, что сам вектор A^i удовлетворяет требованиям переноса Ф — У (3.187) и что при таком переносе скалярные произведения сохраняются.

Чтобы выяснить физический смысл переноса Ф — У вдоль пространственноподобной кривой, можно повторить рассуждения, аналогичные приведенным в § 8 (отражающийся фотон) с учетом того, что знак теперь должен быть изменен на обратный. Однако эти рассуждения были бы слишком громоздкими, если излагать их детально. Достаточно пояснить лишь существенные изменения в физической ситуации и привести наиболее важные результаты.



Фиг. 48. Физический смысл переноса Ф — У вдоль пространственноподобной кривой.

Фиг. 48 — это соответствующим образом повернутая[1]) фиг. 42. Линия C — пространственноподобная кривая, а s — ее пространственная мера, определенная через риманову метрику (ds имеет хронометрический смысл; см. § 4). Возьмем на C ортонормированный 4-репер $\lambda^i_{(a)}$, такой, чтобы $\lambda^i_{(1)}$ был касательным к C, а $\lambda^i_{(4)}$ — временноподобен. Пусть Q_1 и Q_2 — две соседние точки на кривой C. Попытаемся подобрать физический опыт, который позволил бы выяснить, согласуются ли в действительности реперы $\lambda^i_{(a)}$ в точках Q_1 и Q_2 с условием переноса Ферми — Уолкера.

Чтобы реализовать такой опыт, представим себе некоторую точку P', такую, что если в этой точке происходит вспышка, то один фотон, излученный в момент вспышки, проходит через точку Q_1, а другой — через Q_2. В действительности оба наблюдателя, мировые линии которых (на фиг. 48 не приведены) проходят через точки Q_1 и Q_2 соответственно, *увидят* вспышку в этих точках. Изотропная геодезическая $P'Q_1$ определяет относительно 3-репера $\lambda^i_{(\alpha)}$ в точке Q_1 направление в этой точке с направляющими

[1]) В этой книге временноподобные векторы на пространственно-временных диаграммах, ориентированные в будущее, всюду направлены вверх, составляя с вертикалью угол меньше 45°.

косинусами $\theta_{(\alpha)}(Q_1)$. Аналогично $P'Q_2$ имеет направляющие косинусы $\theta_{(\alpha)}(Q_2)$ в точке Q_2.

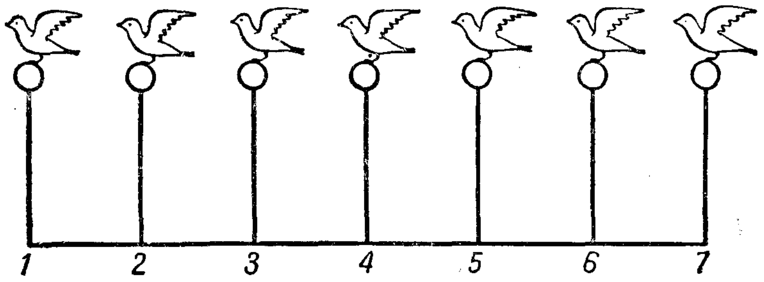
Ясно, что, хотя здесь и не рассматривается отражающий фотон, исследование этих направляющих косинусов будет сильно напоминать аналогичную задачу в § 8. Проведем геодезическую $P'N$, ортогональную C, и положим $\sigma = P'N$, $s = 0$ в точке N, $s = s_1$ в точке Q_1 и $s = s_2$ в точке Q_2 (в точности как это делалось в § 8). Тогда в предположении, что σ — малая величина (O_1), используя мировую функцию Ω и повторяя выкладки, проделанные в § 8, находим

$$s_2 - s_1 = 2\sigma + O_2. \tag{3.190}$$

При условии, что 4-репер переносится в смысле Ферми — Уолкера и $\lambda^i_{(1)} = A^i$, *имеем*

$$\begin{aligned} \theta_{(1)}(Q_1) + \theta_{(1)}(Q_2) &= O_2, \\ \theta_{(2)}(Q_1) - \theta_{(2)}(Q_2) &= O_2, \\ \theta_{(3)}(Q_1) - \theta_{(3)}(Q_2) &= O_2. \end{aligned} \tag{3.191}$$

(Заметим, что в первом уравнении стоит знак «+».) Если 4-репер не подвергается переносу Ф — У, в правой части каждого из уравнений (3.191) будут стоять члены порядка O_1. Этот факт позволяет определить перенос



Фиг. 49. Птицы на фонарных столбах.

Ф — У опытным путем; критерий состоит в следующем: если σ — величина, настолько малая, что членами порядка O_2 можно пренебречь, то *направляющий косинус относительно касательной меняет знак, тогда как два других остаются неизменными.*

Поскольку с физической точки зрения перенос Ф — У оказывается наиболее фундаментальной операцией (можно говорить, что он характеризует отсутствие вращения), хотелось бы выработать в себе способность понимать изложенный выше опыт интуитивно. Добиться этого отнюдь не легко, ибо ньютоновские представления укоренились в нас настолько сильно, что даже к понятию пространственноподобной кривой в пространстве — времени мы привыкаем с трудом. При попытках интерпретировать трудные понятия лучше всего помогают необычные примеры. Иллюстрация, приведенная ниже, может оказаться полезной.

Представьте себе (фиг. 49) ряд равноудаленных друг от друга фонарных столбов, занумерованных цифрами *1*, *2*, *3*... На каждом сидит птица. Пусть каждая из птиц способна зажигать лишь тот фонарь, на котором она сидит.

Пусть сначала зажигает свой фонарь птица *1*, а птица *2* зажигает свой в тот момент, когда она *видит* вспышку фонаря *1*; аналогично птица *3* зажигает свой фонарь, когда *видит* вспышку фонаря *2* и т. д. Тогда вспышки

фонарей образуют набор событий, которые можно рассматривать как кривую C в пространстве — времени, причем *кривую изотропную.*

Допустим теперь, что птицы выполняют те же операции, но их реакция несколько замедлена, так что фонарь каждый раз зажигается с некоторым запозданием. В этом случае C становится временноподобной, и птица *1* могла бы, улетев со своего фонаря, присутствовать при зажиганиях фонарей другими птицами, т. е. C могла бы быть ее мировой линией.

Наконец, предположим, что птицы зажигают свои фонари безотносительно к какой-либо связывающей их цепи причин. Каждый акт зажигания мог бы быть обусловлен разными обстоятельствами. Птицы могли бы, например, делать это, увидев, что вдали за плоскостью рисунка зашло Солнце. В этом случае для любой из птиц могло бы оказаться невозможным, взлетев сразу же после того, как зажжен ее фонарь, успеть прилететь к следующему фонарю до того, как он будет зажжен. В этом случае C была бы пространственноподобной. Именно этот случай нам и предстоит рассмотреть.

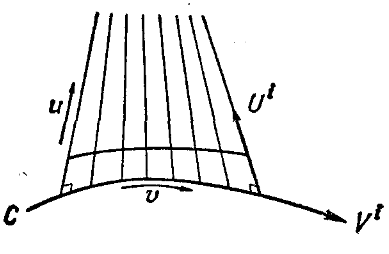
Итак, пространственноподобная кривая C построена. Следующий шаг состоит в том, чтобы снабдить ее ортонормированным 4-репером $\lambda^i_{(a)}$; вопроса о переносе Ф — У мы пока не касаемся. Построение касательного вектора $\lambda^i_{(1)}$ оказывается нетрудным, так как он определяется актами зажигания двух соседних фонарей. Что можно сказать относительно временноподобного вектора $\lambda^i_{(4)}$, ортогонального C? Временноподобный вектор представляет собой 4-скорость частицы, и лучшее, что можно придумать, это заставлять каждую птицу взлетать в воздух в тот момент, когда она зажигает свой фонарь. Но в каком направлении и с какой скоростью должна она лететь? Рассмотрим, например, птицу *4*. После того как она взлетит, ей предстоит увидеть одновременно вспышки фонарей *3* и *5* (поскольку C пространственноподобна, птица *4* может увидеть эти вспышки лишь после того, как загорелся ее собственный фонарь и она оказалась в полете). Такая схема событий, разумеется, не фиксирует $\lambda^i_{(4)}$, а лишь накладывает на него некоторые ограничения. Сделав любой подчиняющийся необходимым ограничениям выбор, не составляет труда определить для каждой птицы в ее мгновенном пространстве два вектора $\lambda^i_{(2)}$ и $\lambda^i_{(3)}$, ортогональные $\lambda^i_{(1)}$.

Мы имеем теперь ортонормированный 4-репер, заданный вдоль пространственноподобной кривой C, причем $\lambda^i_{(1)}$ касается C, а $\lambda^i_{(4)}$ временноподобен и ортогонален C. Остается лишь применить этот опыт к рассмотрению переноса Ферми — Уолкера. Сосредоточим внимание на птицах *3* и *4*. Нужно в некоторый момент времени произвести где-нибудь взрыв, так чтобы вспышка света от него достигла обеих птиц в то мгновение, когда они зажигают свои фонари и взлетают. От каждой птицы в этом случае требуется, чтобы она «указала» направление [относительно своего 3-репера (триады) $\lambda^i_{(\alpha)}$], в котором она видела вспышку света от взрыва. Критерий переноса Ф — У состоит в следующем: направляющие косинусы относительно касательных векторов $\lambda^i_{(1)}$ должны быть равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку, тогда как другие направляющие косинусы должны быть равны.

Настоятельно рекомендуем читателю придумать другие (возможно, более простые) примеры. Однако при этом следует остерегаться двух ловушек. Во-первых, нельзя опираться на два свойственных ньютоновским представлениям и ошибочных в теории относительности понятия — об абсолютной одновременности и абсолютно жестком теле. Во-вторых, коль скоро мы имеем дело с общей теорией относительности, мыслить прямую мировую линию, ортогональную к бесконечному трехмерному плоскому пространству, недопустимо. Однако пока дело касается

малых областей и тензор Римана в наших грубых приближениях нигде не фигурирует, эта ошибка более простительна.

При работе с пространственноподобными кривыми опасно прежде всего допустить огромную и непоправимую ошибку — идентифицировать пространственноподобную кривую с натянутой струной. Последнее бессмысленно, так как всякая кривая представляет собой одномерное пространство, а 4-траектория струны — двумерное. Правда, это двумерное пространство естественно распадается на временноподобные кривые (траектории частиц, из которых состоит струна), однако оно расщепляется не на пространственноподобные кривые. Если угодно, можно провести в этом двумерном пространстве линии, ортогональные к мировым линиям частиц, и получить таким образом систему пространственноподобных кривых, каждую из которых можно было бы назвать формой струны. Но это построение несколько произвольно. Как бы глубоко ни укоренились в нас ньютоновские понятия и представления, необходимо подчеркнуть, что пространство — время в общем случае невозможно каким-либо инвариантным путем разделить на пространство и время. Правда, для статических пространств (см. гл. VII и VIII) такое расщепление действительно существует. Но этот случай весьма специфичен. Чтобы осмыслить понятие пространства — времени, лучше пока оставить в стороне статические пространства.



Фиг. 50. Физический смысл первой нормали и кривизны пространственноподобной кривой C. (Чертеж отнюдь не выполнен небрежно: геодезические нормали к выпуклой кривой C *имеют* тенденцию *сближаться*.)

В процессе рассуждений, приведенных ниже, мы придем к физической интерпретации пространственноподобных геодезических. Более того, выяснится физический смысл первой нормали B^i и первой кривизны b любой пространственноподобной кривой.

На фиг. 50 C — пространственноподобная кривая, а U^i — временноподобный единичный вектор, ортогональный к C и претерпевающий перенос Ферми вдоль этой кривой. В направлениях U^i мы проведем временноподобные геодезические, образующие двумерное пространство, на котором выберем параметры (u, v), причем u — расстояние по геодезической от C, а v принимает на каждой геодезической постоянное значение, так что на кривой C параметр $v = s$, причем ds представляет собой пространственный элемент (длины) на C. Тогда в обозначениях, которыми мы часто пользовались ранее,

$$U^i = \frac{\partial x^i}{\partial u}, \quad V^i = \frac{\partial x^i}{\partial v}, \quad \frac{\delta U^i}{\delta v} = \frac{\delta V^i}{\delta u},$$
$$U_i V^i = 0, \quad \frac{\delta U^i}{\delta u} = 0, \quad U_i U^i = -1, \tag{3.192}$$

и, поскольку U^i претерпевает на C перенос Ферми, мы в силу (3.188) имеем

$$\frac{\delta U^i}{\delta v} = -V^i U_j \frac{\delta V^j}{\delta v} \quad \text{для } u = 0, \tag{3.193}$$

так как на C вектор $V^i = A^i = dx^i/ds$ представляет собой единичный вектор, касательный к C.

Основная идея такова: чем сильнее искривлена линия C, тем быстрее стремятся сблизиться геодезические $v = \text{const}$ над выпуклой частью C. Скорость уменьшения промежутков между соседними геодезическими

определяет меру кривизны C. Мы имеем

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(V_i V^i) = V_i \frac{\delta V^i}{\delta u} = V_i \frac{\delta U^i}{\delta v} \tag{3.194}$$

и в силу (3.193) при $u=0$ отсюда получаем

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(V_i V^i) = -U_i \frac{\delta V^i}{\delta v}. \tag{3.195}$$

Нормали и кривизны кривой определяются математическими формулами Френе — Серре, которые для временноподобной кривой имеют вид (1.55). В случае пространственноподобной кривой нужно в некоторых местах изменить знаки, однако мы сохраним вид (1.55а) неизменным:

$$\frac{\delta A^i}{\delta s} = bB^i, \qquad b \geqslant 0, \tag{3.196}$$

где b — первая кривизна, а B^i — единичная первая нормаль[1]). В этом случае (3.195) можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(V_i V^i) = -bU_i B^i. \tag{3.197}$$

Рассмотрим две соседние геодезические, определяемые параметрами v и $v+\eta_0$, так что η_0 характеризует расстояние между этими геодезическими по нормали на C. Пусть η — расстояние между геодезическими по нормали при произвольном значении u. Тогда

$$V_i V^i = \frac{\eta^2}{\eta_0^2}, \tag{3.198}$$

и из (3.197) следует (на C)

$$\frac{1}{\eta_0}\frac{d\eta}{du} = -bU_i B^i. \tag{3.199}$$

Если мы возьмем теперь на C 4-репер Ферми и разложим в нем векторы U^i и B^i, то придем к формуле

$$\frac{1}{\eta_0}\frac{d\eta}{du} = -bB_{(a)}U^{(a)}. \tag{3.200}$$

Всем величинам, входящим в эту формулу, за исключением b и $B_{(a)}$, была дана физическая интерпретация, тогда как величина $U^{(a)}$ с точностью до соотношения

$$U_{(a)}U^{(a)} = -1 \tag{3.201}$$

произвольна. Следовательно, физический смысл вектора $bB_{(a)}$ ясен, и поскольку

$$B_{(a)}B^{(a)} = \pm 1, \tag{3.202}$$

то b и $B_{(a)}$ можно определить. Таким образом, физический смысл первой кривизны и первой нормали пространственноподобной кривой выяснен. Под выяснением «физического смысла» мы понимаем возможность измерения упомянутых величин хронометрическими методами.

Теперь легко разработать опыт, позволяющий выяснить, является ли пространственноподобная кривая геодезической. Все, что требуется для этого сделать, это измерить величину, стоящую в левой части (3.199):

---

[1]) Для простоты мы будем предполагать, что вектор $\delta A^i/\delta s$ пространствено- или временноподобен. Он мог бы быть и изотропным; в этом случае мы говорили бы, что кривая имеет нулевую первую кривизну, но вполне определенную изотропную первую нормаль, компоненты которой можно измерить хронометрически.

если она равна нулю для всех временноподобных векторов U^i, то C — геодезическая. В самом деле, мысль чрезвычайно проста: в случае, когда C — геодезическая, ортогональные к ней геодезические, берущие начало на C и имеющие направления, определяемые переносом Ферми (т. е. параллельным переносом), не сходятся и не расходятся.

§ 13. Физический смысл абсолютного дифференцирования и систематическое измерение гравитационных полей

Пусть C — некоторая временноподобная или пространственноподобная кривая, а $\lambda^i_{(a)}$— ортонормированный 4-репер, подвергающийся переносу Ферми — Уолкера вдоль C, так что в силу (1.72) и (3.187)

$$\frac{\delta\lambda^i_{(a)}}{\delta s} = -\varepsilon\lambda^j_{(a)}\left(A^i\frac{\delta A_j}{\delta s} - A_j\frac{\delta A^i}{\delta s}\right), \tag{3.203}$$

где A^i — единичный касательный вектор, а ε — индикатор C. Тогда любой вектор V^i, заданный вдоль C, может быть разложен на инвариантные компоненты:

$$V^i = V^{(a)}\lambda^i_{(a)}, \tag{3.204}$$

и абсолютная производная имеет вид

$$\frac{\delta V^i}{\delta s} = \frac{dV^{(a)}}{ds}\lambda^i_{(a)} - \varepsilon V^{(a)}\lambda^j_{(a)}\left(A^i\frac{\delta A_j}{\delta s} - A_j\frac{\delta A^i}{\delta s}\right). \tag{3.205}$$

Величины, стоящие справа, физически измеримы, и, следовательно, физически измерима абсолютная производная $\delta V^i/\delta s$. То же самое, разумеется, имеет место и для абсолютной производной относительно любого другого параметра (не обязательно, чтобы это был интервал s).

Как отмечалось ранее, обычные измерения «гравитационного поля» с помощью маятника или (что эквивалентно) через натяжения в ватерпасе фактически вообще не являются измерениями гравитационного поля; это измерения абсолютного ускорения наблюдателя. В § 11 мы в терминах теории относительности описали эксперимент, заключающийся во взвешивании одного тела в подвале и другого — на той же вертикали на чердаке. При этом мы очень близко подошли к определению самой основы, а именно тензора Римана. Однако изложенный в § 11 метод носит весьма частный характер и позволяет определить лишь некоторые из компонент этого тензора. Теперь, когда дана физическая интерпретация абсолютным производным, в наших возможностях становится вывести формулу, с помощью которой можно отыскать [1]) все компоненты R_{ijhm}.

Применяемый метод является весьма общим. Рассмотрим конгруэнцию кривых, прдпочтительно временноподобных, так как в этом случае они описывают эволюцию движения «облака» частиц. Не обязательно, чтобы частицы были свободными. Выберем четыре параметра $y_{(a)}$, три из которых ($y_{(\alpha)}$) вдоль каждой из кривых постоянны, а $y_{(4)}$— параметр вдоль каждой кривой; в качестве последнего может (хотя и не обязательно) служить время. Тогда конгруэнция описывается уравнениями

$$x^i = x^i(y) \tag{3.206}$$

и частные производные запишутся в виде

$$X^i_{(a)} = \frac{\partial x^i}{\partial y_{(a)}}. \tag{3.207}$$

[1]) Мы не описываем приборов, пригодных для такого рода «геодезических съемок», выполняемых правильно с точки зрения теории относительности.

Последние представляют собой четыре контрвариантных векторных поля. В силу (1.95) имеем

$$R_{(abcd)}=R_{ijkm}X^i_{(a)}X^j_{(b)}X^k_{(c)}X^m_{(d)}=g_{ij}X^i_{(a)}\left(\frac{\delta^2X^j_{(b)}}{\delta y_{(c)}\,\delta y_{(d)}}-\frac{\delta^2X^j_{(b)}}{\delta y_{(d)}\,\delta y_{(c)}}\right). \quad (3.208)$$

Это и есть искомая формула, с помощью которой инвариантные компоненты тензора Римана выражаются через абсолютные производные. Для удобства можно было бы выбрать параметры $y_{(a)}$ таким образом, чтобы в рассматриваемой точке векторы (3.207) образовывали ортонормированный 4-репер.

Глава IV

МАТЕРИАЛЬНЫЕ СРЕДЫ

§ 1. Статистическая модель

Несмотря на то, что принимать математическое описание природы за самую природу (см. философские замечания в гл. III, § 1) было бы ошибкой, совершенно бесспорно, что современный физик считает более правдоподобным описание вещества в виде совокупности частиц, чем в виде континуума. В соответствии с этим мы начнем с краткого изложения статистики системы частиц. Однако ввиду того, что общая теория относительности по существу своему является теорией поля, мы отойдем от дискретной модели материи, как только развитие этой модели подготовит почву для построения теории непрерывных сред.

Мы будем рассматривать в римановом пространстве — времени ансамбль *частиц*, включив в это понятие

1) материальные частицы,
2) фотоны,
3) внутренние импульсы.

Материальной частице соответствует временноподобная мировая линия с 4-скоростью v^i (причем $v_i v^i = -1$) и 4-импульсом p^i ($= mv^i$), так что квадрат массы равен $m^2 = -p_i p^i$. Фотон описывается изотропной мировой линией с касательным вектором p^i, однако при этом вектор v^i не существует и $m = 0$. Фотон можно рассматривать как предельный случай материальной частицы, масса которой стремится к нулю, а 4-скорость — к бесконечности, причем их произведение стремится к конечному пределу p^i. Внутренние взаимодействия (импульсы) могут проявляться как в притяжении, так и в отталкивании. Импульс отталкивания механически идентичен фотону, в то время как импульс притяжения имеет 4-вектор импульса, направленный в прошлое, а не в будущее. На самом деле энергия его отрицательна, тогда как все прочие частицы обладают положительными энергиями. Конечно, такие внутренние импульсы в высшей степени гипотетичны. Их вводят с тем, чтобы выбранная модель стала применимой к твердому телу, оказывающему сопротивление сжатиям и растяжениям (Синг [1175], стр. 210).

Различные частицы могут претерпевать столкновения друг с другом, т. е. их мировые линии могут пересекаться. При столкновениях происходит скачкообразное изменение 4-импульсов. В этом параграфе нет необходимости полагать (как это потребуется в § 2), что отрезки мировых линий в промежутках между двумя столкновениями представляют собой геодезические, или принимать какие-либо законы сохранения для процесса столкновения, так как ряд статистических параметров можно ввести и без этих предположений.

При статистическом описании системы, состоящей из большого числа частиц, мы вводим в каждой рассматриваемой точке O ортонормированный 4-репер $\lambda^i_{(a)}$ (вектор $\lambda^i_{(4)}$ временноподобен), а 4-импульс p^i любой частицы,

находящейся в точке O, разлагаем на инвариантные компоненты [см. (1.54)]:

$$p_{(a)} = p_i \lambda^i_{(a)}. \quad (4.1)$$

Подняв лоренц-индекс, можно рассматривать $p^{(a)}$ как прямоугольные координаты в плоском пространстве Минковского *четырехмерных импульсов*. В таком пространстве уравнения

$$p_{(a)} p^{(a)} = \text{const} \quad (4.2)$$

дают псевдосферы, а уравнение

$$p_{(a)} p^{(a)} = 0 \quad (4.3)$$

описывает изотропный конус. Инвариантный элемент четырехмерного объема равен

$$dp = dp^{(1)}\, dp^{(2)}\, dp^{(3)}\, dp^{(4)}. \quad (4.4)$$

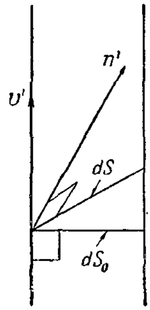
На псевдосфере существует инвариантный элемент трехмерного объема, а на изотропном конусе — инвариантный двумерный элемент (Синг [1175], стр. 430).

Всякое достаточно строгое рассмотрение статистики фотонов и внутренних импульсов сопряжено с интегрированием по изотропному конусу, а в случае материальных частиц квантовой природы, массы которых принимают дискретный ряд значений, возникает необходимость суммирования по псевдосферам (Синг [1179]). Однако эти трехкратные суммирования приводят к некоторым формальным трудностям, не имеющим ничего общего с важными для нас на данном этапе аспектами, так что мы несколько модифицируем задачу. Мы будем приписывать фотонам и внутренним импульсам временноподобные мировые линии и весьма малые массы, а материальные частицы будем считать лишенными квантовых свойств. Кроме того, чтобы выделить существо дела, мы отбросим внутренние импульсы притяжения. Тогда задача сводится к рассмотрению системы материальных частиц, массы которых могут принимать любые положительные значения, так что описывающие их точки в пространстве 4-импульсов образуют облако внутри части светового (изотропного) конуса (4.3), соответствующей будущему. При попытке вернуться к исходному положению потребовалось бы восстановить импульсы притяжения и перейти к соответствующему пределу, устремляя определенные векторы 4-импульсов к положению вдоль поверхности изотропного конуса, а другие — возможно на квантованные псевдосферы. Однако этот процесс мы осуществлять не будем.

С заданным событием O мы связываем некоторый 4-импульс p^i, так что рассматриваются две точки — точка в пространстве — времени и точка в пространстве 4-импульсов. В точке O возьмем *поляризованную мишень*[1]) dS; она представляет собой трехмерный элемент, имеющий единичную нормаль n^i. В смысле направления этой нормали мы и говорим о поляризации мишени dS. Возьмем в точке p^i 4-ячейку dp и попробуем разобрать

[1]) Этот анализ охватывает и пространственно- и временноподобные мишени, т. е. мишени, вектор нормали которых n^i соответственно временно- либо пространственноподобен. Чтобы поляризовать пространственноподобную мишень, нормаль n^i можно выбрать направленной в будущее или в прошедшее. Для поляризации временноподобной мишени мы можем избрать направление любой из двух противоположных пространственноподобных нормалей. Полезно иметь в виду, что все векторы, лежащие на пространственноподобных мишенях, пространственноподобны, в то время как в случае временноподобных мишеней одни из лежащих на них векторов временноподобны, а другие — пространственноподобны. Вспомним, что все векторы, перпендикулярные временноподобному вектору, пространственноподобны, но пространственноподобный вектор имеет в числе перпендикулярных себе как пространственноподобные, так и изотропные и временноподобные векторы.

вопрос о числе частиц, мировые линии которых пересекают dS, а 4-импульсы лежат в dp. Лучше, однако, рассматривать *поляризованное число* частиц, т. е. число частиц, помеченное знаком «+» либо «—» в зависимости от того, в положительном или отрицательном направлении пересекают эти частицы мишень dS (иначе говоря, движутся ли они в направлении вектора n^i или в обратном ему). Знак направления перехода через мишень зависит от направления 4-скорости v^i $(= p^i/m)$, и легко видеть, что положительный либо отрицательный переход получается в зависимости от того, что



Фиг. 51. Тонкая времениподобная мировая трубка с поперечным сечением dS_0 и наклонным сечением dS.

$$\frac{\varepsilon(n)\, v_i n^i}{|v_j n^j|} = +1 \text{ или } -1. \tag{4.5}$$

Таким образом, для того чтобы из числа частиц получить поляризованное число, необходимо просто умножить исходное число на *поляризованный множитель*.

Перед нами тонкая трубка мировых линий (фиг. 51), причем dS — наклонное сечение. Если dS_0 — поперечное сечение, то формула для проекции дает

$$dS_0 = dS\, |v_j n^j|. \tag{4.6}$$

Число участвующих в процессе частиц можно выразить как

$$\nu(x,\ p)\, dS_0\, dp, \tag{4.7}$$

где $\nu(x, p)$ — *функция распределения*, по самому способу своего задания инвариантная. Подставляя сюда из (4.6) выражение для dS_0 и вводя поляризованный множитель (4.5), мы обнаруживаем, что *поляризованное число частиц в классе* (x, dS; p, dp) *равно*

$$\nu(x,\ p)\, \varepsilon(n)\, v_i n^i\, dS\, dp. \tag{4.8}$$

Мы рассматривали до сих пор одну тонкую трубку. Оставляя поляризованную мишень фиксированной, будем теперь учитывать все частицы и исследуем некоторые виды потоков сквозь поляризованную мишень, например поток числа частиц и поток 4-импульса. Так как все эти понятия допускают один общий подход, мы будем говорить о q-потоке, где q — некоторая характеристика частиц. Она может быть скалярной, векторной или тензорной, но мы пока опустим индексы. Определим q-поток сквозь поляризованную мишень dS как

$$q\text{-поток} = \sum_{+} q - \sum_{-} q, \tag{4.9}$$

где Σ_+ — сумма всех значений q, свойственных частицам, совершающим положительные переходы, а Σ_- — сумма всех q для частиц, совершающих отрицательные переходы. Учитывая, что величина q имеет одно и то же значение для всех частиц класса (x, dS; p, dp) (что будет естественно, если q зависит лишь от 4-импульса), найдем из (4.9) величину q-потока, умножая q на поляризованное число (4.8) и интегрируя по пространству 4-импульсов. Знак минус в равенстве (4.9) автоматически учитывается при поляризации числа частиц, и мы получаем

$$q\text{-поток} = \varepsilon(n)\, Q_i n^i\, dS, \tag{4.10}$$

где

$$Q_i = \int \nu(x,\ p)\, q v_i\, dp = \int \nu(x,\ p)\, m^{-1} q p_i\, dp. \tag{4.11}$$

Эта форма записи q-потока имеет то достоинство, что мишень отделяется от статистической величины Q^i, не зависящей от размера и ориентации мишени, хотя, конечно, зависящей от ее положения. Отметим, что Q_i становится вектором лишь тогда, когда q — скаляр. Если тензорный характер q символически изобразить как $q_{\dots}$, то тензорный характер Q_i изобразится в виде $Q_{\dots i}$.

Придавая q поочередно значения

$$q=1,\ p_j,\ p_jp_k,\ p_jp_kp_m,\ \dots, \tag{4.12}$$

мы придем к следующим *моментам* функции распределения $\nu(x, p)$:

$$q=1, \qquad Q_i=\int \nu(x, p)\, m^{-1}p_i\, dp, \tag{4.13}$$

$$q=p_j, \qquad Q_{ij}=\int \nu(x, p)\, m^{-1}p_ip_j\, dp, \tag{4.14}$$

$$q=p_jp_k, \qquad Q_{ijk}=\int \nu(x, p)\, m^{-1}p_ip_jp_k\, dp, \tag{4.15}$$

$$q=p_jp_kp_m, \qquad Q_{ijkm}=\int \nu(x, p)\, m^{-1}p_ip_jp_kp_m\, dp \text{ и т. д.} \tag{4.16}$$

Соответствующие потоки через поляризованную мишень dS равны

$$q=1, \qquad q\text{-поток}=\varepsilon(n)\, Q_in^i\, dS, \tag{4.17}$$

$$q=p_j, \qquad q\text{-поток}=\varepsilon(n)\, Q_{ij}n^j\, dS, \tag{4.18}$$

$$q=p_jp_k, \qquad q\text{-поток}=\varepsilon(n)\, Q_{ijk}n^k\, dS, \tag{4.19}$$

$$q=p_jp_kp_m, \qquad q\text{-поток}=\varepsilon(n)\, Q_{ijkm}n^m\, dS. \tag{4.20}$$

Для полноты математического списка моментов следовало бы добавить

$$Q=\int \nu(x, p)\, dp, \tag{4.21}$$

однако эта величина, видимо, не представляет физического интереса в нашей модели.

Можно было бы, конечно, умножить величины $q_{\dots}$ в (4.12) на любые степени массы m. Однако это нецелесообразно, так как желательно получить моменты, сохраняющие конечную величину в пределе $m \to 0$, т. е. при переходе от материальных частиц к фотонам или внутренним импульсам.

Среди перечисленных выше моментов два особенно интересны: это величины (4.13) и (4.14), которым мы дадим особые названия и специальные обозначения. Величину

$$N_i=\int \nu(x, p)\, m^{-1}p_i\, dp=\int \nu(x, p)\, v_i\, dp \tag{4.22}$$

назовем *числовым вектором* и, полагая в (4.9) $q=1$, заметим, что

$$\varepsilon(n)\, N_in^i\, dS \tag{4.23}$$

представляет собой *числовой поток* сквозь поляризованную мишень dS, т. е. число частиц, совершающих отрицательные переходы. Обращаясь к выражению (4.14), запишем

$$T_{ij}=\int \nu(x, p)\, m^{-1}p_ip_j\, dp=\int \nu(x, p)\, v_ip_j\, dp \tag{4.24}$$

и назовем эту величину *тензором энергии*; отметим очень важное ее свойство — симметрию:

$$T_{ij}=T_{ji}. \tag{4.25}$$

Тогда из (4.18) следует, что величина *потока ковариантного 4-импульса p_i через поляризованную мишень dS* равна

$$\varepsilon(n) T_{ij} n^j \, dS; \tag{4.26}$$

полагая в (4.9) $q=p_i$, мы замечаем, что эта величина равна полному ковариантному 4-импульсу частиц, совершающих положительные переходы через dS, минус полный ковариантный 4-импульс частиц, совершающих отрицательные переходы.

Так как рассуждения относились лишь к бесконечно малым величинам рассматривавшихся параметров, то общая теория относительности не играла заметной роли — мы могли бы иметь дело с плоским пространством—временем. Используя компоненты $\lambda^i_{(\alpha)}$ ортонормированного 4-репера в качестве пространственных осей, а $\lambda^i_{(4)}$ — как временную ось, мы можем дать полезные словесные описания инвариантных компонент N_i и T_{ij}, выбирая поочередно вектор n^i вдоль всех векторов репера. Таким образом,

$$\begin{aligned} N^{(\alpha)} &= N_{(\alpha)} = \text{Поляризованное число частиц, пересекающих единичную площадь за единицу времени;} \\ N^{(4)} &= -N_{(4)} = \text{Число частиц в единичном объеме.} \end{aligned} \tag{4.27}$$

Принимая во внимание симметрию T_{ij} и определяя натяжения с помощью потока 3-импульса с учетом обычного условия положительности растяжений и отрицательности давления, получаем

$$\begin{aligned} -T^{(\alpha\beta)} &= -T_{(\alpha\beta)} = \text{Матрица напряжений;} \\ T^{(\alpha 4)} = T^{(4\alpha)} &= -T_{(\alpha 4)} = -T_{(4\alpha)} = \text{Поляризованный поток энергии сквозь единичную площадку за единицу времени; плотность 3-импульса;} \\ T^{(44)} &= T_{(44)} = \text{Плотность энергии.} \end{aligned} \tag{4.28}$$

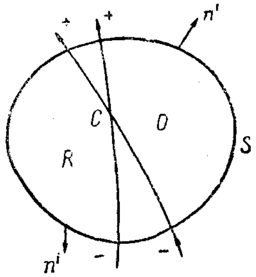
Мы поднимаем и опускаем лоренц-индексы, как и в (1.54). Величины не изменяются при поднятии или опускании индексов 1, 2, 3, но меняют знак всякий раз, когда мы опускаем либо поднимаем индекс 4.

§ 2. Законы сохранения в статистической модели

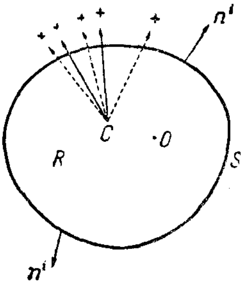
До сих пор мы развивали статистическую модель, не привлекая гипотезы о геодезических и без какого-либо закона сохранения при столкновениях. Теперь мы введем *гипотезу о геодезических*: мировая линия каждой частицы остается геодезической между столкновениями, причем вектор p^i претерпевает параллельный перенос. Что же касается законов сохранения, то сохранение 4-импульса является одним из самых фундаментальных физических законов, и мы будем предполагать, что оно имеет место при каждом столкновении. Поскольку каждое столкновение изображается отдельной точкой, в запись законов сохранения не входят векторы, относящиеся к различным мировым точкам.

Вопрос о сохранении числа частиц оказывается менее определенным. В кинетической теории газов мы предполагали бы сохранение числа частиц, коль скоро допустимо стало бы не принимать во внимание фотоны. Однако, зная о существовании аннигиляции и порождения частиц, а также о присутствии излучения в виде фотонов (не говоря уже о гипотетических внутренних импульсах), мы не решаемся ставить сохранение числа частиц в один ряд с сохранением 4-импульса.

Таким образом, в дальнейшем мы будем учитывать гипотезу о геодезических и закон сохранения 4-импульса. Пусть S представляет собой замкнутую трехмерную поверхность в пространстве — времени (фиг. 52). Введем поляризацию этой поверхности, строя единичный вектор внешней нормали n^i. Тогда поток 4-импульса через элемент dS выражается, как и в формуле (4.26), равенством



Фиг. 52*a*. Отсутствие столкновений.



Фиг. 52б. Столкновение.

$$\text{Поток 4-импульса} = \varepsilon(n)\, T_{ij} n^j\, dS. \qquad (4.29)$$

Полный поток 4-импульса через поверхность S нельзя получить посредством интегрирования этого выражения, так как в рассматриваемом искривленном пространстве — времени мы не имеем права складывать векторы, относящиеся к различным точкам. Поэтому мы введем векторное поле W^i, выбираемое произвольным образом в точке O внутри S, но определенное на всем R (внутренней области S) по правилу параллельного переноса вдоль геодезических, проходящих через точку O. Отсюда по построению следует, что в точке O

$$W_{i|j} = 0. \qquad (4.30)$$

Рассматривая компоненты величин относительно W^i, получаем вследствие (4.29) и (4.9) два следующих эквивалентных соотношения:

$$\text{Полный поток } W\text{-компоненты 4-импульса через } S =$$
$$= \int \varepsilon(n)\, T^{ij} W_i n_j\, dS = \sum_{+} W_i p^i - \sum_{-} W_i p^i, \qquad (4.31)$$

где Σ_+ относится к частицам, покидающим R (положительные переходы), и Σ_- — к частицам, входящим в R (отрицательные переходы).

Взяв S малой, так чтобы линейные размеры этой поверхности имели порядок σ, мы будем вести расчет, следуя обычной, хотя и несколько парадоксальной практике, считая число участвующих в процессе частиц очень большим, несмотря на малость σ. Нам предстоит оценить порядок величины

$$F = \sum_{+} W_i p^i - \sum_{-} W_i p^i, \qquad (4.32)$$

фигурирующей в (4.31). Сделаем это в два приема. Прежде всего пусть все входящие в R частицы движутся по своим геодезическим мировым линиям без столкновений, пройдя невредимыми через самую мировую точку столкновения (точка C на фиг. 52, *a*). Затем мы исследуем акты столкновений — одного за другим.

Следуя за частицей, замечаем, что

$$\frac{d}{ds}(W_i p^i) = W_{i|j} p^i \frac{dx^j}{ds}. \tag{4.33}$$

Согласно (4.30), веичины $W_{i|j}$ имеют порядок σ в R; порядок величины s такой же. Поэтому в отсутствие столкновений каждая единичная частица дает вклад в F порядка σ^2. К тому же число частиц пропорционально σ^3, так что в отсутствие столкновений

$$F = O(\sigma^5). \tag{4.34}$$

Рассмотрим влияние на величину F столкновения в точке C на фиг. 52, *б*. В уравнении (4.32) сумма Σ_- относится к частицам, входящим в R, так что акт столкновения не влияет на это слагаемое. Изменения, вносимые столкновением, сводятся к замене вкладов от совокупности полных линий фиг. 52, *а* и 52, *б* на вклады от ломаных линий на фиг. 52, *б*, которые представляют собой мировые линии частиц после актов столкновения. Обозначая первый вклад через Σ, а последний — через Σ', приходим к необходимости оценки величины

$$\sum W_i p^i - \sum{}' W_i p^i, \tag{4.35}$$

представляющей собой изменение F в результате столкновения. Величину (4.35) следует вычислить в точках, где мировые линии покидают трехмерную поверхность R, однако отдельные слагаемые являются функциями положения на отрезках мировых линий, идущих от точки C до мировых точек (событий) «покидания» R. Ввиду сохранения в точке C 4-импульса величина (4.35) в ней равна нулю, и если проследить значения этих величин до точек выхода мировых линий из R при помощи уравнения (4.33), можно заключить, что величина (4.35) имеет порядок σ^2. Полное число столкновений пропорционально 4-объему R, т. е. σ^4, откуда мы заключаем, что изменение F в результате столкновений оказывается всего лишь порядка σ^6, что пренебрежимо мало с точки зрения (4.34). Итак, влияние столкновений пренебрежимо мало, однако этот факт является следствием сохранения 4-импульса, но не редкости столкновений.

Из уравнений (4.31), (4.32) и из (4.34) получаем

$$\int \varepsilon(n) T^{ij} W_i n_j \, dS = O(\sigma^5). \tag{4.36}$$

Теорема Грина в форме, приведенной в (1.257), позволяет привести это равенство к виду

$$\int T^{ij}_{|j} W_i \, d\tau + \int T^{ij} W_{i|j} \, d\tau = O(\sigma^5), \tag{4.37}$$

где $d\tau$ — элемент 4-объема, а интегралы берутся по всей области R. Из (4.30) следует, что второй интеграл имеет порядок σ^5, так что, производя деление на σ^4 и переходя к пределу $\sigma \to 0$ (R стягивается в точку O), получаем

$$T^{ij}_{|j} W_i = 0. \tag{4.38}$$

Но величина W_i выбиралась в точке O произвольно, поэтому имеют место следующие *дифференциальные уравнения сохранения 4-импульса*:

$$T^{ij}_{|j} = 0. \tag{4.39}$$

В высшей степени важно отметить, что эти уравнения оказались *дифференциальными*; мы не получили какого-либо интегрального закона сохранения, и это отсутствие простого интегрального закона было одним из «проклятий»

общей теории относительности, по крайней мере в глазах тех, кто ожидал воспроизведения ньютоновских закономерностей[1]) в искривленном пространстве — времени.

Что же касается сохранения числа частиц, то здесь положение гораздо проще. Предполагая сохранение числа частиц при каждом столкновении (рассматривать мировые линии как геодезические и вводить сохранение 4-импульса здесь нет необходимости), мы видим, что число частиц, входящих в область R, равно числу частиц, покидающих R. Так как поверхность S окружает R (фиг. 52), то отсюда и из (4.23) следует, что

$$\int \varepsilon(n) N^i n_i \, dS = 0. \tag{4.40}$$

Тогда на основании теоремы Грина мы запишем

$$\int N^i_{|i} \, d\tau = 0 \tag{4.41}$$

и, стягивая R в точку, придем к *дифференциальному уравнению сохранения числа частиц*:

$$N^i_{|i} = 0. \tag{4.42}$$

Однако, как уже отмечалось, это уравнение нельзя считать столь же универсально применимым, как (4.39).

Наряду с уравнениями сохранения мы определили с помощью нашей статистической модели вектор N^i [см. (4.22)] и тензор T_{ij} [см. (4.24)]. Возникает вопрос: как следует определить *среднюю скорость* системы частиц? Этот вопрос играет существенную роль при построении механики континуума, если в качестве основы такой теории решено взять статистическую модель, ибо понятие средней скорости континуума V^i представляет собой одну из фундаментальных концепций.

Так как скорость — величина кинематическая, естественно обратиться к ее кинематическому определению, и тогда N^i окажется единственным имеющимся в распоряжении вектором. Мы приходим, таким образом, к определению *кинематической средней скорости* V^i_{K} как единичного вектора в направлении числового вектора N^i. В случае газа, состоящего из одинаковых молекул, такое определение имеет смысл, однако в присутствии заметного числа частиц, имеющих массы весьма малые по сравнению с массами молекул, едва ли правомерно определение средней скорости на основании просто элементарного подсчета. Отказавшись от кинематического определения средней скорости, можно ввести *динамическую среднюю скорость* V^i_{D} как единичный вектор, ориентированный во временноподобном собственном направлении тензора T_{ij}, предполагая, что такое собственное временноподобное направление существует, а это при известных разумных условиях имеет место (Синг [1175], стр. 292). Иначе говоря, вектор V^i_{D} удовлетворяет уравнениям

$$T_{ij} V^j_{\mathrm{D}} = -\mu_{\mathrm{D}} V_{\mathrm{D}i}, \tag{4.43}$$

где μ_{D} — собственное значение T_{ij}.

Так как покоящуюся среду осмыслить гораздо легче, чем движущуюся, естественно попытаться найти *систему покоя* в каждой мировой точке среды; такая система задается ортонормированным 4-репером, четвертый вектор которого ориентирован в направлении средней скорости. Построив систему покоя, можно говорить об энергии покоя и о других величинах, отнесенных к системе покоя. Однако главное недоразумение состоит в мол-

[1]) Или закономерностей частной теории относительности. Ср. книгу Синга [1175], стр. 311.

чаливом предположении о том, что средняя скорость (а вместе с ней и система покоя) вполне определена, что не соответствует действительности. Такой скоростью может быть V^i_{K}, или V^i_{D}. В первом случае энергия покоя равна

$$\mu_{\mathrm{K}} = T_{ij}V^i_{\mathrm{K}}V^j_{\mathrm{K}}, \tag{4.44}$$

а во втором —

$$\mu_{\mathrm{D}} = T_{ij}V^i_{\mathrm{D}}V^j_{\mathrm{D}}. \tag{4.45}$$

Вопрос о том, какое из этих двух конкурирующих определений следует выбрать, был бы снят, если бы удалось доказать эквивалентность этих средних скоростей друг другу. Это представляется безусловно очевидным для газа, находящегося в состоянии статистического (адиабатического) равновесия. Однако это предположение, по-видимому, никак не доказано в общем случае, хотя указать физический пример, когда эти два вектора существенно различаются между собой, может быть очень нелегко. Поэтому из соображений простоты и ясности следует выбрать один из них, и в настоящей книге в качестве *определения средней скорости будет взята динамическая средняя скорость* V^i_{D} (*собственный вектор тензора энергии*); когда же по той или иной причине понадобится временно отойти от этого определения, то этот факт будет со всей определенностью отмечаться (например, в гл. X, § 1).

§ 3. Кинематика континуума

Оставляя статистическую модель, мы перейдем к рассмотрению континуума *отождествимых частиц*, если уж продолжать использовать термин «частица», означающий теперь нечто совершенно отличное от того, что имелось в виду в двух предыдущих параграфах. В этом параграфе нас не будут интересовать инертные свойства континуума. Мы будем изучать лишь его кинематику, которая исчерпывается полем 4-скорости V^i (роль которой может играть любая из двух рассмотренных в § 2 средних скоростей). Наша кинематика сводится попросту к геометрии *линий тока*, представляющих собой мировые линии, имеющие в качестве единичных касательных векторов составляющие средней скорости V^i. Существуют два метода — метод Лагранжа и метод Эйлера.

Согласно методу Лагранжа, вводятся четыре параметра $y_{(a)}$, первые три из которых $y_{(\alpha)}$ постоянны вдоль каждой линии тока. Уравнения конгруэнции линий тока принимают тогда вид

$$x^i = x^i(y), \tag{4.46}$$

причем $y_{(4)}$ представляет собой параметр (например, время), изменяющийся вдоль каждой линии тока, а 4-скорость равна

$$V^i = \theta \frac{\partial x^i}{\partial y_{(4)}}. \tag{4.47}$$

Скалярный множитель θ выбирается здесь таким образом, что

$$V_iV^i = -1. \tag{4.48}$$

В дальнейшем мы не будем применять метод Лагранжа, так как при тензорной записи удобнее пользоваться методом Эйлера. Согласно этому методу, определим конгруэнцию линий тока как

$$V^i = V^i(x), \tag{4.49}$$

считая, таким образом, 4-скорость функцией точки в пространстве — времени, причем эта функция, безусловно, удовлетворяет условию (4.48).

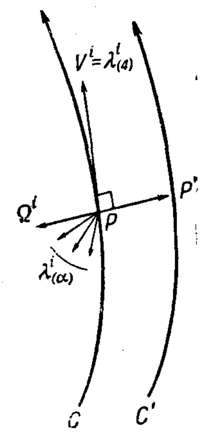
В кинематике континуума изучают относительное поведение смежных линий тока, причем существуют различные способы рассмотрения. Мы будем использовать здесь координаты Ферми (как и в гл. II, § 10), выбирая 4-репер Ферми $\lambda^i_{(\alpha)}$ на одной из линий тока C так, что $\lambda^i_{(4)}=V^i$. Хотя наш интерес будет ограничиваться лишь непосредственной окрестностью точки C, все же заметим, что преимущество этого метода состоит в том, что мы сохраняем возможность перехода к более отдаленным линиям.

На фиг. 53 изображены линия тока C и смежная ей линия C', причем мировые точки P и P' связаны друг с другом условием ортогональности геодезической PP' относительно линии C в точке P. Тогда координаты Ферми точки P' выразятся с помощью мировой функции как

$$X_{(\alpha)} = -\Omega_i(PP')\,\lambda^i_{(\alpha)}, \tag{4.50}$$

и скорость их изменения с течением времени s на C (здесь $D=d/ds$) будет равна

$$DX_{(\alpha)} = -\Omega_{ij}\lambda^i_{(\alpha)}V^j - \Omega_{ij'}\lambda^i_{(\alpha)}V^{j'}Ds', \tag{4.51}$$



Фиг. 53. Кинематика континуума.

где $V^{j'}$ — 4-скорость на C', а s' — время на C'. Вследствие ортогональности в точке P дифференцирование вектора Ферми не приводит к появлению нового слагаемого. Расчеты значительно упрощаются, если ограничиться только членами первого порядка (O_1) в координатах Ферми. Вспоминая предельные выражения при совпадении линий [т. е. (2.69)], находим

$$\begin{gathered}\Omega_{ij}\lambda^i_{(\alpha)}V^j = O_2,\\ \Omega_{ij'}\lambda^i_{(\alpha)}V^{j'} = [\Omega_{ij'}V^{j'}{}_{;k'}]\,\lambda^i_{(\alpha)}\eta^k + O_2 = -\lambda^i_{(\alpha)}V_{ik}\eta^k + O_2,\\ Ds' = 1 + O_1,\end{gathered} \tag{4.52}$$

где η^k — бесконечно малый вектор PP', а второй индекс при V означает ковариантную производную. Отсюда с точностью до величин первого порядка малости

$$DX_{(\alpha)} = V_{(\alpha\beta)}X^{(\beta)}, \tag{4.53}$$

где

$$V_{(\alpha\beta)} = V_{ij}\lambda^i_{(\alpha)}\lambda^j_{(\beta)} \tag{4.54}$$

— компоненты ковариантной производной V_{ij} относительно 3-репера Ферми.

Рассматривая координаты Ферми $X_{(\alpha)}$ как декартовы, мы опознаем в уравнениях (4.53) уравнения движения континуума, подвергающегося линейной деформации. Соответственно этому мы будем говорить о симметричной *матрице распространения натяжений*, определяемой как

$$\sigma_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2}\left(V_{(\alpha\beta)} + V_{(\beta\alpha)}\right), \tag{4.55}$$

и об антисимметричной *матрице спина* (или *вращений*)

$$\omega_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2}\left(V_{(\alpha\beta)} - V_{(\alpha\beta)}\right). \tag{4.56}$$

Однако предпочтительнее работать с тензорами, а не с инвариантами, поэтому мы перейдем к симметричному тензору σ_{ij} и к антисимметрич-

ному тензору ω_{ij}, которые относительно 3-репера Ферми имеют соответственно компоненты (4.55) и (4.56). Но поскольку эти компоненты полностью не определяют наших тензоров, мы вправе наложить дополнительные условия, в качестве которых выберем, по-видимому, простейшие:

$$\sigma_{(\alpha 4)}=0, \qquad \omega_{(\alpha 4)}=0. \tag{4.57}$$

Этим равенствам соответствуют тензорные условия

$$\sigma_{ij}V^j=0, \qquad \omega_{ij}V^j=0. \tag{4.58}$$

Основываясь на определении (4.55), которое можно переписать как

$$\sigma_{km}\lambda^m_{(\alpha)}\lambda^k_{(\beta)}=\frac{1}{2}V_{km}\left(\lambda^k_{(\alpha)}\lambda^m_{(\beta)}+\lambda^k_{(\beta)}\lambda^m_{(\alpha)}\right), \tag{4.59}$$

и используя условия (4.58), найдем тензор σ_{ij}. Прежде всего умножим (4.59) на $\lambda^{(\alpha)}_i\lambda^{(\beta)}_j$ и введем *оператор проектирования*, определяемый как

$$P^i_j=\lambda^i_{(\alpha)}\lambda^{(\alpha)}_j=\delta^i_j+V^iV_j. \tag{4.60}$$

Для упрощения полученного выражения учтем (4.58) и вытекающие из (4.48) равенства

$$V^iV_{ij}=0, \tag{4.61}$$

Таким образом, получаем следующий *тензор распространения натяжений*:

$$\sigma_{ij}=\frac{1}{2}V_{km}\left(P^k_iP^m_j+P^k_jP^m_i\right)=\frac{1}{2}\left(V_{ij}+V_{ji}+V_{ik}V^kV_j+V_{jk}V^kV_i\right). \tag{4.62}$$

Конечно, независимы не 10 компонент этого тензора, как казалось бы сначала, а только 6 вследствие условий (4.58) или, лучше сказать, вследствие того обстоятельства, что (4.55) и (4.57) определяют σ_{ij} однозначно с точностью до шести компонент.

Аналогичным образом мы получим, исходя из (4.56) и (4.58), следующее выражение для *тензора спина*:

$$\omega_{ij}=\frac{1}{2}V_{km}\left(P^k_iP^m_j-P^k_jP^m_i\right)=\frac{1}{2}\left(V_{ij}-V_{ji}+V_{ik}V^kV_j-V_{jk}V^kV_i\right). \tag{4.63}$$

Независимы фактически лишь три компоненты этого тензора, так как в представлении его относительно 4-репера Ферми мы имеем лишь независимые компоненты $\omega_{(23)}$, $\omega_{(31)}$ и $\omega_{(12)}$.

Тензор спина тесно связан с *вектором спина*, который определяется равенством

$$\omega^i=\frac{1}{2}\eta^{ijkm}V_jV_{km}, \tag{4.64}$$

где множитель η^{ijkm} представляет собой тензор перестановок [см. (1.114)]. Компоненты этого вектора относительно 4-репера Ферми суть

$$\omega^{(a)}=\frac{1}{2}\zeta\varepsilon_{abcd}V_{(b)}V_{(cd)},$$

$$\zeta^{-1}=(-g)^{1/2}\det\lambda^i_{(a)}=\pm 1. \tag{4.65}$$

При $V_{(\beta)}=0$ и $V_{(4)}=-1$ получим

$$\omega^{(\alpha)}=\frac{1}{2}\zeta\varepsilon_{\alpha\gamma\delta}V_{(\gamma\delta)}=\frac{1}{2}\zeta\varepsilon_{\alpha\gamma\delta}\omega_{(\gamma\delta)}, \qquad \omega^{(4)}=0, \tag{4.66}$$

так что

$$\omega^{(1)}=\zeta\omega_{(23)}, \qquad \omega^{(2)}=\zeta\omega_{(31)}, \qquad \omega^{(3)}=\zeta\omega_{(12)}. \tag{4.67}$$

Ясно, что тензор спина и вектор спина представляют собой различные виды одной и той же величины.

Обозначим через v 3-объем поперечного сечения тонкой трубки линий тока. Можно показать, что *расширение* этой трубки равно

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{ds}=g^{ij}\sigma_{ij}=V^{i}_{\cdot i}, \tag{4.68}$$

так что условие движения без расширения (несжимаемость) записывается в виде

$$g^{ij}\sigma_{ij}=0 \text{ или } V^{i}_{\cdot i}=0. \tag{4.69}$$

Движение называют *жестким* (в смысле Борна, ср. гл. III, § 5), если для всех линий тока, смежных с линией C, вектор PP' (фиг. 53) сохраняет свою величину, или, что то же, $X_{(\alpha)}X^{(\alpha)}=\text{const}$. Из равенства (4.53) видно, что необходимое и достаточное условие жесткого движения задается равенством

$$\sigma_{(\alpha\beta)}=0, \text{ или } \sigma_{ij}=0. \tag{4.70}$$

Заметим, что оба приведенных равенства эквивалентны (Розен [999], Зальцман и Тауб [1041]) [1]).

Движение можно назвать *невращательным*, если

$$\omega_{(\alpha\beta)}=0, \text{ или } \omega_{ij}=0, \tag{4.71}$$

причем оба условия опять-таки эквивалентны. С точки зрения (4.67) эти условия равносильны равенству $\omega^{i}=0$. Однако выписывая их в этой последней форме, можно заменить тензор перестановок в (4.64) на численный символ перестановок [символ Леви-Чивита. — *Ред.*], а также ковариантную производную на частную. Тогда мы приходим к известному условию интегрируемости уравнения в полных производных

$$V_i\,dx^i=0. \tag{4.72}$$

Отсюда видно, что *в случае невращательного движения линии тока образуют нормальную конгруэнцию*; иными словами, существует семейство трехмерных поверхностей, по отношению к которым линии тока ортогональны. В теории относительности было столько неясного в понимании *вращения*, что стоит заметить, насколько этот вопрос в действительности прост: при невращательном движении элемент среды не поворачивается относительно осей, переносимых по Ферми вдоль мировой линии этой непрерывной среды.

§ 4. Тензор энергии континуума

Следуя идеям статистической модели (см. § 1 и 2), мы наделяем материальную среду *симметричным тензором энергии* [2]), который можно представить в ковариантной (T_{ij}), контравариантной (T^{ij}) или смешанной (T^{i}_{j}) форме. Ввиду симметрии различение $T^{i}_{\cdot j}$ и $T_{j}^{\cdot i}$ становится излишним, и мы записываем оба их в виде T^{i}_{j}.

Тензор энергии играет две важные роли. Во-первых, он характеризует механические свойства вещества, такие, как натяжения и плотность. Во-вторых, он оказывается основной величиной при определении гравитацион-

---

[1]) См. также работы Рейнера по жестким движениям [963—967]. Задача о жестком движении в общей теории относительности более сложна, чем это указывал Синг ([1175], стр. 36), ввиду параболического характера системы уравнений.

[2]) Как в периодической печати, так и в ряде монографий для T_{ik} более употребительным является термин «тензор энергии — импульса».— *Прим. ред.*

ных полей в значительной мере аналогично тому, как плотность масс определяет свойства ньютоновского тяготения. Тот факт, что тензор энергии играет подобную двойную роль, определяя инертные и гравитационные свойства, характеризуется иногда как *эквивалентность инертной и гравитационной масс*. Уравнениями гравитационного поля мы займемся в следующем параграфе, а пока перейдем к инертным свойствам тензора энергии.

Мы заимствуем из статистической модели интерпретацию тензора энергии с помощью потоков и выдвигаем следующее требование, аналогичное (4.26):

Поток 4-импульса сквозь трехмерную мишень dS
(имеющую единичный вектор нормали n^i) $= \varepsilon(n) T^{ij} n_j \, dS$. (4.73)

Относительно смысла компонент ортонормированного 4-репера можно обратиться к (4.28); что же касается точного физического смысла употребленных в (4.28) слов, то ответ на этот вопрос в немалой степени зависит от личного опыта читателя и от его воображения.

Из статистической модели мы возьмем и *уравнения сохранения*

$$T^{ij}_{\ |j} = 0. \qquad (4.74)$$

Важно заметить, что если метрический тензор g_{ij} задан, то уравнения (4.74) представляют собой систему четырех уравнений в частных производных, удовлетворяемую десятью компонентами T^{ij}, однако если тензор g_{ij} не известен, то эти уравнения касаются как T^{ij}, так и g_{ij}, так как в них фигурируют первые производные последнего.

Как было указано в конце § 2, определению в качестве *4-скорости континуума* V^i мы выбрали (по определению) временноподобный собственный вектор тензора T_{ij}, так что

$$T_{ij} V^j = -\mu V_i, \qquad (4.75)$$

где скаляр μ носит название *собственной плотности энергии или массы*[1]), однако ради кратности мы опустим слово *собственная*, хотя существует риск перепутать его с плотностью (4.28), которая переходит в собственную плотность, только если взять в качестве V^i базисный вектор $\lambda^i_{(4)}$. Мы имеем

$$V_i V^i = -1, \qquad V_i V^i_{\ |j} = 0 \qquad (4.76)$$

и

$$\mu = T_{ij} V^i V^j. \qquad (4.77)$$

Знак «минус» появляется в (4.75) по той причине, что в статистической модели 4-импульсы материальных частиц и фотонов направлены в будущее.

Определенный соотношением

$$T_{ij} = \mu V_i V_j - S_{ij} \qquad (4.78)$$

симметричный тензор S_{ij} называют *тензором натяжений* [в согласии с (4.28). Из уравнения (4.75) следует, что

$$S_{ij} V^j = 0, \qquad (4.79)$$

поэтому тензор S_{ij} имеет лишь 6 независимых компонент.

Соотношение (4.78) представляет собой общее выражение тензора энергии через плотность, 4-вектор скорости и через натяжения. В наиболее простом случае континуума, а именно для *некогерентной жидкости*

[1]) При используемом нами в этой книге хронометрическом подходе скорость света автоматически оказывается равной единице. Тогда масса и собственная энергия совпадают и знаменитое уравнение Эйнштейна $E = mc^2$ принимает простой вид $E = m$.

или *облака пыли*, определяемых условием $S_{ij}=0$, имеем

$$T_{ij}=\mu V_i V_j. \quad (4.80)$$

С целью выяснения свойств линий тока некогерентной жидкости подставим выражение (4.80) в (4.74):

$$(\mu V^j)_{|j} V^i + \mu V^i_{|j} V^j = 0. \quad (4.81)$$

Умножение на V_i с учетом уравнений (4.76) дает

$$(\mu V^j)_{|j} = 0 \quad (4.82)$$

и на основании (4.81)

$$DV^i = V^i_{|j} V^j = 0, \quad (4.83)$$

где $D=\delta/\delta s$ — оператор абсолютного дифференцирования вдоль линии тока. Поэтому *в некогерентной жидкости линии тока есть геодезические* — вывод довольно любопытный.

Следующая по степени простоты, *идеальная жидкость*, определяется тем условием, что тензор T_{ij} должен иметь три равных собственных значения, отвечающих пространственноподобным собственным векторам. Обозначая это общее собственное значение через p (*давление*), получаем

$$T_{ij}=\mu V_i V_j + p(V_i V_j + g_{ij}) = (\mu+p) V_i V_j + p g_{ij}. \quad (4.84)$$

Для выяснения особенностей движения идеальной жидкости подставим выражение (4.84) в уравнения (4.74):

$$[(\mu+p) V^j]_{|j} V_i + (\mu+p) V_{i|j} V^j + p_{|i} = 0. \quad (4.85)$$

Умножая на V^i и учитывая (4.76), мы придем к уравнению, которое можно записать в следующих двух видах:

$$[(\mu+p) V^j]_{|j} = p_{|i} V^i, \quad (4.86)$$

$$p V^j_{|j} = -(\mu V^j)_{|j}. \quad (4.87)$$

Подстановка (4.86) в (4.85) дает

$$(\mu+p) DV^i = -p_{|j}(V^i V^j + g^{ij}). \quad (4.88)$$

Это соотношение связывает абсолютное ускорение линии тока с градиентом давления. Вводя ортонормированный 4-репер $\lambda^i_{(a)}$, для которого $\lambda^i_{(4)}=V^i$, и очевидным образом обозначая инвариантные компоненты векторов $p_{|i}$ и DV^i относительно этого репера, получаем

$$[(\mu+p) V^j]_{|j} = p_{(4)}, \quad (4.89)$$

$$(\mu+p)(DV)_{(\alpha)} - = p_{(\alpha)}. \quad (4.90)$$

Заметим, что последнее уравнение представляет собой видоизменение закона Ньютона в гидродинамике: Плотность $\times$ Ускорение = —Градиент давления. В практических случаях отношение p/μ весьма мало [см. (4.98)].

Частным случаем идеальной жидкости является газ, состоящий из тождественных молекул массы m и пребывающий в статистическом адиабатическом равновесии. В этом случае кинематическая и динамическая скорости (см. § 2) совпадают, и тензор энергии равен (Синг [1179], стр. 36)

$$T_{ij} = mNG(m\xi) V_i V_j + \frac{g_{ij}N}{\xi}, \quad (4.91)$$

где ξ — относительная температура $G=K_3/K_2$ (отношение функций Бесселя), а N — модуль числового вектора, так что

$$N^i = NV^i. \quad (4.92)$$

Располагая не только уравнениями сохранения (4.74), но и условием сохранения числа частиц, можно по аналогии с (4.42) записать

$$N^{i}_{|i}=0. \tag{4.93}$$

Из сравнения выражений (4.80) и (4.84) видно, что идеальная жидкость вырождается в некогерентную при стремлении p к нулю, откуда следует, что может оказаться допустимым трактование идеальной жидкости при низких давлениях как жидкости некогерентной. Но что значит «низкие давления»? В обычных единицах плотность энергии и давление имеют одинаковые размерности $[ML^{-1}T^{-2}]$; при хронометрическом определении расстояний следует приравнять размерности длины и времени $[\mathrm{L}]=[\mathrm{T}]$, так что

$$[\mu]=[p]=[\mathrm{MT}^{-3}]. \tag{4.94}$$

В следующем параграфе мы увидим, что, как следует из анализа уравнений поля, справедливо равенство $[\mathrm{M}]=[\mathrm{T}]$, и поэтому μ и p выражаются в *сек*$^{-2}$. Ввиду их размерного характера нельзя говорить, что они велики или малы. Однако можно, не впадая в абсурд, говорить о величине безразмерного отношения p/μ, и было бы интересно исследовать эту величину в применении к Земле, рассматривая ее как идеальную жидкость, имеющую постоянное значение μ и не вращающуюся.

Первая кривизна мировой линии любой частицы, закрепленной в массе Земли, представляет собой местное «ускорение, обусловленное гравитацией» g [ср. (3.133)], так что уравнение (4.90) принимает вид

$$\frac{1}{\mu+p}\frac{dp}{dr}=-g, \tag{4.95}$$

где значение g берется на расстоянии r от центра Земли. Принимая, согласно теории Ньютона,

$$g=\frac{g_1 r}{r_1}, \quad p_1=0 \tag{4.96}$$

(индекс 1 относится к поверхности Земли), получаем

$$\ln\left(1+\frac{p_0}{\mu}\right)=\frac{1}{2}g_1 r_1, \tag{4.97}$$

где p_0 — давление в центре Земли. Величина $g_1 r_1$ в хронометрическом смысле безразмерна; тогда

$$\begin{aligned} g_1 &= 3{,}263\cdot 10^{-8}\ \textit{сек}^{-1},\\ r_1 &= 2{,}125\cdot 10^{-2}\ \textit{сек},\\ \frac{p_0}{\mu} &= \frac{1}{2}g_1 r_1 = 3{,}464\cdot 10^{-10}. \end{aligned} \tag{4.98}$$

Последнее отношение так фантастически мало, что первым побуждением было бы отбросить p в выражении (4.84) для случая любой реально используемой жидкости и рассматривать ее как некогерентную. Однако это привело бы к катастрофе. При полном отсутствии давления корабль, оказавшийся в океане, стал бы следовать своей геодезической, т. е. пошел бы ко дну, а сам океан, безусловно, претерпел бы коллапс [см. (4.83)]. Причина этого состоит в следующем. Если q — весьма малая безразмерная величина, то ею можно, конечно, пренебречь в выражении вида $(1+q)$. Однако градиент q не будет безразмерным, и пренебречь им можно было бы лишь по сравнению с величинами, имеющими ту же размерность. Было бы смешно прене-

бречь левой стороной уравнения (4.95) по сравнению с его правой стороной[1].

Обратимся теперь к общему тензору энергии (4.78) и подставим его выражение в уравнения сохранения (4.74); мы получим

$$(\mu V^j)_{|j} V_i + \mu V_{i\ |j} V^j = S^{ij}_{\ |j}. \qquad (4.99)$$

При умножении на V^i отсюда следует

$$(\mu V^j)_{|j} = -V_i S^{ij}_{\ |j}, \qquad (4.100)$$

и поэтому уравнение (4.99) приводит к

$$\mu D V_i = (g_{ij} + V_i V_j) S^{jk}_{\ |k}. \qquad (4.101)$$

Уравнение (4.100) можно переписать также в виде

$$D\mu = -\mu V^j_{\ |j} - V_i S^{ij}_{\ |j}. \qquad (4.102)$$

Из условий (4.79) получим

$$S^{jk} V_j = 0, \quad S^{jk}_{\ |k} V_j + S^{jk} V_{j|k} = 0, \qquad (4.103)$$

так что, переходя к тензору распространения натяжений σ_{ij}, из § 3 можно записать

$$V_j S^{jk}_{\ |k} = -S^{jk} \sigma_{jk}. \qquad (4.104)$$

Теперь уравнениям (4.101) и (4.102) можно придать вид

$$\mu D V^i = S^{ij}_{\ |j} - V^i S^{jk} \sigma_{jk}, \qquad (4.105)$$

$$D\mu = -\mu \sigma^k_k + S^{jk} \sigma_{jk}. \qquad (4.106)$$

Первое из этих уравнений определяет абсолютное ускорение (т. е. первую кривизну) линии тока, а второе задает изменение плотности вдоль этой линии. Можно говорить, что это — *уравнения движения произвольной сплошной среды*, хотя число неизвестных здесь, конечно, превышает число уравнений.

Мы привели уравнения движения к этому последнему виду с тем, чтобы ввести в рассмотрение тензор распространения натяжений σ_{ij}. Поскольку все реальные вещества неидеально упруги или обладают вязкостью, то любое тело конечных размеров при отличном от нуля тензоре σ_{ij} будет источником теплоты и будет излучать ее со своей поверхности. Отсюда следует, что планеты стремятся прийти в такие состояния, в которых тензор σ_{ij} обращается в нуль (что соответствует жесткому движению). В таких состояниях

$$\mu D V^i = S^{ij}_{\ |j}, \quad \sigma_{ij} = 0, \qquad (4.107)$$

причем плотность μ постоянна вдоль линий тока.

§ 5. Уравнения поля и сравнение с теорией Ньютона

До сих пор предполагалось, что рассматриваемое пространство является римановым четырехмерным пространством и его кривизна была в общем случае связана с гравитационным полем. Однако не было получено никаких

[1]) Ср. замечания о порядке малости в гл. II, § 3.

уравнений, устанавливающих зависимость кривизны пространства — времени от распределения материи. Этот пробел восполняется теперь эйнштейновскими уравнениями поля, которые мы запишем в виде

$$G_{ij} - \Lambda g_{ij} = -\varkappa T_{ij}. \qquad (4.108)$$

В этих уравнениях G_{ij} представляет собой тензор Эйнштейна, g_{ij} — метрический тензор, T_{ij} — тензор энергии, а Λ и $\varkappa$ — две универсальные постоянные. Уравнения поля можно, разумеется, записать также в контравариантной и в смешанной формах.

Так как мы уже приняли уравнения сохранения (4.74), то необходимо удостовериться, совместны ли они с уравнениями поля (4.108). Эта совместность становится очевидной, если вспомнить тождества (1.111), которым тензор Эйнштейна удовлетворяет. В самом деле, из (4.108) следуют равенства

$$\varkappa T^{ij}_{\ |j} = \Lambda g^{ij}_{\ |j} - G^{ij}_{\ |j} = 0. \qquad (4.109)$$

Рассмотрим теперь уравнения (4.108) с точки зрения физической размерности. В общей теории относительности определенную физическую размерность могут иметь только инварианты. Размерность компонент тензора зависит от размерности используемых координат, однако ясно, что для любой компоненты тензорного уравнения в целом все слагаемые должны иметь одинаковые размерности. Это освобождает нас от забот, связанных с построением инвариантов; вместе с тем полезно условиться измерять координаты единицами времени (в секундах). Поскольку элемент ds сам представляет собой время, то тензор g_{ij} — безразмерный, а G_{ij} имеет размерность *сек*$^{-2}$, так как содержит два дифференцирования по координатам. Отсюда видно, что постоянная Λ имеет размерность *сек*$^{-2}$. Однако определить размерность постоянной $\varkappa$ невозможно, так как в тензор T_{ij} входит масса, в смысле размерности стоящая особняком. Припишем теперь массе (или равным образом энергии) размерность, приняв, что константа $\varkappa$ представляет собой безразмерное число. Проще всего, казалось бы, положить $\varkappa$ равной единице, однако позднее это привело бы к появлению излишнего множителя. Имея в виду это обстоятельство, мы положим

$$\varkappa = 8\pi, \qquad (4.110)$$

но так как удобнее писать просто $\varkappa$, мы сохраним это символическое обозначение для числа (4.110).

Из (4.108) видно, что теперь плотность приобрела ту же размерность, что и Λ, т. е. *сек*$^{-2}$. В таком случае *масса или энергия принимают размерность времени и должны измеряться в секундах*. Однако, пока не проведено сравнение гравитационного поля теории относительности с физически реальной действительностью, выразить граммы в секундах невозможно.

Константу Λ называют *космологической постоянной*; как указывает это название, она была введена Эйнштейном при рассмотрении весьма общих проблем астрономии. Обычно ее считают настолько малой (по сравнению с другими физическими величинами той же размерности), что в обычной небесной механике ее влиянием можно полностью пренебречь, и даже в космологии ее физическая значимость представляется сомнительной. Поэтому в большей части нашей работы усложнение уравнений, вызываемое включением Λ, едва ли компенсировалось бы увеличением их общности, так что мы отбросим космологическую константу[1]), помня, что ее можно при

[1]) Паули [881] предложил вообще ее отбросить, следуя позднейшим взглядам Эйнштейна [282] (ср. Эйнштейн [286] p. 127).

необходимости учесть в космологических исследованиях. Итак, будем впредь (до соответствующей оговорки) пользоваться уравнениями

$$G_{ij}=-\varkappa T_{ij}, \quad \varkappa=8\pi. \tag{4.111}$$

В пустоте тензор энергии равен нулю, и мы имеем

$$G_{ij}=0. \tag{4.112}$$

Эти уравнения, очевидно, равносильны тому, что

$$R_{ij}=0. \tag{4.113}$$

Уравнения гравитационного поля общей теории относительности своим видом никак не напоминают уравнений теории Ньютона. Однако мы обнаружим сейчас их тесную связь, рассматривая в теории Ньютона и в общей теории относительности движение жидкости без давления, т. е. движение некогерентной жидкости или облака пыли (см. § 4). В обоих случаях время и длина будут измеряться в секундах [1 *сек* = 2,998·10¹⁰ *см*, как и в (3.134)]. Ньютоновская масса будет измеряться в граммах, а релятивистская — в секундах.

Рассмотрим сначала уравнения второго закона Ньютона, обозначая плотность через ϱ, скорость через u_α, гравитационный потенциал через φ и гравитационную постоянную через γ:

$$\varrho\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}+u_{\alpha,\gamma}\,u_\gamma\right)=\varrho\varphi_{,\,\alpha}. \tag{4.114}$$

Кроме этих динамических уравнений, имеет место сохранение массы

$$(\varrho u_\alpha)_{,\,\alpha}=0 \tag{4.115}$$

и уравнение Пуассона

$$\varphi_{,\,\alpha\alpha}=-4\pi\gamma\varrho. \tag{4.116}$$

Чтобы сравнение с теорией относительности стало возможным, следует рассматривать физические величины, измерение которых не предлагает использования гипотетической инерциальной (неускоренной) системы отсчета. В этом смысле наблюдаемой физической величиной будет $u_{\alpha,\,\beta}$, но не $\partial u_\alpha/\partial t$. Поэтому мы займемся вычислением скорости изменения $u_{\alpha,\,\beta}$ по течению жидкости:

$$\frac{d}{dt}\,u_{\alpha,\,\beta}=\frac{\partial}{\partial t}\,u_{\alpha,\,\beta}+u_{\alpha,\,\beta\gamma}u_\gamma. \tag{4.117}$$

Деля (4.114) на ϱ и производя частное дифференцирование по x_β, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\,u_{\alpha,\,\beta}+u_{\alpha,\,\gamma\beta}u_\gamma+u_{\alpha,\,\gamma}u_{\gamma,\,\beta}=\varphi_{,\,\alpha\beta}, \tag{4.118}$$

так что

$$\frac{d}{dt}\,u_{\alpha,\,\beta}=-u_{\alpha,\,\gamma}u_{\gamma,\,\beta}+\varphi_{,\,\alpha\beta}. \tag{4.119}$$

Перейдем теперь к уравнениям поля Эйнштейна (4.111), которые для случая некогерентной жидкости имеют вид

$$G_{ij}=-\varkappa\mu V_iV_j, \quad V_iV^i=-1, \tag{4.120}$$

где μ — плотность, а V^i — 4-вектор скорости. Аналогом $u_{\alpha,\,\beta}$ здесь будет $V_{i\,|\,j}$, и нам предстоит вычислить скорость изменения этой величины вдоль линии тока. В § 4 мы уже видели, что линии тока некогерентной жидкости представляют собой геодезические, поэтому

$$V_{i\,|\,k}V^k=0, \quad V_{i\,|\,kj}V^k+V_{i\,|\,k}V^k_{\ |\,j}=0. \tag{4.121}$$

Тогда, следуя вдоль линии тока и используя уравнение (1.94), получаем

$$\frac{\delta}{\delta s}(V_{i\,|\,j}) = V_{i\,|\,jk}V^k = V_{i\,|\,kj}V^k + R_{mijk}V^mV^k \tag{4.122}$$

или

$$\frac{\delta}{\delta s}(V_{i\,|\,j}) = -V_{i\,|\,k}V^k_{\ |\,j} + R_{mijk}V^mV^k. \tag{4.123}$$

Несмотря на трехмерный характер уравнения (4.119) и четырехмерный — уравнения (4.123), мы обнаруживаем ярко выраженное формальное сходство этих уравнений, причем слагаемое, содержащее в (4.119) ньютоновский потенциал, соответствует в (4.123) члену, включающему кривизну. Можно привести эти уравнения к еще более сходному виду, используя тензор распространения натяжений и тензор спина жидкости и помня, что приведенные в § 3 определения этих величин в принципе аналогичны их определениям в ньютоновской гидродинамике. Тогда для ньютоновского тензора распространения натяжений и спина (или вращения) получим

$$\sigma'_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\,\beta} + u_{\beta,\,\alpha}), \qquad \omega'_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\,\beta} - u_{\beta,\,\alpha}), \tag{4.124}$$

а уравнение (4.119) даст

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\sigma'_{\alpha\beta} &= -\sigma'_{\alpha\gamma}\sigma'_{\gamma\beta} - \omega'_{\alpha\gamma}\omega'_{\gamma\beta} + \varphi_{,\,\alpha\beta}, \\ \frac{d}{dt}\omega'_{\alpha\beta} &= -\sigma'_{\alpha\gamma}\omega'_{\gamma\beta} + \sigma'_{\beta\gamma}\omega'_{\gamma\alpha}. \end{aligned} \tag{4.125}$$

Так как в релятивистской жидкости абсолютное ускорение равно нулю, то из (4.62) и (4.63) следует

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2}(V_{i\,|\,j} + V_{j\,|\,i}), \qquad \omega_{ij} = \frac{1}{2}(V_{i\,|\,j} - V_{j\,|\,i}) \tag{4.126}$$

(мы восстановили символ ковариантного дифференцирования), а из (4.123) получим

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta s}\sigma_{ij} &= -\sigma_{ik}\sigma^k_{\cdot j} - \omega_{ik}\omega^k_{\cdot j} + R_{mijk}V^mV^k, \\ \frac{\delta}{\delta s}\omega_{ij} &= -\sigma_{ik}\omega^k_{\cdot j} + \sigma_{jk}\omega^k_{\cdot i}. \end{aligned} \tag{4.127}$$

Вводя 4-репер отсчета $\lambda^i_{(a)}$ при параллельном переносе вдоль линий тока и с $\lambda^i_{(4)} = V^i$, приведем эти уравнения к виду

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\sigma_{(\alpha\beta)} &= -\sigma_{(\alpha\gamma)}\sigma_{(\gamma\beta)} - \omega_{(\alpha\gamma)}\omega_{(\gamma\beta)} + R_{(4\alpha\beta4)}, \\ \frac{d}{ds}\omega_{(\alpha\beta)} &= -\sigma_{(\alpha\gamma)}\omega_{(\gamma\beta)} + \sigma_{(\beta\gamma)}\omega_{(\gamma\alpha)}. \end{aligned} \tag{4.128}$$

Ввиду тривиальной связи между t и s при данном подходе нам приходится признать связь между ньютоновскими уравнениями (4.125) и уравнениями теории относительности (4.128) весьма тесной; чтобы совпадение стало полным, достаточно связать между собой ньютоновский потенциал и тензор Римана уравнением

$$\varphi_{,\,\alpha\beta} = R_{(4\alpha\beta4)}. \tag{4.129}$$

Таким образом, если полагать, что теория Ньютона может послужить практическим ключом к истолкованию теории относительности, мы будем вправе выразить некоторые компоненты тензора Римана через производные ньютоновского потенциала. В действительности мы так и поступили в (3.182).

Однако к этому есть что добавить. Из приведенных вычислений видно, что ни уравнение Пуассона (4.116), ни уравнения Эйнштейна (4.120) не были использованы. Мы основывались на соотношениях (4.121), вытекающих из закона сохранения $T^{ij}_{|j}=0$, который в свою очередь является следствием уравнений (4.120), но никоим образом им не эквивалентен. Полагая в соотношении (4.129) $\beta=\alpha$ и учитывая уравнение (4.116), получаем

$$-4\pi\gamma\varrho=R_{(44)}=R_{ij}V^iV^j. \tag{4.130}$$

В свою очередь из уравнений (4.120) следует, что

$$G=g^{ij}G_{ij}=\varkappa\mu, \tag{4.131}$$

и тогда

$$\begin{aligned} R_{ij}&=G_{ij}-\frac{1}{2}g_{ij}G=-\varkappa\mu V_iV_j-\frac{1}{2}g_{ij}\varkappa\mu,\\ R_{ij}V^iV^j&=-\varkappa\mu+\frac{1}{2}\varkappa\mu=-\frac{1}{2}\varkappa\mu=-4\pi\mu. \end{aligned} \tag{4.132}$$

Следовательно, из уравнения (4.130) вытекает следующее соотношение между плотностями в обеих сравниваемых теориях:

$$\mu=\gamma\varrho. \tag{4.133}$$

Теперь можно определить число секунд в грамме. Как известно, гравитационная постоянная равна

$$\gamma=6{,}670\cdot10^{-8}\ г^{-1}\cdot см^3\cdot сек^{-2}. \tag{4.134}$$

Так как, согласно формуле (3.134), 1 *см* $=3{,}336\cdot10^{-11}$ *сек*, то

$$\gamma=2{,}476\cdot10^{-39}\ г^{-1}\cdot сек. \tag{4.135}$$

Вспомним, что все длины измеряются в секундах; тогда плотность равна μ *сек*$^{-2}=\varrho$ *г·сек*$^{-3}$. Пусть 1 *г* $=x$ *сек*. Тогда $\mu=x\varrho$, и из соотношения (4.133) $x=\gamma$, причем численная величина этой постоянной дана в формуле (4.135). Поэтому

$$\begin{aligned} 1\ г&=2{,}476\cdot10^{-39}\ сек,\\ 1\ сек&=4{,}039\cdot10^{38}\ г. \end{aligned} \tag{4.136}$$

Приведем следующие значения масс:

$$\begin{aligned} \text{Масса электрона}&=2{,}255\cdot10^{-66}\ сек,\\ \text{Масса Луны}&=1{,}813\cdot10^{-13}\ сек,\\ \text{Масса Земли}&=1{,}479\cdot10^{-11}\ сек,\\ \text{Масса Солнца}&=4{,}920\cdot10^{-6}\ сек. \end{aligned} \tag{4.137}$$

Масса средней галактики[1] $=10^{44}$ *г* $=2\cdot10^5$ *сек*.

Если масса и расстояния выражаются в секундах, сила оказывается безразмерной величиной. Ньютоновское притяжение двух масс m и m', удаленных друг от друга на расстояние r, равно mm'/r^2; таким образом, по сути дела, мы положили гравитационную постоянную равной единице.

§ 6. Обсуждение уравнений поля и координатных условий

В предыдущем параграфе было приведено достаточно аргументов, показывающих, что уравнения поля общей теории относительности и уравнения

[1] См. книгу Бонди [67], стр. 38.

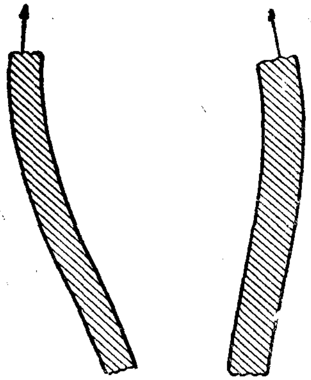
гидродинамики и тяготения Ньютона при всем своем внешнем несходстве имеют весьма близкое содержание, по крайней мере в случае жидкости без давления. Ввиду того обстоятельства, что основные положения теории Ньютона весьма неудовлетворительны, принятие ньютонианских концепций в качестве основ общей теории относительности лишь профанировало бы последнюю; поэтому приведенное сравнение обеих теорий преследовало единственную цель — удостовериться, могут ли следовать из уравнений гравитационного поля Эйнштейна физически приемлемые выводы. Эти уравнения весьма сложны с математической точки зрения, и следующее, что мы предпримем — это дадим их общий обзор, не вдаваясь пока в рассмотрение связанных с ними технических трудностей. Вспомним [(4.111) — (4.113)], что уравнения поля имеют вид

$$G_{ij} = -\varkappa T_{ij}, \quad \varkappa = 8\pi \tag{4.138}$$

и в случае пустого пространства сводятся просто к

$$G_{ij} = 0, \text{ или, что то же, } R_{ij} = 0. \tag{4.139}$$

Отношение к этим уравнениям может быть трех сортов: реалистическое, агонистическое и творческое. *Человек реалистического характера* стремится связать эти уравнения поля с уже известными ему обширными сведениями о физическом мире. *Агонист*[1]) берется за решение сложных математических проблем, к которым приводят уравнения гравитационного поля. *Человек с творческой жилкой* находит удовольствие в построении миров, фантастических, либо схожих с реальным, удовлетворяющих уравнениям поля. В действительности эти три склонности сливаются в общем стремлении к пониманию мира, но наша классификация все же полезна.



Фиг. 54. Задача двух тел.

Наш реалист знает, что солнечная система состоит из гигантского жидкого тела (Солнца) и множества планет (твердых, жидких и смешанных), обращающихся вокруг него; у этих планет есть спутники, и все тела вращаются. Если не считать весьма малых объектов, межпланетное пространство не содержит вещества, а излучение, присутствие которого возможно, динамически не очень существенно. Поэтому во внутренних областях Солнца и планет следует пользоваться уравнениями (4.138), а в пространстве между ними — уравнениями (4.139), применяя условия соединения (см. гл. I, § 9) на поверхности Солнца и планет. Однако реалист может для простоты обратиться к рассмотрению вселенной, содержащей лишь два тела. В пространстве — времени эти тела изображаются в виде двух временноподобных мировых трубок (фиг. 54). Внутри трубок действуют уравнения (4.138), а снаружи — (4.139). Но что представляет собой, однако, тензор T_{ij} внутри трубок? Для большей ясности напомним уже сказанное в отношении тензора энергии. Мы считаем, что он имеет четыре собственных значения θ и четыре соответствующих им собственных вектора λ^i, удовлетворяющих условиям

$$T_{ij}\lambda^j = \theta\lambda_i. \tag{4.140}$$

---

[1]) В смысле греческого ἀγωνιστής — участник игр, оспаривающий призы.

Времениподобный единичный вектор мы обозначим через V^i, а соответствующее ему собственное значение — через $-\mu$, так что

$$T_{ij}V^j = -\mu V_i. \quad (4.141)$$

Обозначая остальные собственные значения через $\theta_{(\alpha)}$, а соответствующие им единичные пространственноподобные собственные векторы через $\lambda^i_{(\alpha)}$, можно придать тензору T_{ij} вид [ср. (4.78)]

$$T_{ij} = \mu V_i V_j - S_{ij}, \quad (4.142)$$

где тензор натяжений S_{ij} равен

$$S_{ij} = -\sum_{\alpha=1}^{3} \theta_{(\alpha)}\lambda_{(\alpha)\,i}\lambda_{(\alpha)\,j}, \quad (4.143)$$

причем он удовлетворяет равенствам

$$S_{ij}V^j = 0. \quad (4.144)$$

Безусловно, мы ожидаем, что плотность μ положительна. В отношении же натяжений менее очевидно, что следует считать предпочтительным выбором — давление или растяжение. Однако в рамках астрономических масштабов нельзя ожидать существования тел, подвергающихся растяжению, ибо оно распылило бы их. Тогда $-\theta_{(\alpha)}$ представляют собой три основные компоненты натяжения; их желательно считать отрицательными. Таким образом, можно говорить, что по физическим причинам мы выбираем следующие знаки собственных значений T_{ij}:

$$\text{Собственные значения } T_{ij}: (+\,+\,+\,-). \quad (4.145)$$

Заметим, что ввиду знака «минус» в уравнениях (4.138) отсюда следует [1]

$$\text{Собственные значения } G_{ij}: (-\,-\,-\,+). \quad (4.146)$$

Тогда уравнения гравитационного поля внутри мировых трубок принимают вид

$$G_{ij} = -\varkappa\mu V_i V_j + \varkappa S_{ij}, \quad (4.147)$$

а если тело представляет собой идеальную жидкость, их можно записать как

$$G_{ij} = -\varkappa(\mu + p) V_i V_j - \varkappa p g_{ij}. \quad (4.148)$$

При этом

$$V_i V^i = -1. \quad (4.149)$$

Если вектор n^i есть единичная нормаль к трехмерной поверхности, окружающей мировую трубку, условие содинения имеет вид

$$T_{ij}n^j = 0 \quad (4.150)$$

и означает, что n^i представляет собой собственный вектор с нулевым собственным значением. Поэтому одна из основных компонент натяжения

---

[1] Так как знак «минус» содержится одновременно и в уравнениях (4.138) и в матрице $\eta_{ij} = \mathrm{diag}\,(1,\ 1,\ 1,\ -1)$, то в определении знаков легко ошибиться. Но, поскольку положительный знак плотности μ физически очень важен, мы заметим, что при обычном использовании координат, когда параметрические линии x^α пространственноподобны, а линия x^4 временноподобна, для значения плотности $\mu > 0$ необходимо, чтобы

$$G_{44} < 0, \quad G^4_4 > 0, \quad T_{44} > 0, \quad T^4_4 < 0. \quad (4.146a)$$

Эти знаки легко проверить с помощью соотношений (4.147) и (4.138).

оказывается равной нулю и ей соответствует главное направление n^i. Но вектор V^i должен быть перпендикулярен к этому направлению, и мы получаем в качестве условий соединения

$$V_i n^i = 0, \quad S_{ij} n^j = 0. \tag{4.151}$$

В случае идеальной жидкости эти условия приводятся к виду

$$V_i n^i = 0, \quad p = 0. \tag{4.152}$$

Оставим пока нашего реалиста. Агонист начнет с простейшего подсчета числа дифференциальных уравнений и неизвестных, которые должны им удовлетворять. Однако при этом следует ввести важное понятие *координатных условий.* Мы можем произвольно менять координатные системы в рамках условия допустимости (см. гл. I, § 1). Можно было бы перейти к нормальным гауссовым координатам, в которых аналогично (1.213)

$$g_{\alpha 4} = 0, \quad g_{44} = -1, \tag{4.153}$$

если предположить, что четвертая координата временноподобна. Мы записали, таким образом, частный случай *координатных условий.* Они могут быть и более общими, однако существенно, что их всегда *четыре*; это число *четыре* проистекает из того факта, что координатное преобразование включает *четыре* функции, выражающие новые координаты через старые. Хотя нормальные гауссовы координаты, вероятно, представляют собой простейший случай конкретного вида координат в пространстве — времени, существуют также *нулевые координаты*, для которых (Синг [1184])

$$g^{11} = g^{22} = g^{33} = g^{44} = 0. \tag{4.154}$$

Если, исходя из каких-либо координат $\bar{x}^i$ и контрвариантного метрического тензора $\bar{g}^{ij}$, разрешить четыре уравнения в частных производных вида

$$\bar{g}^{ij} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^j} = 0, \tag{4.155}$$

то мы придем как раз к таким координатам x^a, для которых выполняются соотношения (4.154). В работах по теории относительности можно найти целый ряд различных координатных условий, преследующих каждый раз особые цели. Чтобы подойти к этому вопросу единым образом, запишем координатные условия в виде

$$C_i = 0. \tag{4.156}$$

Этим уравнениям (возможно, дифференциальным) должен удовлетворять метрический тензор g_{ij}. Конечно, они *не могут быть* тензорными, так как они удовлетворяются лишь при специальном выборе системы координат.

Теперь можно перейти к сравнению числа уравнений с числом неизвестных. В случае идеальной жидкости мы имеем, согласно уравнениям (4.148), (4.149) и (4.156), внутри мировых трубок $10 + 1 + 4 = 15$ уравнений, которые должны удовлетворяться следующими 16 неизвестными: g_{ij}, V_i, μ и p. Эта система недоопределена. Чтобы сделать ее определенной, следует привлечь какую-либо дополнительную гипотезу, подобно тому, как это делается в ньютоновской гидродинамике: можно было бы потребовать постоянства μ или постулировать некоторое в известной мере произвольное уравнение, связывающее μ и p. Что же касается поля в вакууме, то число уравнений (4.139), казалось бы, равно 10; однако, на основании тождеств

$$G^{ij}_{\ |j} = 0, \tag{4.157}$$

мы имеем в действительности в (4.139) лишь 6 независимых уравнений. Вместе с 4 условиями (4.156) это составляет как раз 10 уравнений для 10 неизвестных g_{ij}. Таким образом, что касается числа уравнений, то задача оказывается определенной (например, случай двух тел), если дополнительно постулировать некоторое уравнение для давления и плотности.

Однако *сосчитать* дифференциальные уравнения в частных производных — это далеко не то же самое, что *решить* их. Столкнувшись с такой сложной ситуацией, необходимо задуматься и решить, что же именно мы стараемся сделать. Реалист ответит, что мы пытаемся осуществить в теории относительности программу ньютоновской динамики. Поскольку ньютоновская динамика добилась замечательных успехов в области небесной механики, может возникнуть вопрос, не был ли этот успех обязан каким-либо дополнительным предположениям, привносимым «здравым смыслом». В случае задачи двух тел точное рассмотрение двух *жидких* масс чрезмерно сложно, и обычно берутся лишь два *твердых тела*. Далее можно считать эти тела шарообразными, и уж конечно их можно представить себе в виде двух материальных точек — тогда задача двух тел превращается в элементарное упражнение. Однако сущность причины успеха ньютоновой динамики состоит в сведении дифференциальных уравнений в *частных* производных к *обыкновенным* дифференциальным уравнениям, как только принято предположение, что тела *твердые*.

Попытки использовать ньютоновские упрощающие предположения в релятивистской задаче двух тел терпят неудачу. Фундаментальное для теории Ньютона понятие твердого тела оказывается неприемлемым в теории относительности, а представление тел в виде точечных частиц выходит за рамки теории относительности, которая по существу является теорией поля. Эти обстоятельства, конечно, не принижают несомненной полезности приближений, основанных на разумных предположениях о чрезвычайной малости скорости распространения натяжений или малости размеров каждого из тел. Есть еще две исходные точки для приближенного подхода: 1) предположение, что все известные гравитационные поля слабы (кривизна пространства — времени мала), и 2) предположение, что малы относительные скорости тел.

Выслушав наших реалиста и агониста, перейдем теперь к плану творческой натуры — строителя вселенных, согласующихся с уравнениями поля. Конечно, некоторые из них окажутся очень причудливыми, однако при уверенности в физической состоятельности теории Эйнштейна мы вправе думать, что из всего класса построенных таким образом вселенных одна представляет особый интерес — это та Вселенная, в которой мы действительно живем.

Любой набор из десяти достаточно гладких функций $g_{ij}(x)$ (предположим для простоты, что они принадлежат классу C^2) определяет риманово пространство — время в том случае, если $g_{ij}dx^i dx^j$ имеет правильную сигнатуру, т. е. если тензор g_{ij} локально приводим к диагональному виду diag (1, 1, 1,—1). Поэтому, произвольно выбрав такие функции, мы, согласно (4.138), придем ко вселенной с тензором энергии

$$T_{ij} = -\varkappa^{-1} G_{ij}, \tag{4.158}$$

где тензор Эйнштейна считается вычисленным на основании заданных g_{ij}; это вычисление сводится к алгебраическому определению g^{ij} и проведению необходимого дифференцирования. При этом не требуется решать дифференциальные уравнения в частных производных. Так как вся процедура основана на знании выбранных значений g_{ij}, то назовем ее *g-методом*. Грубо говоря, этому методу в теории Ньютона соответствует исследование гравитационного поля путем задания его потенциала φ и последующего вычис-

ления плотности ϱ из уравнения Пуассона, переписанного в виде

$$\varrho = -(4\pi\gamma)^{-1}\Delta\varphi. \qquad (4.159)$$

Эта программа выглядит подозрительно простой и вызывает два критических замечания. Прежде всего полученные таким путем, вслепую, вселенные едва ли будут вообще напоминать ту Вселенную, которая нам знакома. Во-вторых, до самого конца подсчета знаки собственных значений T_{ij} остаются неизвестными, а если они не совпадут со знаками $(+++-)$ из (4.145), то получится неестественный вариант вселенной. Из этих знаков важнее всех последний. Если четвертое собственное значение тензора T_{ij} окажется положительным (т. е. последнее собственное значение G_{ij} — отрицательным), то мы получим случай отрицательной плотности масс, и хотя в современной физике отрицательная плотность уже не считается такой предосудительной, как когда-то, все же в рамках небесной механики ее существование неправдоподобно.

Но как бы незначительна ни была практическая ценность подобных синтезированных миров, нельзя отказать в поучительности этим малонадежным попыткам конструирования моделей, хотя бы отдаленно напоминающих нашу Вселенную. Дело в том, что при рассмотрении плотности масс существен лишь один знак, и при широком выборе метрики g_{ij} (анализируемой лишь с точки зрения условия сигнатуры) в построении положительной плотности нам благоприятствует вероятность $^1/_2$; вероятность $^1/_{16}$ соответствует обнаружению требуемых знаков всех четырех собственных значений. И все-таки положение не так просто, как казалось бы, ибо правильные знаки необходимо получить не в одной четырехмерной точке, но во всем пространстве — времени. Тот, кто попытает удачу в таком расчете, обнаружит, что шансы против него — плотность упрямо стремится изменять свой знак в различных областях пространства — времени.

В свете взаимосвязи между теорией Ньютона и теорией относительности, установленной в § 5, вопрос о таких изменениях знака плотности разъясняется, если рассмотреть уравнение Пуассона вида (4.159). В силу теоремы Гаусса поток нормальной составляющей градиента φ через какую-либо замкнутую поверхность пропорционален полной массе, заключенной внутри этой поверхности. Если мы выберем потенциал φ так, что он убывает на бесконечности быстрее, чем $^1/_r$, то полная масса системы окажется равной нулю, вследствие чего знак плотности ϱ будет в ней переходить то в положительный, то в отрицательный. А если стремление φ к нулю окажется медленнее, чем стремление $^1/_r$, то, по всей вероятности, следует ожидать появления бесконечной полной массы. Отсюда ясно, что решающим является поведение φ на бесконечности, и тогда (если ограничиться грубой, но драматической постановкой вопроса) вероятность знакопеременности плотности масс намного превысит $^1/_2$.

Как будет показано дальше, существует релятивистский аналог теоремы Гаусса (к сожалению, значительно более сложный, чем его прототип), который подобным же образом подтверждает высокую вероятность изменений знака плотности, вычисленной на основании произвольного выбора g_{ij}. Поэтому, как бы привлекателен ни был описанный метод строительства фантастических миров, необходим довольно жесткий отсев, если мы стремимся ограничиться лишь правдоподобными вселенными, и правила такого отсева вовсе не просто сформулировать.

Рассмотрев уравнения гравитационного поля с точки зрения реалиста, агониста и творца, читатель может прийти к заключению, что теория относительности (по сравнению с теорией Ньютона) дает туманное и неопределенное описание Вселенной. Он будет не так уж неправ. Мы еще не овладели по-

настоящему теорией Эйнштейна, но само это тем более заставляет нас высоко ценить уже полученные точные решения уравнений поля.

Отложим, однако, еще ненадолго общее рассмотрение уравнений поля. При использовании g-метода тензор g_{ij} считается заданным, а уравнения (4.138) попросту определяют тензор T_{ij}. Напротив, задавая тензор T_{ij} (*T-метод*), мы приходим к системе десяти нелинейных уравнений второго порядка в частных производных

$$G_{ij} = -\varkappa T_{ij}, \tag{4.160}$$

удовлетворять которым должен тензор g_{ij}. К ним нельзя добавлять никаких координатных условий. Четыре уравнения сохранения

$$g^{jk} T_{ij\,|\,k} = 0, \tag{4.161}$$

следующие из уравнений (4.160), не накладывают ограничений на выбор тензора T_{ij}, так как последний содержит неизвестный тензор g_{ij} не только в качестве коэффициентов, но и в составе ковариантных производных.

Точно так же, как g-метод имеет отражение в теории Ньютона [см. (4.159)], аналогом T-метода будет задача о нахождении потенциала φ по заданному распределению масс. Ее решением оказывается интеграл, сводящийся в случае точечных масс к широко известному выражению

$$\varphi = \Sigma \frac{\gamma m}{r}. \tag{4.162}$$

К этому решению можно добавить любую гармоническую функцию, которую, однако, обычно исключают, исходя из требования обращения потенциала в нуль на бесконечности.

Человеку реалистического склада импонирует более T-метод, чем g-метод, так как в этом случае отрицательную плотность можно исключить, непосредственно задавая T_{ij}. Однако новый метод уступает в реалистичности самосогласованным уравнениям (4.148) для идеальной жидкости, поскольку он не учитывает физической структуры вещества. С точки зрения агониста, T-метод ставит привлекательную по своей трудности задачу из области нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, и здесь уже намечены следующие три пути исследования.

1) Принимаются во внимание условия симметрии, заметно снижающие число независимых переменных и неизвестных функций (см. гл. VII — IX).

2) Внимание сосредоточивается на задаче Коши (задаче начальных значений; см. гл. V).

3) Используется метод последовательных приближений.

Начиная рассмотрение с метода последовательных приближений, мы заметим, что при повсеместном равенстве тензора T_{ij} нулю должно иметь место решение вида

$$g_{ij} = \eta_{ij} = \operatorname{diag}(1,\ 1,\ 1,\ -1), \tag{4.163}$$

представляющее собой метрику плоского пространства — времени. Полагая теперь тензор T_{ij} малым, мы запишем поэтому

$$g_{ij} = \eta_{ij} + g_{ij}^{(1)} + g_{ij}^{(2)} + \ldots, \tag{4.164}$$

где числовые индексы обозначают порядок величины по отношению к T_{ij}. Подставляя это разложение в уравнения (4.160) и разделяя слагаемые различных порядков малости, мы получаем дифференциальные уравнения в частных производных для различных слагаемых из (4.164). Член $g_{ij}^{(1)}$ называют *линейным приближением* по той причине, что соответствующие ему дифференциальные уравнения линейны. В следующей главе мы найдем

линейное приближение при некоторых ограничениях, наложенных на T_{ij}; оно соответствует ньютоновскому выражению (4.162). При выходе за рамки этого линейного приближения мы сталкиваемся с таким быстрым усложнением теории, что оказывается весьма затруднительным расшифровать математический или физический смысл результатов, полученных к настоящему времени ценой остроумных и настойчивых усилий (Эйнштейн, Инфельд и Гофман [296], Эйнштейн и Инфельд [294, 295], Инфельд [474—476, 480—483], Инфельд и Плебаньский [485, 486], Инфельд и Шайдеггер [487], Бергман [38], Боннор [77], Финци [336])[1]).

Мы опишем теперь более скромный план приближения, ограничивающегося двумя шагами и подсказываемый уже упомянутым линейным приближением и следующими двумя соображениями:

1) В той сложной ситуации, которую мы перед собой имеем, точное решение уравнений поля гораздо предпочтительнее всяких приближений, причем даже точное математическое решение представляет собой лишь приближение к физической действительности (на большее не могла бы претендовать ни одна математическая формула).

2) Мы будем здесь рассматривать уравнения (4.160) не как систему уравнений для определения g_{ij}, но как систему уравнений, которым должны удовлетворять 20 величин g_{ij} и T_{ij}; всякое решение представляет ценность, но в особенности ценно то, которое стоит ближе к физической действительности. Этот план представляет собой комбинацию T-метода и g-метода и предполагает следующие шаги.

а) Выбираем любой набор симметричных функций $A_{ij}(x)$, удовлетворяющих четырем условиям

$$\eta^{jk}A_{ij,\,k}=0. \tag{4.165}$$

(Заметим, что берется частная производная!)

б) Подставим выражение

$$g_{ij}=\eta_{ij}+\gamma_{ij} \tag{4.166}$$

в уравнение (1.108) и формально вычислим G_{ij}, полагая компоненты γ_{ij} бесконечно малыми и ограничиваясь лишь главными членами. Обозначая полученный результат через H_{ij}, можно записать

$$H_{ij}=\frac{1}{2}\{\eta^{ab}(\gamma_{ab,\,ij}+\gamma_{ij,\,ab}-\gamma_{ai,\,bj}-\gamma_{aj,\,bi})-$$
$$-\eta_{ij}\eta^{ab}\eta^{cd}(\gamma_{ab,\,cd}-\gamma_{ac,\,bd})\}. \tag{4.167}$$

в) Запишем уравнения

$$H_{ij}=-\varkappa A_{ij} \tag{4.168}$$

и будем рассматривать их как уравнения в частных производных для γ_{ij} (T-метод). Эти уравнения согласуются с условиями (4.165) и имеют чрезвычайно интересные и простые частные решения, именуемые обычно запаздывающим (или опережающим) потенциалом. Мы обсудим этот вопрос в следующей главе, здесь же достаточно сказать, что наше частное решение для γ_{ij} обращается в нуль, если положить $A_{ij}=0$.

г) Подставим теперь частное решение в равенство (4.166) и получим таким образом метрику g_{ij}, с помощью которой вычислим соответствую-

[1]) Указанные работы касаются так называемой «проблемы движения»; применяемый в них метод не вполне совпадает с описанным выше T-методом, так как в этих работах используются лишь уравнения поля в вакууме, а вещество входит в виде особенностей. См. также работы Фока [341—344, 346, 347] и работы Кларка, приведенные в библиографии.

щий тензор G_{ij}. Тогда (следуя g-методу) мы получим тензор энергии

$$T_{ij} = -\varkappa^{-1} G_{ij}, \qquad (4.169)$$

так что найденные величины g_{ij} и T_{ij} удовлетворяют уравнениям поля (4.160).

Для того чтобы предлагаемый план был осуществим, нужно наложить на A_{ij}, кроме условий (4.165), только условия гладкости и достаточно быстрого стремления к нулю на бесконечности. Поэтому выбрать подходящую величину A_{ij}, естественно, всегда можно. Следует, однако, проверить два обстоятельства: 1) сигнатуру метрики g_{ij} и 2) знаки собственных значений тензора T_{ij}. Оба они могут быть приведены в согласие с требованиями теории, если выбрать достаточно малые A_{ij}. Речь идет не о бесконечной малости A_{ij}, поскольку условия сигнатуры и знаков имеют форму неравенств. Взяв достаточно малые компоненты A_{ij}, можно гарантировать малость γ_{ij}, достаточную для того, чтобы тензор g_{ij} (4.166) приобрел требуемую сигнатуру. Более тонким оказывается вопрос о собственных значениях. Допустим, что выбор величины A_{ij} предполагает естественные знаки ее собственных значений относительно η_{ij}, т. е. корни характеристического уравнения

$$\det | A_{ij} - \theta \eta_{ij} | = 0 \qquad (4.170)$$

имеют знаки $(+ + + -)$ [ср. (4.145)]. Собственными значениями тензора T_{ij} будут величины θ', удовлетворяющие уравнению

$$\det | T_{ij} - \theta' g_{ij} | = 0. \qquad (4.171)$$

Выберем теперь A_{ij} малыми, например порядка O_1. Тогда $\gamma_{ij} = O_1$, так что метрика g_{ij} отличается от η_{ij} на O_1. Оценка G_{ij} при этом дает

$$G_{ij} = H_{ij} + O_2, \qquad (4.172)$$

так что, согласно равенствам (4.169),

$$T_{ij} = A_{ij} + O_2. \qquad (4.173)$$

Отсюда следует, что при переходе от уравнений (4.170) к (4.171) знаки собственных значений не меняются (ввиду достаточной малости A_{ij}); направления собственных векторов меняются также незначительно.

Однако следует подчеркнуть, что мы *не* обращались здесь к приближенному методу. Мы не отбрасывали никаких малых величин. Наши средства исчерпывались возможностью выбрать *достаточно малые, но все же вполне конечные величины* A_{ij}. Такой метод можно назвать *методом обратной связи*, так как найденные из линейного приближения определяющие значения метрики были вновь подставлены в точные уравнения. Мы используем этот метод в следующей главе.

§ 7. Замечания о движении изолированного тела

Предпримем теперь (в духе реалиста) исследование движения материального тела изолированного в том смысле, что оно движется в пустоте. Другие тела присутствовать могут, но мы ими интересоваться не будем. Внутри мировой трубки нашего тела справедливы уравнения поля

$$G_{ij} = -\varkappa T_{ij}, \quad \varkappa = 8\pi, \qquad (4.174)$$

а вне ее —

$$G_{ij} = 0. \qquad (4.175)$$

Обозначим через Σ границы мировой трубки. Тогда тензор G_{ij} терпит разрыв на Σ, однако этот разрыв подчиняется условию сшивания (1.229), которое требует от тензора G_{ij} выполнения с внутренней стороны трубки равенств

$$G_{ij}N^j = 0 \text{ на } \Sigma, \tag{4.176}$$

где N^i — единичный вектор внешней нормали к Σ. Из этого условия следует, что тензор Эйнштейна имеет на Σ одно нулевое собственное значение, которому соответствует собственный вектор N^i. Ввиду взаимной ортогональности собственных векторов временноподобный собственный вектор тензора G_{ij} (т. е. 4-скорость V^i) ортогонален к N^i, и можно записать равенство, аналогичное (4.151):

$$V_i N^i = 0 \text{ на } \Sigma. \tag{4.177}$$

Это соотношение соответствует тому факту, что поверхность Σ образована линиями тока — утверждение, которое хотелось бы принять, независимо от данного результата, просто за его собственные достоинства. Следует, однако, иметь в виду весьма жесткий характер предположения об изолированности рассматриваемого тела, зафиксированный в условиях (4.176). Физически они запрещают телу излучать, т. е. требуют равенства потока энергии через его поверхность нулю.

С точки зрения уравнений (4.174) все равно, будем ли мы исходить из тензора G_{ij} (из геометрии) или из тензора T_{ij} (из физики). Выберем T_{ij} и вспомним при этом, что тензор энергии равен

$$T_{ij} = \mu V_i V_j - S_{ij}, \tag{4.178}$$

где μ — плотность, V_i — 4-скорость, а S_{ij} — натяжения, удовлетворяющие условиям

$$S_{ij} V^j = 0. \tag{4.179}$$

Основным в этом случае будет уравнение (4.105):

$$\mu D V^i = S^{ij}{}_{|j} - V^i S^{jk} \sigma_{jk}. \tag{4.180}$$

Здесь $D = \delta/\delta s$ — абсолютная производная вдоль линии тока, а σ_{jk} — тензор распространения натяжений (4.62), удовлетворяющий равенствам

$$\sigma_{jk} V^k = 0. \tag{4.181}$$

Заметим, что уравнение (4.180) выражает абсолютное ускорение линии тока (или, что то же, вектор ее первой кривизны) через другие величины; условие же, что линия тока должна быть геодезической, записывается как

$$D V^i = 0. \tag{4.182}$$

Теперь приведенное рассмотрение можно мотивировать, сказав, что его цель состояла в выяснении смысла гипотезы о геодезических (см. гл. III, § 3), и речь шла о попытке получить уравнения (4.182) из (4.180) путем некоторого предельного перехода. Действительно, все получается очень просто, если предположить отсутствие натяжений в рассматриваемом теле. Однако по существу это сведет задачу к уже рассмотренной в § 4, где было показано, что линии тока некогерентной жидкости (или облака пыли) представляют собой геодезические. Случай же обращения натяжений в нуль физически неинтересен, а попытка приближенного подхода к случаю малых натяжений может легко привести к ошибке, так как тензор натяжений — величина размерная и ее можно считать малой лишь по сравнению с другими величинами той же размерности. Поэтому мы откажемся от приближенного рассмотрения и будем искать точные следствия уравнений (4.180).

Для удобства введем в каждой мировой точке на поверхности Σ нашей мировой трубки величину

$$Q = N_i S^{ij}_{\ |j}. \tag{4.183}$$

Тогда вследствие (4.177) уравнения (4.180) дадут на Σ

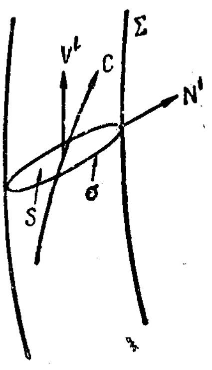
$$\mu N_i DV^i = Q. \tag{4.184}$$

В общем случае движение тела происходит с вращением в смысле § 3; иными словами, тело имеет спин. Однако случай отсутствия вращения гораздо легче поддается анализу, и мы обратимся в первую очередь к нему.

При невращательном движении линии тока образуют нормальную конгруэнцию, и можно изобразить нормальное трехмерное сечение S мировой трубки (фиг. 55). Пусть σ будет двумерным пересечением S и Σ. Тогда N^i, единичный вектор внешней нормали к Σ, в то же время будет единичным вектором внешней нормали и к σ в трехмерном пространстве S. Так как вектор DV^i ортогонален к V^i, то DV^i лежит в S, и поэтому инвариант $N_i DV^i$ будет внешней компонентой вектора DV^i, нормальной к σ в S. Естественным образом полагая плотность положительной, мы видим из равенства (4.184), что знак этой нормальной внешней компоненты совпадает со знаком Q. Действительно, если

$$Q > 0 \quad \text{на} \quad \Sigma, \tag{4.185}$$

то вектор DV^i оказывается везде на σ направленным наружу. Однако, согласно теореме о фиксированной точке в пространственноподобном трехмерном пространстве, содержащем векторное поле, на всей границе этого пространства направленное *во вне его*, найдется точка, в которой вектор поля обратится в нуль. Отсюда мы заключаем, что *при выполнении неравенства* (4.185) *в S существует точка, в которой выполняются равенства* (4.182). Так как мировая трубка имеет ∞^1 нормальных сечений, внутри этой трубки содержится ∞^1 точек, в каждой из которых справедливы равенства (4.182). Эти точки образуют внутри трубки кривую C (см. фиг. 55). Заметим, что C представляет собой *геометрическое место точек, в которых отсутствует ускорение*. Само по себе оно не является, вообще говоря, линией тока, и, конечно, нет оснований считать линию C временноподобной. Мы еще возвратимся к условию (4.185) при его интерпретации для случая жидкости.



Фиг. 55. Трубка мировых линий в отсутствие вращения.

Перейдем к более сложному случаю *вращающегося тела*. Теперь у мировой трубки нет нормальных сечений, и неясно, на какие сечения следует опереться при рассуждениях, подобных предыдущим. Взяв какое-либо пространственноподобное сечение S, направленная в будущее единичная нормаль которого есть n^i, мы получим в S

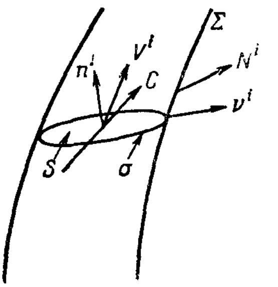
$$-K \leqslant n_i V^i \leqslant -1, \tag{4.186}$$

где K — максимальное значение $|n_i V^i|$ в S. В отсутствие вращения можно сделать $K = 1$ (перейдя к нормальному сечению), вообще же говоря, желательно выбрать S таким образом, чтобы величина K приняла наименьшее возможное в Σ значение. Однако мы воздержимся от обсуждения этого интересного геометрического вопроса и удовлетворимся тем, что предположим существование некоторого значения K, такого, что в Σ имеет место соотношение

$$1 \leqslant |n_i V^i| \leqslant K. \tag{4.187}$$

Тогда, несколько грубым образом, можно считать величину $K-1$ мерой вращения тела.

На фиг. 56 изображены граница мировой трубки Σ с единичным вектором внешней нормали N^i, пространственноподобное сечение S с единичной нормалью n^i, пересечение σ гиперповерхностей S и Σ, единичный вектор ν^i внешней нормали к σ в S и 4-скорость V^i. Величина K в соотношении (4.187) задает верхнюю грань также для величины $|n_iN^i|$, что можно показать, используя в каждой точке на σ координаты, в которых



Фиг. 56. Трубка мировых линий при наличии вращения.

$$g_{ij}=\operatorname{diag}(1,\ 1,\ 1,\ -1),$$
$$V^4=1,\qquad N^1=1, \tag{4.188}$$

причем остальные компоненты V^i и N^i равны нулю. Тогда из (4.187) следует, что

$$|n_4|\leqslant K, \tag{4.189}$$

откуда

$$n_1^2=n_4^2-1-n_2^2-n_3^2\leqslant K^2-1. \tag{4.190}$$

Таким образом, интересующая нас верхняя грань определяется как

$$|n_iN^i|\leqslant (K^2-1)^{1/2}. \tag{4.191}$$

Подобным же образом, на основании тождества

$$V_iDV^i=0 \tag{4.192}$$

можно показать, что

$$|n_iDV^i|\leqslant b\,(K^2-1)^{1/2}, \tag{4.193}$$

где b — первая кривизна линии тока (абсолютное ускорение), определяемая как

$$b^2=g_{ij}DV^i\,DV^j. \tag{4.194}$$

Так как вектор ν^i направлен во внешнюю сторону и $\nu_i\,dx^i=0$ для каждого сдвига, удовлетворяющего условиям $n_i\,dx^i=0$ и $N_i\,dx^i=0$, мы получим

$$\nu^i=\alpha N^i+\beta n^i,\qquad \alpha>0. \tag{4.195}$$

Отсюда, ввиду того, что $n_i\nu^i=0$ и $n_in^i=-1$, следует

$$\nu^i=\alpha\,(N^i+n^in_jN^j),\quad \alpha>0. \tag{4.196}$$

Пусть W^i будет ортогональной проекцией DV^i на S. Внешняя компонента W^i параллельная нормали ν^i на σ, равна

$$W_i\nu^i=\nu_iDV^i=\alpha\,(N_iDV^i+n_iDV^in_jN^j). \tag{4.197}$$

Чтобы теорема о фиксированной точке была применима к этому случаю, дополним (4.187) еще одним неравенством, которое гарантирует положительность выражения (4.197) на всей поверхности σ. Пусть

$$Q>\mu b\,(K^2-1) \tag{4.198}$$

на всей σ. Тогда из (4.184), (4.191) и (4.193) следует, что величина $W_i\nu^i$ положительна на всей поверхности σ, так что вектор W^i должен в некоторой точке S обратиться в нуль. Тогда из равенства $W^i=0$ можно заключить, что вектор DV^i либо ортогонален к S, либо равен нулю. Однако вектор DV^i, будучи пространственноподобным, не может быть ортогональным к S. Поэтому *если на всей поверхности σ выполняются нера-*

венства (4.187) *и* (4.198), *то в* S *имеется такая точка, в которой* $DV^i=0$. Таким образом, мы нашли, как и в случае невращательного движения, кривую C — геометрическое место точек, в которых отсутствует ускорение.

Исследуем условие (4.198), гарантирующее существование места отсутствия ускорения. Мы имеем из (4.180)

$$b^2\mu^2=S^{ij}_{|j}S_{i\cdot|k}^{\cdot k}-2V_iS^{ij}_{|j}S^{mn}\sigma_{mn}-(S^{mn}\sigma_{mn})^2. \tag{4.199}$$

Однако

$$V_iS^{ij}_{|j}=(V_iS^{ij})_{|j}-V_{i|j}S^{ij}=-\sigma_{ij}S^{ij}, \tag{4.200}$$

так что

$$b^2\mu^2=S^{ij}_{|j}S_{i\cdot|k}^{\cdot k}+(S^{ij}\sigma_{ij})^2. \tag{4.201}$$

Отсюда следует, что условие (4.198) равносильно неравенству

$$N_iS^{ij}_{|j}>(K^2-1)\,[S^{ij}_{|j}S_{i\cdot k}^{\cdot k}+(S^{ij}\sigma_{ij})^2]^{1/2}. \tag{4.202}$$

В этой форме полученное условие несколько сложно для того, чтобы быть интересным. Однако для идеальной жидкости мы получим

$$S_{ij}=-p\,(V_iV_j+g_{ij}), \tag{4.203}$$

причем на Σ давление p обращается в нуль. Поэтому на Σ

$$\begin{gathered} S_{ij}=0,\\ S^{ij}_{|j}=-p_{,j}\,(V^iV^j+g^{ij})=-g^{ij}p_{,j}, \end{gathered} \tag{4.204}$$

и неравенство (4.202) сводится к

$$-p_{,i}N^i>(K^2-1)\,(g^{ij}p_{,i}\,p_{,j})^{1/2}. \tag{4.205}$$

Но на самом деле оно еще проще, поскольку на Σ $p=0$ и, следовательно,

$$(g^{ij}p_{,i}p_{,j})^{1/2}=|\,p_{,i}N^i\,|, \tag{4.206}$$

так что неравенство (4.205) распадается на два эквивалентных условия

$$p_{,i}N^i<0,\quad K^2<2. \tag{4.207}$$

Если признать, что давление с необходимостью положительно, то p должно возрастать при переходе через Σ во внутрь, поэтому первое неравенство в (4.207) автоматически удовлетворяется в любой физической задаче. Второе неравенство (4.207) удовлетворяется при (грубо говоря) не слишком быстром вращении нашего тела. *При этих условиях мировая трубка жидкого тела заключает в себе кривую отсутствия ускорения.*

Математические методы, привлекающие чуждые соображения, нельзя считать совершенными. Понятие отсутствия ускорения не имеет ничего общего с выбором сечения мировой трубки; фактически такое сечение чуждо нашей задаче. Возможно, что существует лучший и более прямой путь исследования явления отсутствия ускорения.

Возвращаясь на Землю (в буквальном смысле), мы можем задаться вопросом, содержит ли мировая трубка Земли кривую отсутствия ускорения. Вероятно, содержит, так как натяжения в Земле в значительной мере сводятся к гидродинамическому давлению, а вращение ее слабо (или нет?). Во всяком случае, если геофизик признает, что условия (4.207) применимы к Земле и выполняются для нее, то, безусловно, существует линия отсутствия ускорения. Однако следует иметь в виду полное отсутствие доводов в пользу того, что линия отсутствия ускорения представляет собой мировую линию какой-либо фиксированной части Земли.

Мы вновь вернемся к вопросу об изолированном теле в гл. VI, § 6.

Глава V

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПОЛЕЙ ЭЙНШТЕЙНА

§ 1. Основная формула для запаздывающего (или опережающего) потенциала

Для запаздывающего (или опережающего) потенциала имеет место теорема, которая настолько важна, что заслуживает несложного непосредственного доказательства.

Напомним хорошо известное определение оператора Даламбера для пространства — времени общего вида с метрикой g_{ij}, который действует на инвариант F:

$$\Box F = g^{ij}F_{|ij} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}\, g^{ij} \frac{\partial F}{\partial x^j}\right). \tag{5.1}$$

В плоском пространстве — времени с $g_{ij} = \eta_{ij} = \mathrm{diag}\,(1, 1, 1, -1)$ мы имеем

$$\Box F = \eta_{ij} \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}, \tag{5.2}$$

причем эта формула применима и в том случае, когда F представляет собой декартову компоненту тензора; в результате получается тензор того же типа. При использовании криволинейных координат в плоском пространстве — времени оператор $\Box$, действующий на декартову компоненту, определяется формулой (5.1); мы преобразуем оператор, не меняя F.

Для полярных координат в плоском пространстве — времени метрическая форма имеет вид

$$dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 - dt^2. \tag{5.3}$$

Если перейти к координатам $(u, v, \theta, \varphi) = (x^1, x^2, x^3, x^4)$, полагая

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}}(u - v), \qquad t = \frac{1}{\sqrt{2}}(u + v), \tag{5.4}$$

так что

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(t + r), \qquad v = \frac{1}{\sqrt{2}}(t - r), \tag{5.5}$$

то получим

$$\begin{gathered} g_{12} = -1, \quad g_{33} = r^2, \quad g_{44} = r^2 \sin^2\theta, \\ g^{12} = -1, \quad g^{33} = r^{-2}, \quad g^{44} = r^{-2} \operatorname{cosec}^2\theta, \\ \sqrt{-g} = r^2 \sin\theta, \quad r^2 = \frac{1}{2}(u^2 - 2uv + v^2), \end{gathered} \tag{5.6}$$

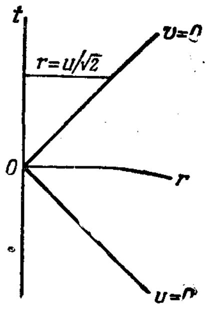
тогда как другие компоненты g_{ij} и g^{ij} равны нулю. В этом случае формула (5.1) дает

$$\Box F = -2 \frac{\partial^2 F}{\partial u\, \partial v} + \frac{2}{u - v}\left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial F}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2}. \tag{5.7}$$

Вычислим теперь интеграл

$$\int \square F\, d\omega, \tag{5.8}$$

взятый по некоторой области на световом (изотропном) конусе с вершиной в точке $r=0$, $t=0$. Здесь $d\omega$ — инвариантный элемент 2-объема (Синг [1175], стр. 430). Области прошедшего и будущего на световом конусе определяются уравнениями $u=0$ и $v=0$ соответственно (фиг. 57).



Фиг. 57. Две области изотропного конуса.

Ясно, что в силу симметрии (5.7) по u и v формальные вычисления одинаковы в обоих случаях. Выполним интегрирование по области $v=0$, так что $r=u/\sqrt{2}$ и двумерный элемент объема имеет вид

$$d\omega = \frac{1}{r} r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = \frac{1}{2} u \sin\theta\, du\, d\theta\, d\varphi. \tag{5.9}$$

Из вида (5.7) следует, что интеграл будет несобственным. Поэтому мы вырезаем малую область изотропного конуса в окрестности вершины O и рассматриваем интеграл, аналогичный (5.8), в пределах

$$\varepsilon \leqslant u < \infty, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi. \tag{5.10}$$

При этом интегрирование по θ и φ для двух последних членов в (5.7) дает нуль, и, следовательно, в пределах (5.10) мы имеем

$$\int_{\varepsilon} \square F\, d\omega = \int\int \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \int_{\varepsilon}^{\infty} \left\{ -\frac{\partial^2 F}{\partial u\, \partial v} + \frac{1}{u}\left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v}\right)\right\} u\, du. \tag{5.11}$$

Интеграл по u равен

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \left(-u \frac{\partial^2 F}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v}\right) du =$$

$$= \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\partial}{\partial u}\left(F - u\frac{\partial F}{\partial v}\right) du = \left[F - u\frac{\partial F}{\partial v}\right]_{u=\varepsilon}^{u=\infty} \tag{5.12}$$

при условии, что эти пределы существуют. Следовательно, если на бесконечности F стремится к нулю так, что вдоль светового конуса

$$F - u\frac{\partial F}{\partial v} \to 0 \quad \text{при} \quad u \to \infty, \tag{5.13}$$

то

$$\int \square F\, d\omega = -4\pi F_0, \tag{5.14}$$

где F_0 — значение F в вершине изотропного конуса. Это и есть искомый результат. Он имеет место для интегрирования по любой области изотропного конуса.

Переходя в случае плоского пространстна — времени к отысканию решения дифференциального уравнения

$$\square H = F, \tag{5.15}$$

можно рассмотреть в качестве пробного решения

$$H(P') = -\frac{1}{4\pi} \int F(P)\, d\omega, \tag{5.16}$$

где P — текущая точка в любой области изотропного конуса с вершиной в точке P'. Чтобы выполнить дифференцирование относительно P',

мы смещаем изотропный конус и находим разницу во вкладах, соответствующих равным элементам $d\omega$. Это эквивалентно дифференцированию по P под знаком интеграла. Следовательно, используя (5.14), мы получаем

$$\Box' H(P') = -\frac{1}{4\pi}\int \Box F(P)\, d\omega = F(P'), \tag{5.17}$$

откуда видно, что (5.16) действительно оказывается решением уравнения (5.15). Однако не следует думать, что это решение единственно, так как к H можно прибавлять любые волновые функции[1]), если только подобные добавочные члены не исключены с помощью какого-либо дополнительного условия (Боннор [751]).

§ 2. Линейное приближение

Сделаем теперь первый шаг в построении полей Эйнштейна, пользуясь методом, рассмотрённым в гл. IV, § 6. Нестрогие рассуждения о грубых приближениях зачастую притупляют лезвие математической логики, и возникает опасность упустить самые основные стороны вопроса. С другой стороны, цель вырисовывается гораздо более отчетливо при анализе скорее естественных в той или иной ситуации приближений. Мы встанем на компромиссный путь в том смысле, что вначале задача будет ставиться интуитивно, а затем мы будем возвращаться к ней снова, опираясь на более совершенный математический базис.

Представим себе описываемое малым тензором энергии T_{ij} распределение материи, порождающее слабое поле. Тогда существуют координаты x^i, такие, что

$$g_{ij} = \eta_{ij} + \gamma_{ij}, \tag{5.18}$$

где γ_{ij} и его частные производные — малые величины. Будем искать решение уравнений поля

$$G_{ij} = -\varkappa T_{ij}, \tag{5.19}$$

ограничиваясь, однако, линейным приближением, в котором квадратичными относительно γ_{ij} членами можно пренебречь. Итак, мы отбрасываем эти члены более высокого порядка малости, в результате чего G_{ij} сводится к H_{ij}, имеющему вид (4.167). Теперь задача сводится к решению системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Результаты решения будут изложены ниже. Пока же лучше всего обратиться к точной математике, поскольку, с одной стороны, точные результаты нам понадобятся в дальнейшем, а, с другой стороны, из них нетрудно получить качественное представление.

Пусть имеется четырехмерное пространство с координатами x^i, меняющимися от $-\infty$ до $+\infty$. Чтобы придать рассмотрению геометрический характер, снабдим это пространство метрикой Минковского $\eta_{ij} = \mathrm{diag}\,(1, 1, 1, -1)$, так что его можно рассматривать как плоское пространство — время и говорить об изотропных конусах в этом пространстве. Определим симметричные функции $A_{ij}(x)$, удовлетворяющие условию

$$\eta^{jk} A_{ij,k} = 0, \tag{5.20}$$

а также удовлетворяющие условиям непрерывности и обращения в нуль на бесконечности (т. е. при $r \to \infty$, где $r^2 = x^\alpha x^\alpha$), причем эти условия (не будем

[1]) В книге Синга [1175] на стр. 361—367 в качестве примера приведена простая волновая функция, убывающая на бесконечности как $1/r^2$ и не имеющая сингулярности.

утруждать себя их детальным описанием) таковы, что приведенные ниже операции можно выполнить тем путем, каким это нам потребуется. Ищем γ_{ij}, удовлетворяющие уравнению

$$H_{ij} = -\varkappa A_{ij}, \tag{5.21}$$

где H_{ij} определяется формулой (4.167). Удобно ввести линейный оператор $L_{ij}{}^{ab}$ с помощью соотношения

$$\begin{aligned} L_{ij}{}^{ab}X_{ab} = \eta^{ab}(X_{ab,\,ij} + X_{ij,\,ab} - X_{ai,\,bj} - X_{aj,\,bi}) - \\ - \eta_{ij}\eta^{ab}\eta^{cd}(X_{ab,\,cd} - X_{ac,\,bd}). \end{aligned} \tag{5.22}$$

Тогда (5.21) можно записать в виде

$$L_{ij}{}^{ab}\gamma_{ab} = -2\varkappa A_{ij}. \tag{5.23}$$

Это и есть те уравнения, которые нам предстоит исследовать. Мы подходим теперь к основному и очень любопытному месту в рассуждениях. Если положить для краткости

$$\eta^{ab}A_{ab} = A, \tag{5.24}$$

то (как легко проверить непосредственным вычислением) в силу (5.20)

$$L_{ij}{}^{ab}\left(A_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}A\right) = \eta^{ab}A_{ij,\,ab} = \Box A_{ij}, \tag{5.25}$$

где $\Box$ — оператор Даламбера. Это — ключ к решению задачи. Выберем в качестве пробного решения уравнения (5.23) функцию

$$\gamma_{ij}(P') = C\int\left(A_{ij} - \frac{1}{2}\eta_{ij}A\right)d\omega, \tag{5.26}$$

где C — константа, а интегрирование проводится по произвольной области изотропного конуса с вершиной в точке P', причем $d\omega$ элемент 2-объема (будем помнить, что мы работаем в плоском пространстве-времени). Подействуем теперь на (5.26) оператором L и продифференцируем его под знаком интеграла, что эквивалентно смещению изотропного конуса. С помощью (5.25) и (5.14) получаем

$$\begin{aligned} L_{ij}{}^{ab}\gamma_{ab}(P') = C\int L_{ij}{}^{ab}\left(A_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}A\right)d\omega = \\ = C\int \Box A_{ij}\,d\omega = -4\pi C A_{ij}(P'). \end{aligned} \tag{5.27}$$

Таким образом, (5.26) удовлетворяет уравнению (5.23) при условии, что

$$4\pi C = 2\varkappa, \quad C = \frac{\varkappa}{2\pi}. \tag{5.28}$$

Мы получаем, таким образом, следующее частное решение (5.21):

$$\gamma_{ij}(P') = \frac{\varkappa}{2\pi}\int\left(A_{ij} - \frac{1}{2}\eta_{ij}A\right)d\omega. \tag{5.29}$$

Это имеет место при любом $\varkappa$, Если, как и в (4.110), положить $\varkappa = 8\pi$, то

$$\gamma_{ij}(P') = 4\int\left(A_{ij} - \frac{1}{2}\eta_{ij}A\right)d\omega. \tag{5.30}$$

Это точный математический результат, который нам потребуется в дальнейшем. Возвращаясь же к качественному приближению, выпишем формулу (Эйнштейн [260], Паули [881], стр. 173)

$$g_{ij}(P') = \eta_{ij} + \frac{\varkappa}{2\pi}\int\left(T_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}T\right)_{\text{ret}} r^{-1}\,dx^1\,dx^2\,dx^3. \tag{5.31}$$

которую можно рассматривать как приближение к метрическому тензору, обусловленному тензором энергии T_{ij}. Здесь интегрирование проводится по всему пространству, а ret означает запаздывающее значение (как математики, мы могли бы с равным основанием использовать и опережающие значения, однако физик, усматривающий в данной формуле каузальный смысл, естественно, предпочитает запаздывающие значения).

§ 3. Статическое поле Эйнштейна в присутствии тел

Астроном-ньютонианец, не знающий теории относительности, проникает в тайны Вселенной благодаря своей могучей интуиции, приобретенной скорее благодаря тренировке живого воображения, нежели вследствие изучения научных проблем. Чтобы оценить гравитационное притяжение Земли Солнцем, он может представить себе, что оба тела покоятся, удерживаясь на расстоянии с помощью огромной подпорки. Оценим входящие в такую задачу величины, для чего сделаем несколько расчетов.

Воспользовавшись значениями масс, приведенными в сводке (4.137), и приняв расстояние от Земли до Луны равным $1{,}494 \cdot 10^{13}$ *см* $= 4{,}986 \cdot 10^{2}$ *сек*, находим, что

$$\left.\begin{array}{c}\text{Гравитационная сила}\\ \text{между Солнцем и Землей}\end{array}\right\} = 2{,}927 \cdot 10^{-22}. \tag{5.32}$$

Если бы эта сила уравновешивалась с помощью колонны, поперечное сечение которой равно поперечному сечению Земли (т. е. колонны радиуса $2{,}125 \cdot 10^{-2}$ *сек*), то давление в колонне было бы равно

$$p = 2{,}063 \cdot 10^{-19}\ сек^{-2}. \tag{5.33}$$

Это равно приблизительно $3 \cdot 10^{3}$ *атм*, так как давление в 1 *атм* равно приблизительно 1 *бар*, причем

$$1\ бар = 10^{6}\ дин \cdot см^{-2} = 7{,}423 \cdot 10^{-23}\ сек^{-2}. \tag{5.34}$$

Заметим, что малая величина силы в формуле (5.32) имеет физический смысл, так как эта величина безразмерна. Было бы бессмысленно утверждать, что давление (5.33) велико или, наоборот, что оно мало,— все зависит от того, с чем мы его сравниваем.

Переходя к теории относительности, интересно построить модель, в которой тела удерживаются в покое относительно друг друга с помощью материальной среды, заполняющей пространство между ними. Мы располагаем аппаратом, позволяющим строить такую модель, обходясь без каких-либо приближений, и мы построим ее. Выполняя точные вычисления[1]), мы исключаем возможность полемики о качестве наших рассуждений и получаем формулы, которые могут оказаться полезными в применении к задачам, представляющим более прямой физический интерес. В целях удобства геометрического описания будем считать x^i прямоугольными координатами в плоском пространстве — времени с метрикой η_{ij}. Возьмем некоторую функцию $f(x^1, x^2, x^3)$, произвольную с точностью до условий непрерывности и обращения в нуль на бесконечности. Что касается непрерывности, то на самом деле было бы достаточно взять f кусочно-непрерывной, но проще сначала предположить самую высокую степень гладкости, а случай разры-

---

[1]) Эти рассуждения можно рассматривать как точную трактовку (без использования изотермических координат) задачи, приближенное решение которой дал Кази ([142], стр. 153).

вов разобрать с помощью предельных переходов в заключительной части рассуждений. Определим A_{ij} следующим образом:

$$A_{44}=f, \tag{5.35}$$

а все другие компоненты равны нулю. Очевидно, уравнение (5.20) будет удовлетворено. Мы имеем

$$A=\eta^{ij}A_{ij}=-A_{44}=-f, \tag{5.36}$$

и из формулы (5.30) следует, что

$$\gamma_{\alpha\beta}(P')=\delta_{\alpha\beta}\varphi, \quad \gamma_{\alpha4}(P')=0, \quad \gamma_{44}(P')=\varphi, \tag{5.37}$$

где

$$\varphi=2\int f\,d\omega. \tag{5.38}$$

Здесь интегрирование проводится по области прошедшего на изотропном конусе с вершиной в P'. Эквивалентно можно записать

$$\varphi=2\int r^{-1}f\,dv, \tag{5.39}$$

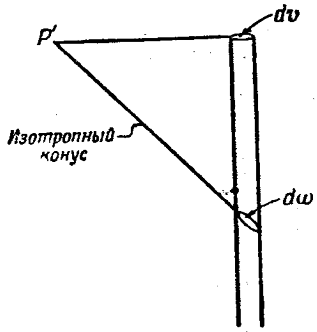
где $dv=dx^1dx^2dx^3$, r — пространственное расстояние от P', как показано на фиг. 58, а интегрирование проводится по $x^4=x^4(P')$.

Обращаясь к методу итераций, описанному в гл. IV, § 6, положим теперь

$$g_{ij}=\eta_{ij}+\gamma_{ij}=\eta_{ij}+\delta_{ij}\varphi \tag{5.40}$$

и исследуем свойства физического пространства с данной метрикой, вычисляя, в частности, тензор энергии по формуле

$$T_{ij}=-\varkappa^{-1}G_{ij}, \quad \varkappa=8\pi. \tag{5.41}$$



Фиг. 58. Интеграл для потенциала.

В последующих вычислениях можно не придавать особого значения тому, что φ имеет вид (5.38) или (5.39). В действительности, мы имеем дело с метрической формой, которую можно записать в виде

$$\Phi=(1+\varphi)(dx^2+dy^2+dz^2)-(1-\varphi)\,dt^2, \tag{5.42}$$

где φ — произвольная функция (x, y, z). Однако для правильной сигнатуры будем отдавать себе отчет в том, что

$$-1<\varphi<1. \tag{5.43}$$

Пока никаких предположений о малости φ не делается; это откладывается до получения (5.53).

Обозначая частные производные φ с помощью индексов, имеем

$$\left.\begin{aligned}
&g_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}(1+\varphi), \quad g_{\alpha4}=0, \quad g_{44}=-(1-\varphi),\\
&g^{\alpha\beta}=\frac{\delta_{\alpha\beta}}{1+\varphi}, \qquad g^{\alpha4}=0, \quad g^{44}=-\frac{1}{1-\varphi},\\
&\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2(1+\varphi)}(\delta_{\alpha\gamma}\varphi_\beta+\delta_{\beta\gamma}\varphi_\alpha-\delta_{\alpha\beta}\varphi_\gamma),\\
&\Gamma^{4}_{\alpha4}=-\frac{\varphi_\alpha}{2(1-\varphi)}, \quad \Gamma^{\alpha}_{44}=-\frac{\varphi_\alpha}{2(1+\varphi)},
\end{aligned}\right\} \tag{5.44}$$

а другие Г-символы равны нулю (во всех этих вычислениях величины, содержащие индекс 4 один раз, обращаются в нуль). Важно вычислить

тензор Римана, так как он описывает гравитационное поле; из (1.88) находим

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\frac{1}{2}(\delta_{\beta\delta}\varphi_{\alpha\gamma} + \delta_{\alpha\gamma}\varphi_{\beta\delta} - \delta_{\beta\gamma}\varphi_{\alpha\delta} - \delta_{\alpha\delta}\varphi_{\beta\gamma}) + \frac{3}{4(1+\varphi)}(\delta_{\beta\delta}\varphi_\alpha\varphi_\gamma + \delta_{\alpha\gamma}\varphi_\beta\varphi_\delta - \delta_{\alpha\delta}\varphi_\beta\varphi_\gamma - \delta_{\beta\gamma}\varphi_\alpha\varphi_\delta) - \frac{1}{4(1+\varphi)}\varphi_\varrho\varphi_\varrho(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}),$$

$$R_{4\beta\gamma4} = \frac{1}{2}\varphi_{\beta\gamma} - \frac{1-3\varphi}{4(1-\varphi^2)}\varphi_\beta\varphi_\gamma + \frac{1}{4(1+\varphi)}\delta_{\beta\gamma}\varphi_\varrho\varphi_\varrho. \qquad (5.45)$$

Для тензора Риччи и скалярной кривизны получаем

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2(1+\varphi)}\delta_{\alpha\beta}\Delta\varphi - \frac{\varphi}{1-\varphi^2}\varphi_{\alpha\beta} - \frac{1-2\varphi+3\varphi^2}{2(1-\varphi^2)^2}\varphi_\alpha\varphi_\beta - \frac{1}{2(1+\varphi)(1-\varphi^2)}\delta_{\alpha\beta}\varphi_\varrho\varphi_\varrho,$$

$$R_{\alpha4} = 0, \qquad (5.46)$$

$$R_{44} = \frac{\Delta\varphi}{2(1+\varphi)} + \frac{\varphi_\varrho\varphi_\varrho}{2(1+\varphi)(1-\varphi^2)},$$

$$R = \frac{1-3\varphi}{(1+\varphi)(1-\varphi^2)}\Delta\varphi - \frac{5-4\varphi+3\varphi^2}{2(1+\varphi)(1-\varphi^2)^2}\varphi_\varrho\varphi_\varrho,$$

где $\varphi_{\varrho\varrho} = \Delta\varphi$. Следовательно, тензор Эйнштейна имеет вид

$$G_{\alpha\beta} = \frac{\varphi}{1-\varphi^2}(\delta_{\alpha\beta}\Delta\varphi - \varphi_{\alpha\beta}) - \frac{1-2\varphi+3\varphi^2}{2(1-\varphi^2)^2}\varphi_\alpha\varphi_\beta + \frac{3-2\varphi+3\varphi^2}{4(1-\varphi^2)^2}\delta_{\alpha\beta}\varphi_\varrho\varphi_\varrho,$$

$$G_{\alpha4} = 0, \qquad (5.47)$$

$$G_{44} = \frac{1-\varphi}{(1+\varphi)^2}\Delta\varphi - \frac{3}{4}\frac{1-\varphi}{(1+\varphi)^3}\varphi_\varrho\varphi_\varrho.$$

Тензор энергии задается тогда посредством (5.41), а главные направления и собственные значения определяются из уравнения

$$T_{ij}\lambda^j = \theta g_{ij}\lambda^j, \qquad (5.48)$$

аналогично (4.140). Совершенно очевидно, что для трех из этих главных векторов компонента $\lambda^4 = 0$ (так как $G_{\alpha4} = 0$), причем главные натяжения определяются соответственными значениями θ. Что же касается плотности μ, то мы имеем $\theta = -\mu$ и

$$\mu = -\frac{T_{44}}{g_{44}} = \varkappa^{-1}g^{44}G_{44} = -\frac{1}{8\pi}\frac{1}{(1+\varphi)^2}\left(\Delta\varphi - \frac{3}{4}\frac{\varphi_\varrho\varphi_\varrho}{1+\varphi}\right). \qquad (5.49)$$

На этом вычисления, основанные на метрике (5.42), заканчиваются. Обратимся теперь к формуле (5.39), согласно которой

$$\varphi = 2\int r^{-1}f\,dv, \quad \Delta\varphi = -8\pi f. \qquad (5.50)$$

Заметим, что $^1/_2\varphi$ представляет собой ньютоновский потенциал для «плотности» f. Эту плотность не следует смешивать с истинной плотностью μ построенного нами физического пространства; μ связана с f соотношением

$$\mu = \frac{f}{(1+\varphi)^2} + \frac{3}{32\pi}\frac{\varphi_\varrho\varphi_\varrho}{(1+\varphi)^3}. \qquad (5.51)$$

Приведенная выше формула справедлива и в том случае, когда f имеет поверхности разрыва, так как условие соединения заключается в непре-

рывности $G_{\alpha\beta}n^{\beta}$, а это здесь выполняется, ибо при интегрировании по некоторой замкнутой поверхности в трехмерном евклидовом пространстве

$$\int (\delta_{\alpha\beta}\Delta\varphi - \varphi_{\alpha\beta})\, n^{\beta}\, dS = 0. \tag{5.52}$$

Теперь создается возможность изучить релятивистскую модель, в которой тела удерживаются покоящимися в окружающей их среде. Положим $f = 0$ повсюду во внешней области. Но поскольку формулы оказываются при этом несколько громоздкими, мы прибегнем к приближению, рассматривая φ и его производные как малые величины и оставляя лишь члены до второго порядка малости. В этом случае (5.47) и (5.51) упрощаются:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &= \varphi\,(\delta_{\alpha\beta}\Delta\varphi - \varphi_{\alpha\beta}) - \frac{1}{2}\varphi_{\alpha}\varphi_{\beta} + \frac{3}{4}\delta_{\alpha\beta}\varphi_{\varrho}\varphi_{\varrho},\\ G_{\alpha 4} &= 0,\\ G_{44} &= (1 - 3\varphi)\,\Delta\varphi - \frac{3}{4}\varphi_{\varrho}\varphi_{\varrho},\\ \mu &= f\,(1+\varphi)^{-2} + \frac{3}{32\pi}\varphi_{\varrho}\varphi_{\varrho}, \end{aligned} \tag{5.53}$$

так что отношение μ/f оказывается приблизительно равным единице. На границах тел имеют место разрывы, так как вне тел $\Delta\varphi = 0$. Исследуем плотность μ_e среды, окружающей тело. Если тело обладает плотностью μ_i, то мы (приближенно) имеем

$$\frac{\mu_e}{\mu_i} = \frac{3}{32\pi}\frac{\varphi_{\varrho}\varphi_{\varrho}}{\mu_i}. \tag{5.54}$$

Если массу тела определить как

$$m = \int \mu\, dv \sim \int f\, dv, \tag{5.55}$$

то в случае двух сфер с массами m и m' значение φ в некоторой внешней точке равно

$$\varphi = \frac{2m}{r} + \frac{2m'}{r'} = 2V, \tag{5.56}$$

где r, r' — расстояния от центров этих сфер до выбранной точки, а V — ньютоновский потенциал. (Обратим внимание на множитель 2; в теории относительности «магическим числом», связанным с телом, оказывается $2\,m/r$, а не m/r, как в ньютоновской теории гравитации.) Переходя к оценке отношения (5.54) в случае, когда роль рассматриваемых тел выполняют Солнце и Земля, заметим, что на поверхности каждого из них значение $\varphi_{\varrho}\,\varphi_{\varrho}$ очень близко к значению, обусловленному лишь одним (соответствующим) телом. Таким образом,

$$\frac{\mu_e}{\mu_i} = \frac{3}{32\pi}\left(\frac{2m}{r^2}\right)^2 \frac{4\pi r^3}{3m} = \frac{1}{2}\frac{m}{r}, \tag{5.57}$$

где m — масса тела, а r — его радиус. Подставив сюда соответствующие численные значения, мы получим следующие величины отношений внешней плотности (плотности окружающей среды) к внутренней:

$$\begin{aligned} &\text{для Солнца:} && 1{,}061\cdot 10^{-6},\\ &\text{для Земли:} && 3{,}480\cdot 10^{-10},\\ &\text{для Луны:} && 1{,}563\cdot 10^{-11}. \end{aligned} \tag{5.58}$$

Итак, по сравнению с обычными плотностями плотность среды, окружающей тела, очень мала.

Для тензора напряжений $S_{\alpha\beta}$ как внутри, так и вне тела произвольной формы согласно (5.53) имеем

$$8\pi S_{\alpha\beta}=G_{\alpha\beta}=\varphi\,(\delta_{\alpha\beta}\Delta\varphi-\varphi_{\alpha\beta})-\frac{1}{2}\varphi_\alpha\varphi_\beta+\frac{3}{4}\,\delta_{\alpha\beta}\varphi_\varrho\varphi_\varrho, \qquad (5.59)$$

следовательно,

$$8\pi S_{\alpha\beta,\beta}=\frac{1}{2}\,\varphi_\alpha\Delta\varphi. \qquad (5.60)$$

Этот простой результат приводит к удивительной связи между нашей релятивистской и ньютоновской моделями. В самом деле, результирующую «силу», действующую на тело, можно подсчитать, интегрируя $S_{\alpha\beta}$ по поверхности тела. Для этой «силы» мы получаем

$$\int S_{\alpha\beta}n^\beta\,d\sigma=\int S_{\alpha\beta,\beta}\,dv=\frac{1}{16\pi}\int\varphi_\alpha\Delta\varphi\,dv=-\frac{1}{2}\int\varphi_\alpha f\,dv=-\int\mu V_\alpha\,dv, \qquad (5.61)$$

где V — ньютоновский потенциал. В теории Ньютона это значение в точности совпадает с силой, которую необходимо приложить к телу для того, чтобы удержать его в состоянии покоя, уравновешивая гравитационное притяжение со стороны других тел.

Мы видим, что на бесконечности напряжение стремится к нулю как r^{-4}. Для системы «Солнце — Земля» можно, рассмотрев задачу об удерживающей их подпорке из окружающей среды, вычислить с помощью (5.59) среднее нормальное давление на поверхности Земли; результат получается следующий:

$$\bar{p}=5{,}103\cdot 10^{-15}\ \textit{сек}^{-2}. \qquad (5.62)$$

Эта величина намного превышает давление (5.33), как и следовало ожидать, ввиду того, что сила (5.32) вызвана изменениями напряжений вдоль поверхности Земли. Поскольку в этом параграфе мы забрели, пожалуй, довольно далеко в сторону от строгих задач физической реальности, имеет смысл сделать резюме и подчеркнуть некоторые выводы:

1. Общая теория относительности страдает сложностью и громоздкостью формул, поэтому полезно располагать формулами для R_{ijkm} и G_{ij} при метрической форме вида (5.42)[1].

2. Точные поля Эйнштейна простого вида встречаются редко. Поэтому всегда желательно иметь перед собой пример, даже если его физический прототип в природе не существует[2].

3. Для рассмотренной нами модели Вселенной не существует критерия единственности, если не считать критерия простоты. Простейшую модель Вселенной можно получить, комбинируя g- и T-методы, как описано в гл. IV, § 6.

4. Формула (5.31) для запаздывающего потенциала (или линейное приближение) столь привлекательно проста, что возникает соблазн применить ее, не углубляясь в критический анализ. Пользуясь ею как первым шагом на пути построения точных решений, можно скорее оценить и ее ценность и ограниченность. Неучет квадратичных членов чреват опасностью. Отбро-

[1]) В последующих разделах эти тензоры вычислены при различных метриках. Точные формулы для G^i_j в случае ортогональной метрики общего вида (g_{ij} диагональна) можно найти у Толмана ([1270], стр. 253) и Мак Витти ([732], стр. 68). Однако выигрыш в общности следует сообразовывать с ущербом от уменьшения четкости интерпретации.

[2]) В настоящее время можно указать целый ряд решений уравнений поля Эйнштейна в замкнутой форме, найденных с помощью методов теории групп, хотя и не получивших до сих пор, за редким исключением, физической интерпретации (Петров [903], гл. IV, V, VIII). — *Прим. ред.*

сив их, мы в (5.59) имели бы $S_{\alpha\beta} = 0$, т. е. тела оказались бы в состоянии взаимного покоя при отсутствии напряжений в окружающей их среде. Это противоречило бы самым элементарным следствиям гравитационного притяжения.

§ 4. Две леммы

В качестве предварительной подготовки к обсуждению проблемы Коши в следующем параграфе установим две леммы (Лишнеровиц [671], стр. 31).

Пусть W_{ij} — какое-нибудь *симметричное* тензорное поле в пространстве — времени с метрическим тензором g_{ij}.

Мы определим *сопряженное* тензорное поле с помощью соотношений[1])

$$W^*_{ij} = W_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} W, \quad W = g^{ab} W_{ab}. \tag{5.63}$$

Поскольку $g_{ij}g^{ij} = 4$, то мы имеем

$$W^* = -W, \tag{5.64}$$

и, следовательно,

$$W_{ij} = W^*_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} W^*, \tag{5.65}$$

так что символ «*», рассматриваемый как оператор, представляет собой корень квадратный из единицы в том смысле, что

$$W^{**}_{ij} = W_{ij}. \tag{5.66}$$

Лемма 1. Если $g^{44} \neq 0$, то смешанные компоненты W^i_j связаны с компонентами $W^*_{\alpha\beta}$ и W^4_k линейным соотношением

$$W^i_j = A^{i\alpha\beta}_j W^*_{\alpha\beta} + B^{ik}_j W^4_k, \tag{5.67}$$

где коэффициенты $A^{i\alpha\beta}_j$ и B^{ik}_j являются линейной и квадратичной функциями тензора g^{ab}, деленного на g^{44}. (Греческие индексы принимают значения 1, 2, 3.)

Доказательство состоит в следующем. Наш план заключается в том, чтобы использовать смешанные компоненты тензора (5.65), т. е.

$$W^i_j = W^{*i}_j - \frac{1}{2} \delta^i_j W^*. \tag{5.68}$$

Это приводит к соотношению

$$W^i_j = \left(g^{ia}\delta^b_j - \frac{1}{2} \delta^i_j g^{ab} \right) W^*_{ab}. \tag{5.69}$$

Для $i = 4$ получаем

$$W^4_j = \left(g^{4a}\delta^b_j - \frac{1}{2} \delta^4_j g^{ab} \right) W^*_{ab}, \tag{5.70}$$

а для $j = \gamma$

$$W^4_\gamma = g^{4a} W^*_{a\gamma} = g^{4\alpha} W^*_{\alpha\gamma} + g^{44} W^*_{4\gamma}, \tag{5.71}$$

так что

$$W^*_{4\gamma} = -(g^{44})^{-1} (g^{4\alpha} W^*_{\alpha\gamma} - W^4_\gamma). \tag{5.72}$$

Полагая в (5.70) $j = 4$, получаем

$$W^4_4 = g^{4a} W^*_{a4} - \frac{1}{2} g^{ab} W^*_{ab}; \tag{5.73}$$

[1]) Звездочка используется в (4.35) и (10.7) для обозначения *дуального* тензора. Однако здесь не должно возникать никаких недоразумений.

Здесь происходят важные сокращения, после которых

$$W_4^4 = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} W_{\alpha\beta}^* + \frac{1}{2} g^{44} W_{44}^*, \tag{5.74}$$

и, следовательно,

$$W_{44}^* = (g^{44})^{-1} (g^{\alpha\beta} W_{\alpha\beta}^* + 2W_4^4). \tag{5.75}$$

Теперь (5.69) можно записать в виде

$$W_j^i = C_j^{i\alpha\beta} W_{\alpha\beta}^* + C_j^{i\alpha} W_{4\alpha}^* + C_j^i W_{44}^*. \tag{5.76}$$

После подстановки сюда (5.72) и (5.75) получим выражение вида (5.67), и, таким образом, лемма будет установлена. Необходимость в требовании $g^{44} \neq 0$ очевидным образом следует из (5.72) и (5.75).

Лемма 2. Пусть S_4 область пространства — времени с $g^{44} \neq 0$ и пусть S_3 — трехмерное подпространство, определяемое уравнением $x^4 = 0$. Тогда три следующих утверждения математически эквивалентны:

(А) $W_{ij} = 0$ в S_4.

(Б) $W_{\alpha\beta}^* = 0$ и $W_j^4 = 0$ в S_4.

(В) $W_{\alpha\beta}^* = 0$ и $W_{j|i}^i = 0$ в S_4 при $W^4 = 0$ в S_3.

Переходя к доказательству этой леммы, прежде всего заметим, что, очевидно, (А) $\Rightarrow$ (Б). В силу леммы 1 (Б) $\Rightarrow$ (А). Следовательно, (А) и (Б) эквивалентны. Совершенно очевидно, что (Б) $\Rightarrow$ (В). Остается доказать, что (В) $\Rightarrow$ (Б).

Предположим, что выполняется (В). Тогда в силу леммы 1 и первого условия в (В)

$$W_j^i = B_j^{ik} W_k^4. \tag{5.77}$$

В силу второго условия в (В) имеем

$$W_{j|i}^i = W_{j,4}^4 + W_{j,\alpha}^\alpha + \Gamma_{i\alpha}^i W_j^\alpha - \Gamma_{ij}^\alpha W_\alpha^i = 0. \tag{5.78}$$

С помощью (5.77) это можно записать в виде

$$W_{j,4}^4 = E_j^{k\alpha} W_{k,\alpha}^4 + F_j^k W_k^4, \tag{5.79}$$

где коэффиценты $E_j^{k\alpha}$ и F_j^k — функции метрического тензора и его производных. Ввиду последнего условия в (В) основная теорема для дифференциальных уравнений в частных производных гласит, что $W_j^4 = 0$ не только в S_3, но и в S_4. Итак, (В) $\Rightarrow$ (Б) и лемма доказана.

§ 5. Проблема Коши в нормальных гауссовых координатах

Лишь в очень редких случаях можно надеяться получить решения уравнений поля, которые были бы точными, полностью определенными и имели физический смысл[1]). Поэтому мы вынуждены прибегать к отысканию решений с помощью разложения в ряды по степеням одной из координат (x^4), что тесно связано с теоремами о существовании решений, когда начальные данные определены на гиперповерхности $x^4 = 0$. В связи с этим мы приходим к проблеме Коши (Лишнерович [671], Фам Мау Кан [910, 913], Фурэ-Брюа [355—359]).

[1]) Этот пессимистический прогноз нельзя считать состоятельным. Методы теории групп в общей теории относительности (Петров [903], гл. IV, VI, VIII) дают многочисленные классы точных формальных решений, которые допускают наложение некоторых физических условий. — *Прим. ред.*

Уравнения поля

$$G_{ij} = -\varkappa T_{ij}, \tag{5.80}$$

где

$$\varkappa = 8\pi,$$

представляют собой систему 10 уравнений с 20 неизвестными g_{ij}, T_{ij}. Уравнения сохранения

$$T^{ij}_{|j} = 0 \tag{5.81}$$

не независимы, а вытекают из (5.80). Чтобы математическую задачу сделать определенной, 10 из 20 величин нужно задать во всем пространстве—времени, тогда другие 10 величин можно найти, решая уравнения (5.80). В гл. IV, § 6 мы обсуждали g- и T-методы. В первом из них задаются g_{ij}, а T_{ij} вычисляются просто с помощью дифференцирования; однако вполне вероятно, что на этом пути могут получиться отрицательные плотности, а также растяжения в точках, где из физических соображений были бы предпочтительнее сжатия. T-метод обещает больший успех. Но с точки зрения проблемы Коши оказывается наиболее целесообразным объединить оба эти метода. В нижеследующем анализе проблемы Коши по существу будет сделано следующее: мы используем нормальные гауссовы координаты, так что, как и в (1.213),

$$g_{\alpha 4} = 0, \quad g_{44} = -1, \tag{5.82}$$

если считать параметрические линии x^4 временноподобными и задать $T_{\alpha\beta}$ во всем пространстве — времени. Таким образом, 10 величин заданы, а для нахождения других 10 величин ($g_{\alpha\beta}$, T_{i4}) необходимо решить 10 уравнений (5.80). Такой выбор подсказан структурой системы дифференциальных уравнений, если взглянуть на нее с точки зрения проблемы Коши, помня, что начальные данные взяты на гиперповерхности $x^4 = 0$. Дадим для ясности следующую классификацию величин.

Величины, заданные в пространстве — времени:

$$g_{i4}, \quad T_{\alpha\beta}. \tag{5.83}$$

Неизвестные:

$$g_{\alpha\beta}, \quad T_{i4}. \tag{5.84}$$

Определим W_{ij} с помощью соотношения[1])

$$W_{ij} = G_{ij} + \varkappa T_{ij}. \tag{5.85}$$

Тогда, как и в (5.65), для сопряженного тензора имеем

$$W^*_{ij} = R_{ij} + \varkappa T^*_{ij}, \tag{5.86}$$

где

$$T^*_{ij} = T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} T, \quad T = g^{ab} T_{ab}, \tag{5.87}$$

так как

$$G^*_{ij} = R_{ij}, \quad R^*_{ij} = G_{ij}. \tag{5.88}$$

Уравнения поля (5.80) теперь гласят:

$$W_{ij} = 0. \tag{5.89}$$

Замечая, что в силу (5.82)

$$g^{\alpha 4} = 0, \quad g^{44} = -1, \tag{5.90}$$

---

[1]) Последующие общие рассуждения можно было бы провести и с учетом космологической константы Λ [см. (4.108)]; в этом случае мы записали бы

$$W_{ij} = G_{ij} - \Lambda g_{ij} + \varkappa T_{ij}.$$

обратимся к лемме II в § 4. Она утверждает, что уравнения (5.89) эквивалентны следующим:

$$W^{*}_{\alpha\beta}=0, \quad W^{i}_{j|i}=0, \tag{5.91}$$

при условии, что

$$W^{4}_{i}=0 \quad \text{для} \quad x^{4}=0. \tag{5.92}$$

Это эквивалентно уравнениям

$$R_{\alpha\beta}+\varkappa T^{*}_{\alpha\beta}=0, \quad T^{i}_{j|i}=0, \tag{5.93}$$

с условиями совместности

$$G_{4i}+\varkappa T_{4i}=0 \quad \text{для} \quad x^{4}=0. \tag{5.94}$$

Приступая к рассмотрению проблемы Коши для системы (5.93), заметим, что с помощью (1.217) при $\varepsilon=-1$ первое уравнение (5.93) можно записать в форме

$$g_{\alpha\beta,\,44}=2\bar{R}_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}Ag_{\alpha\beta,\,4}+g^{\mu\nu}g_{\alpha\mu,\,4}g_{\beta\nu,\,4}+2\varkappa T^{*}_{\alpha\beta}, \tag{5.95}$$

где $\bar{R}_{\alpha\beta}$ — трехмерный тензор Риччи для гиперповерхности $x^{4}=0$, а

$$A=g^{\mu\nu}g_{\mu\nu,\,4}, \tag{5.96}$$

тогда как второе уравнение (5.93) дает

$$T_{4j,\,4}=-T^{4}_{j,\,4}=T^{\alpha}_{j,\,\alpha}+\Gamma^{i}_{\alpha i}T^{\alpha}_{j}-\Gamma^{\alpha}_{ij}T^{i}_{\alpha}. \tag{5.97}$$

Зададим теперь в качестве начальных данных Коши на гиперповерхности $x^{4}=0$ значения 16 величин:

$$g_{\alpha\beta}, \quad g_{\alpha\beta,\,4}, \quad T_{i4}, \tag{5.98}$$

помня, однако, что их следует выбрать так, чтобы удовлетворялись условия (5.94), которые в силу (1.219) можно записать в следующем виде: для $x^{4}=0$

$$\begin{gathered} A_{,\alpha}-D^{\sigma}g_{\alpha\sigma,\,4}+2\varkappa T_{\alpha 4}=0, \\ \bar{R}-\frac{1}{4}A^{2}+\frac{1}{4}B+2\varkappa T_{44}=0, \end{gathered} \tag{5.99}$$

где $\bar{R}$ — скалярная кривизна гиперповерхности $x^{4}=0$, а

$$B=g^{\mu\nu}g^{\varrho\sigma}g_{\mu\varrho,\,4}\,g_{\nu\sigma,\,4}. \tag{5.100}$$

Поскольку (5.95) и (5.97) вполне определенным образом задают значения производных от данных Коши

$$g_{\alpha\beta,\,44}, \quad T_{i4,\,4} \tag{5.101}$$

через сами данные Коши, то, как известно, решение в окрестности $x^{4}=0$ существует при условии, что данные Коши удовлетворяют условиям (5.99); это обстоятельство с физической точки зрения представляется наиболее важным так как физическое требование положительной определенности энергии (4.146а), т. е.

$$T_{44}>0, \tag{5.102}$$

связано с условиями (5.99). Если условия (5.99) удовлетворены, то решение имеет вид

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= (g_{\alpha\beta})_0 + x^4 (g_{\alpha\beta,\,4})_0 + \frac{1}{2}(x^4)^2 (g_{\alpha\beta,\,44})_0 + \ldots, \\ T_{4j} &= (T_{4j})_0 + x^4 (T_{4j,\,4})_0 + \ldots, \end{aligned} \qquad (5.103)$$

где коэффициентами будут либо данные Коши, либо величины, выраженные через данные Коши с помощью (5.95) и (5.97). Если бы понадобилось вычислить более высокие члены разложения, мы могли бы выразить их через данные Коши, дифференцируя (5.95) и (5.97) и подставляя в полученные выражения величины, определенные из самих уравнений. Следует отдавать себе ясный отчет в том, что способ разграничения входящих в теорию величин на (5.83) и (5.84) представляет собой не более, чем математический прием, не имеющий физической мотивировки. Приведенные здесь рассуждения применимы к любому полю Эйнштейна, т. е. к любому набору 20 величин g_{ij}, T_{ij}, коль скоро они удовлетворяют уравнениям поля (5.80) и, разумеется, условиям гладкости (не обсудив которых мы еще не можем считать анализ исчерпывающим; обсуждение их лучше всего провести на примере тех специальных случаев, когда имеет место нарушение гладкости, т. е. нарушение самих этих условий). Приведенное выше рассмотрение проблемы Коши применимо, в частности, к полям в вакууме, для которых уравнения поля имеют вид

$$G_{ij} = 0. \qquad (5.104)$$

В этом случае необходимо просто исключить из рассмотрения члены T_{ij}. Таким образом, в нормальных гауссовых координатах уравнение (5.95) принимает вид

$$g_{\alpha\beta,\,44} = 2\bar{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} A g_{\alpha\beta,\,4} + g^{\mu\nu} g_{\alpha\mu,\,4} g_{\beta\nu,\,4}. \qquad (5.105)$$

Данными Коши теперь оказываются $g_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta,\,4}$ на гиперповерхности $x^4 = 0$. Эти данные должны удовлетворять уравнениям (5.99) при $T_{ij} = 0$. Если положить

$$\psi_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta,\,4} \quad \text{для} \quad x^4 = 0, \qquad (5.106)$$

то условия совместности (5.99) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \psi^{\beta}_{\beta\|\alpha} &= \psi^{\beta}_{\alpha\|\beta}, \\ (\psi^{\beta}_{\beta})^2 - \psi^{\alpha}_{\beta}\psi^{\beta}_{\alpha} &= 4\bar{R}. \end{aligned} \qquad (5.107)$$

Эти условия имеют вид уравнений в трехмерном подпространстве $x^4 = 0$, так что число независимых переменных равно трем (x^α); метрическим тензором оказывается $g_{\alpha\beta}$, а поднятие индексов производится с помощью $g^{\alpha\beta}$. Две параллельные черточки в формуле (5.107) означают ковариантное дифференцирование, в процессе которого используются символы Кристоффеля

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = g^{\alpha\varrho} [\beta\gamma,\, \varrho]. \qquad (5.108)$$

Уравнения (5.107) следует считать исключительно важными, так как на них строится общая теория *гравитационных волн* (см. гл. IX). Как только они разрешены относительно 12 величин $g_{\alpha\beta}$, $\psi_{\alpha\beta}$, поле в окрестности $x^4 = 0$ полностью определяется из уравнений (5.105). Но вряд ли можно говорить о *решении уравнений* (5.107), так как последние существенно недоопределены: мы имеем всего 4 уравнения для 12 неизвестных. Создается впечатление, что удовлетворить этим уравнениям не составляет никакого труда, но на самом деле это далеко не так.

Существуют два способа коренного упрощения условий непрерывности (5.107). Первое, что можно сделать[1]), это положить $\psi_{\alpha\beta}=0$, так чтобы оставалось удовлетворить только условию $\overline{R}=0$. Если $g'_{\alpha\beta}$—добавочная метрика в подпространстве $x^4=0$, конформно связанная с $g_{\alpha\beta}$ соотношением[2]) $g_{\alpha\beta}=\varphi^4 g'_{\alpha\beta}$, то условие совместности примет вид

$$\Delta'\varphi+\frac{1}{8}\overline{R}'\varphi=0, \tag{5.109}$$

где Δ' — тензорный оператор Лапласа, а $\overline{R}'$ — скалярный инвариант, причем и тот и другой вычислены для метрического тензора $g'_{\alpha\beta}$.

Второй способ состоит в следующем. Допустим, что подпространство $x^4=0$ имеет плоскую внутреннюю геометрию, так что $\overline{R}=0$, и можно пользоваться прямоугольными декартовыми координатами x^α. Условия непрерывности (5.107) теперь примут вид

$$\psi_{\beta\beta,\,\alpha}=\psi_{\alpha\beta,\,\beta},\quad (\psi_{\beta\beta})^2=\psi_{\alpha\beta}\psi_{\alpha\beta}. \tag{5.110}$$

Недоопределенность все еще имеет место: 4 уравнения для 6 неизвестных. Но если теперь потребовать, чтобы $\psi_{\alpha\beta}$ имел вид $\psi_{\alpha\beta}=u_\alpha u_\beta$, где u_α— некоторое векторное поле, то недоопределенность исчезает, ибо последнее уравнение в (5.110) удовлетворяется тождественно, и остаются три следующих уравнения для u_α:

$$(u_\beta u_\beta)_{,\,\alpha}=u_\alpha u_{\beta,\beta}+u_{\alpha,\,\beta}u_\beta. \tag{5.111}$$

Поскольку теперь мы работаем в трехмерном евклидовом пространстве, очень результативным оказывается гидродинамический подход к этим уравнениям, при котором u_α рассматривается как скорость жидкости в установившемся движении; при этом $u_\beta u_\beta$ есть квадрат скорости, а $u_{\alpha\beta}u_\beta$—ускорение. Уравнения (5.111) удовлетворяются, если жидкости сообщить скорость в направлении оси x^3 и одновременное вращение около этой оси. Положим

$$u_1=-\omega(r)x^2,\quad u_2=\omega(r)x^1,\quad u_3=u_3(r),\quad r^2=(x^1)^2+(x^2)^2, \tag{5.112}$$

где ω — любая гладкая функция, достаточно быстро убывающая на бесконечности. Тогда из (5.111) следует единственное уравнение

$$\frac{d}{dr}(\omega^2r^2+u_3^2)=-\omega^2r, \tag{5.113}$$

которому можно удовлетворить, приняв

$$u_3^2=C-\omega^2r^2-\int\limits_0^r\omega^2r\,dr, \tag{5.114}$$

где константа C выбрана так, чтобы величина u_3^2 была положительной для всех значений r. Определив, таким образом, u_α, удовлетворяющие (5.111) и отсюда — $\psi_{\alpha\beta}$, удовлетворяющие (5.109), мы получаем требуемые начальные значения, которые можно использовать при решении уравнений поля (5.105). Разумеется, нельзя пытаться упростить эти уравнения путем подстановки в них величин, соответствующих только гиперповерхности $x^4=0$. Отметим, однако, что это начальное значение равно

$$(g_{\alpha\beta,\,44})_0=-\frac{1}{2}\psi_{\mu\mu}\psi_{\alpha\beta}+\psi_{\alpha\mu}\psi_{\beta\mu}=\frac{1}{2}u_\alpha u_\beta u_\mu u_\mu. \tag{5.115}$$

---

[1]) Этот метод приводит к решениям, *симметричным во времени* в том смысле, что ряд (5.103) для $g_{\alpha\beta}$ содержит лишь четные степени x^4 (Фуре-Брюа [359], Вебер и Уиллер [1347], Брилл [87, 88], Араки [7]).

[2]) Обратим внимание на *четвертую* степень φ. Вычисления аналогичны следующим за (8.36), но в трехмерном, а не в четырехмерном пространстве.

Из вида подстановки (5.112) видно, что рассмотренные нами гравитационные волны можно рассматривать как цилиндрические (см. гл. IX, § 3). Это — волны весьма специального вида. Более подробное изучение условий непрерывности (5.107) привело бы к другим, более интересным, типам волн.

§ 6. Проблема Коши в нормальных гауссовых координатах для случая идеальной жидкости

В предыдущем параграфе мы рассмотрели проблему Коши для среды, описываемой тензором энергии T_{ij}, и могло создаться впечатление, что приведенный анализ применим, в частности, и к случаю идеальной жидкости, когда, согласно (4.84),

$$T_{ij}=(\mu+p)V_iV_j+pg_{ij}. \qquad (5.116)$$

Однако это не так. Существенная особенность тензора (5.116) заключается в том, что T_{ij} вырожден и имеет три одинаковых собственных значения. В предыдущем параграфе мы задавали тензор $T_{\alpha\beta}$ в пространстве — времени произвольным образом, а затем находили T_{i4} из уравнений поля. Нет никаких оснований считать, что при такой процедуре вырождение T_{ij} сохраняется. В действительности, изложенный выше метод оказывается в случае идеальной жидкости вообще непригодным, и необходимо начать все рассмотрение сначала, взяв из предыдущего анализа только то, что применимо к случаю идеальной жидкости. Такая программа вполне себя оправдывает, так как эта задача действительно имеет фундаментальное значение в небесной механике. В ньютоновской механике положения и скорости элементов солнечной системы считаются в момент времени $t=0$ заданными, а движение системы определяют, решая соответствующие дифференциальные уравнения (в случае твердых тел — обыкновенные дифференциальные уравнения, в случае жидкости — уравнения в частных производных). Как об этом уже упоминалось, понятие твердости на теорию относительности не распространяется и, поскольку выбор невелик, мы будем рассматривать тела как жидкости. В начале лучше оставить в стороне вопрос о плотности материи и рассматривать поле жидкости общего вида.

Будем, как и раньше, пользоваться нормальными гауссовыми координатами, так что аналогично случаю (5.82) и (5.90)

$$g_{\alpha 4}=0, \quad g_{44}=-1, \quad g^{\alpha 4}=0, \quad g^{44}=-1. \qquad (5.117)$$

Уравнения поля имеют вид

$$G_{ij}+\varkappa T_{ij}=0, \quad \varkappa=8\pi, \qquad (5.118)$$

где T_{ij} задан по (5.116). Кроме того,

$$V_iV^i=-1. \qquad (5.119)$$

Таким образом, здесь 11 уравнений для 12 неизвестных

$$g_{\alpha\beta}, \ V_i, \ \mu, \ p, \qquad (5.120)$$

и, следовательно, недостает еще одного уравнения.

Есть четыре вполне разумных способа ввести дополнительное уравнение. Во-первых, можно было бы принять, что

$$p=0, \qquad (5.121)$$

так что среда оказалась бы некогерентной [1]) (облако пыли). Этот случай мы уже рассмотрели в гл. IV, § 4. Как было показано, линии тока представляют собой геодезические. Однако это еще очень далеко от исчерпывающего описания. Во-вторых, можно было бы предположить, что между плотностью и давлением существует связь:

$$f(\mu, p) = 0. \tag{5.122}$$

Уравнение (5.122), очевидно, содержит как частный случай условие (5.121). В-третьих, мы могли бы принять уравнение

$$(\mu V^i)_{|i} = 0, \tag{5.123}$$

которое можно интерпретировать как закон сохранения массы. Из этого уравнения, согласно (4.87), следует, что $V^i_{|i} = 0$, т. е. движение происходит без источников и стоков [2]). В-четвертых, мы могли бы модифицировать (5.123), положив

$$(\varrho V^i)_{|i} = 0, \tag{5.124}$$

где ϱ определяется формулой

$$\varrho = \mu + p. \tag{5.125}$$

Согласно (4.86), это означает, что p вдоль каждой линии тока постоянно. Сам факт малости отношения p/μ в большинстве физических ситуаций наводит на мысль о том, что различие между (5.123) и (5.124) несущественно. Однако замечания, сделанные по поводу величин (4.98), служат хорошим предостережением против таких опрометчивых заключений. Когда интерес сосредоточен на случае несжимаемой жидкости, естественно исходить из уравнения (5.123). Но в математическом отношении оказывается более удобным уравнение (5.124), и мы, признав некоторую произвольность своего выбора, обратимся именно к нему.

Мы имеем 12 уравнений, (5.118), (5.119) и (5.124), связывающих 12 величин (5.120). Однако лучше рассматривать (5.119) как условие задающее V^4:

$$V^4 = (1 + V_\alpha V^\alpha)^{1/2}. \tag{5.126}$$

Следовательно, теперь мы имеем 11 неизвестных

$$g_{\alpha\beta}, \quad V_\alpha, \quad \varrho, \ p, \tag{5.127}$$

которые должны удовлетворять 11 уравнениям (5.118) и (5.124). Согласно (5.93) и (5.94), уравнения (5.118) эквивалентны следующим:

$$R_{\alpha\beta} + \varkappa T^*_{\alpha\beta} = 0, \quad T^i_{j|i} = 0, \tag{5.128}$$

с условиями совместности

$$G_{4i} + \varkappa T_{4i} = 0. \tag{5.129}$$

Если учесть, что

$$T = 3p - \mu = 4p - \varrho,$$
$$T^*_{ij} = \varrho V_i V_j + \left(\frac{1}{2}\varrho - p\right) g_{ij}, \tag{5.130}$$

то из первого уравнения (5.128) аналогично (5.95) получаем

$$g_{\alpha\beta,44} = 2\bar{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} A g_{\alpha\beta,4} + g^{\mu\nu} g_{\alpha\mu,4} g_{\beta\nu,4} + \\ + 2\varkappa\varrho V_\alpha V_\beta + \varkappa(\varrho - 2p) g_{\alpha\beta}. \tag{5.131}$$

---

[1]) То есть оказались бы исключенными взаимодействия между частицами среды.— *Прим. ред.*

[2]) «Без источников и стоков» в том смысле, что дивергенция равна нулю. — *Прим. ред.*

Второе уравнение (5.128) дает

$$\varrho V^i V_{j|i} + p_{,j} = 0. \qquad (5.132)$$

Условия совместности (5.129) выглядят, как и в (5.99), следующим образом:

$$A_{,\alpha} - D^\sigma g_{\alpha\sigma,4} + 2\varkappa\varrho V_\alpha V_4 = 0,$$
$$\bar{R} - \frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B + 2\varkappa\varrho V_4^2 - 2\varkappa p = 0. \qquad (5.133)$$

В качестве данных Коши на гиперповерхности $x^4 = 0$ зададим значения

$$g_{\alpha\beta}, \quad g_{\alpha\beta,4}, \quad V_\alpha, \quad \varrho, \quad p, \qquad (5.134)$$

выбранные с учетом (5.133), и будем искать величины

$$g_{\alpha\beta,44}, \quad V_{\alpha,4}, \quad \varrho_{,4} \quad p_{,4}. \qquad (5.135)$$

Теперь $g_{\alpha\beta,44}$ заданы посредством (5.131), а для определения остальных пяти величин в (5.135) мы имеем пять уравнений, входящих в (5.124) и (5.132). Полагая в (5.132) $j = 4$, получаем

$$p_{,4} = -\varrho V^i V_{4|i}, \qquad (5.136)$$

откуда $p_{,4}$ определяется сразу же, как только найдены $V_{\alpha,4}$. Полагая в (5.132) $j = \alpha$, получаем

$$V^4 V_{\alpha,4} + V^\beta V_{\alpha,\beta} - \Gamma^k_{i\alpha} V^i V_k + \varrho^{-1} p_{,\alpha} = 0, \qquad (5.137)$$

откуда определяются $V_{\alpha,4}$. Обратимся, наконец, к уравнению (5.124). Из него найдем

$$\varrho_{,i} V^i + \varrho V^i_{|i} = 0, \qquad (5.138)$$

или

$$\varrho_{,4} V^4 + \varrho_{,\alpha} V^\alpha + \varrho V^i_{|i} = 0, \qquad (5.139)$$

откуда определяются $\varrho_{,4}$. Таким образом, с помощью уравнений (5.131), (5.137), (5.139) и (5.136) мы выразим величины (5.135) через данные Коши (5.134).

Необходимо еще рассмотреть условия совместности (5.133). В случае вакуума, 4 условия совместности (5.107) связывали 12 величин. В данном случае 4 условия совместности (5.133) связывают 17 величин (5.134). Запишем эти условия в более удобной форме, полагая, как и в (5.106), что

$$\psi_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta,4}. \qquad (5.140)$$

Тогда эти условия дают

$$\psi^\beta_{\beta,\alpha} - \psi^\beta_{\alpha\|\beta} + 2\varkappa\varrho V_\alpha V_4 = 0,$$
$$\bar{R} - \frac{1}{4}(\psi^\beta_\beta)^2 + \frac{1}{4}\psi^\alpha_\beta \psi^\beta_\alpha + 2\varkappa\varrho V_4^2 - 2\varkappa p = 0. \qquad (5.141)$$

Очевидно, что при таком избытке «лишних» величин невозможно установить однозначный способ решения. В поисках пути исследования наших уравнений можно попытаться найти решение, соответствующее линейному приближению. В качестве такого пробного варианта положим

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha\beta}, \qquad (5.142)$$

и рассмотрим $\gamma_{\alpha\beta}$ как малые. Кроме того, будем считать малыми величины $\psi_{\alpha\beta}$ и V_α, так что $V_4 = -1$. Тогда система (5.141) сведется к следующей:

$$\psi_{\beta\beta,\,\alpha} - \psi_{\alpha\beta,\,\beta} - 2\varkappa\varrho V_\alpha = 0, \tag{5.143}$$

$$\Delta\gamma_{\alpha\alpha} - \gamma_{\alpha\beta,\,\alpha\beta} + 2\varkappa\mu = 0, \tag{5.144}$$

где Δ — евклидов оператор Лапласа. Итак, здесь $\psi_{\alpha\beta}$ и $\gamma_{\alpha\beta}$ разделены. Положив

$$\psi_{\alpha\beta} = 2\,(v_{\alpha,\,\beta} + v_{\beta,\,\alpha}) - \delta_{\alpha\beta}v_{\gamma,\,\gamma}, \tag{5.145}$$

мы удовлетворим уравнению (5.143), если выберем v_α в виде

$$v_\alpha = \int \frac{\varrho V_\alpha}{r}\,dv, \tag{5.146}$$

(будем помнить, что $\varkappa = 8\pi$). Полагая же

$$\gamma_{\alpha\beta} = 2\delta_{\alpha\beta}\chi, \tag{5.147}$$

мы удовлетворим уравнению (5.144), если выберем χ в виде

$$\chi = \int \frac{\mu\,dv}{r}. \tag{5.148}$$

В формулах (5.146) и (5.148) r — расстояние (в евклидовой метрике) между элементом объема dv и точкой, в которой вычисляется v_α или χ. Действуя таким образом, можно получить решения линеаризованных условий совместности (5.143), (5.144) при произвольных V_α, p и ϱ. Было бы неразумно придавать слишком большое значение этим результатам самим по себе. Их следует использовать лишь как отправной пункт при вычислении точных решений точных условий совместности (5.141). Именно так мы и поступим. Но поскольку, как уже отмечалось, мы занимаемся центральной проблемой небесной механики, полезно еще раз четко сформулировать задачу.

Мы имеем четыре координаты x^i, причем x^4 — временноподобна. Уравнения (5.131), (5.136), (5.137), (5.139) и уравнения, полученные из них посредством дифференцирования по x^4, определяют через данные Коши (5.134) коэффициенты в следующих степенных рядах:

$$\begin{aligned}
g_{\alpha\beta} &= (g_{\alpha\beta})_0 + x^4(g_{\alpha\beta,\,4})_0 + \frac{1}{2}(x^4)^2(g_{\alpha\beta,\,44})_0 + \ldots,\\
V_\alpha &= (V_\alpha)_0 + x^4(V_{\alpha,\,4})_0 + \frac{1}{2}(x^4)^2(V_{\alpha,\,44})_0 + \ldots,\\
\varrho &= (\varrho)_0 + x^4(\varrho_{,\,4})_0 + \frac{1}{2}(x^4)^2(\varrho_{,\,44})_0 + \ldots,\\
p &= (p)_0 + x^4(p_{,\,4})_0 + \frac{1}{2}(x^4)^2(p_{,\,44})_0 + \ldots .
\end{aligned} \tag{5.149}$$

Однако этими рядами нельзя воспользоваться, пока не решены уравнения (5.141). Для создателя вселенных[1]) (см. гл. IV, § 6) это не составит проблемы: он может произвольным образом выбрать $\psi_{\alpha\beta}$, $g_{\alpha\beta}$ и p и искать решение для ϱ и V_α, учитывая (5.126). Но у него не будет уверенности в том, что ϱ окажется положительной, и вполне возможно, что построенные таким путем вселенные окажутся совершенно нереальными. Реалист стал бы исходить из ньютоновской картины солнечной системы (если именно она его интересует) и подобрал бы разумные исходные значения V_α, ϱ и p. Вычислив

[1]) Если понимать под этим мифическим персонажем синоним полного произвола в выборе начальных данных. — *Прим. ред.*

с их помощью $\psi_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}$ по формулам (5.142) и (5.145) — (5.148), он, пользуясь методом итераций, изложенным в гл. IV, § 6, подставил бы эти значения $\psi_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}$, а также исходное значение p в уравнения (5.141) и получил бы точное решение относительно V_α и ϱ. Поскольку p — величина «регулируемая», ее всегда можно обратить в нуль вне Солнца и планет, и данные Коши перестают иметь реальный смысл лишь при рассмотрении плотности вне Солнца и планет — эта плотность может оказаться отрицательной. Грубые количественные вычисления показывают, что эта искусственная плотность принимает свое наибольшее абсолютное значение вблизи Солнца, где она равна приблизительно 10^{-14} *сек*$^{-2}$ или 10^{-7} *г/см*^{3}.

Для какой области изменения координаты x^4 разложения в ряды (5.149) можно считать справедливыми? Мы используем обычные нормальные гауссовы координаты, построенные посредством проведения геодезических, нормальных к гиперповерхности $x^4 = 0$. Эти координаты теряют смысл, и разложения (5.149) становятся неправомерными, как только две соседние геодезические пересекаются. Вопрос о пересечении можно рассматривать с помощью геодезического отклонения, но быстрее оценка получается, если, используя ньютоновские воззрения, рассматривать геодезические как траектории частиц, покоившихся до момента времени $x^4 = 0$, а затем начавших свободно падать в среде, не оказывающей сопротивления их движению. В случае сферы, материя внутри которой однородно распределена с плотностью ϱ, частица, начинающая двигаться из состояния покоя в любой точке, падает к центру за время

$$x^4 = \sqrt{\frac{3\pi}{16\varrho}}. \tag{5.150}$$

Если плотность в центре Солнца принять равной 100 *г/см*^{3} (а это наверняка наибольшая плотность в солнечной системе) и подставить это значение в формулу (5.150), то мы получим грубую верхнюю оценку для пределов изменения x^4, при которых справедливы разложения (5.149) в применении к солнечной системе. Интервал изменения оказывается равным примерно 300 *сек*. Прежде чем истечет этот промежуток времени, необходимо выбрать новое трехмерное пространство в качестве базиса для построения новых гауссовых координат.

§ 7. Характеристики и ударные волны

Слово *характеристика* в математике настолько перегружено различными значениями, что это часто приводит к путанице даже в той области, с которой мы имеем здесь дело (например, такой же термин употребляется при рассмотрении дифференциальных уравнений в частных производных в пространстве — времени).

Обратимся прежде всего к вопросу о характеристических кривых. Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка в частных производных

$$F(x, y) = 0, \tag{5.151}$$

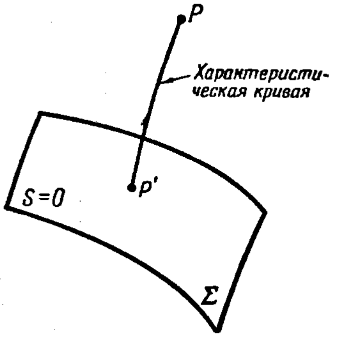
которому удовлетворяет функция $S(x)$. Здесь y означает частные производные

$$y_i = S_{,i}. \tag{5.152}$$

Характеристические кривые уравнения (5.151) представляют собой кривые, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям

$$\frac{dx^i}{du} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{du} = -\frac{\partial F}{\partial x^i}. \tag{5.153}$$

Ценность этих уравнений заключается в том, что все решения дифференциальных уравнений *в частных производных* (5.151) можно получить с помощью решения системы *обычных* дифференциальных уравнений. Делается это следующим образом. Будем искать решение S уравнения (5.151) такое, что на некотором трехмерном подпространстве Σ (фиг. 59) $S = 0$. Выберем в каждой точке Σ величины J_i такие, чтобы уравнение (5.151) было удовлетворено, и проведем конгруэнцию характеристических кривых, исходящих из Σ; при этом y_i рассматривается как набор четырех величин, безотносительно к (5.152). Выбрав произвольную точку $P(x)$, проведем через нее характеристическую кривую, принадлежащую данной конгруэнции. Пусть она пересекает Σ в точке P'. Уравнение



Фиг. 59. Характеристические кривые.

$$S(x) = \int_{P'}^{P} y_i \, dx^i, \tag{5.154}$$

где интеграл берется вдоль характеристической кривой, определяет $S(x)$ как функцию точки. Легко убедиться, что $S(x)$ удовлетворяет уравнению (5.151) и условию $S = 0$ на Σ. Доказательство уже было дано в гл. I, § 7, и повторять его здесь нет надобности. Так же, как и в гл. I, § 7, можно взять на Σ более общие условия, задавая для S вместо нулевых произвольные значения.

В конкретном случае, если дифференциальное уравнение в частных производных имеет вид

$$F(x, y) = \frac{1}{2} g^{ij} y_i y_j = 0, \tag{5.155}$$

то уравнения для характеристических кривых записываются как

$$\frac{dx^i}{du} = g^{ij} y_j, \quad \frac{dy_i}{du} = -\frac{1}{2} g^{jk}_{,i} y_j y_k, \tag{5.156}$$

откуда получаем

$$\frac{\delta}{\delta u} \frac{dx^i}{du} = 0, \quad g_{ij} \frac{dx^i}{du} \frac{dx^j}{du} = 0. \tag{5.157}$$

Это — уравнение изотропной геодезической, а (5.155) — уравнение изотропной поверхности (см. гл. I, § 7). Таким образом, *характеристические кривые, связанные с изотропными поверхностями, представляют собой изотропные геодезические*. Устанавливая этот факт, мы фактически повторили уже сказанное в гл. I, § 7.

Резюмируем наши рассуждения следующим образом: характеристические кривые есть кривые, связанные с дифференциальным уравнением *первого* порядка в частных производных, все решения которого определяются как только эти кривые найдены. Рассмотрим теперь иное применение слова *характеристика* и постараемся заранее устранить возможность путаницы, заменив его словом ударная волна. Иногда приходится рассматривать величины, которые, будучи сами непрерывны, имеют разрывные производные. Так, например, в ньютоновской теории гравитации потенциал и его первые производные на поверхности материальной сферы непрерывны, но имеют место разрывы вторых производных (внутри сферы справедливо уравнение Пуассона, вне сферы — уравнение Лапласа). Аналогичным образом, в пространстве — времени могут встретиться непрерывные величины, производные которых терпят разрыв на трехмерной сфере Σ. Следуя гидродинамической терминологии, будем говорить, что Σ представляет собой

ударную волну. В математике этому понятию эквивалентен термин *характеристика*. Однако мы его употреблять не будем.

Мы будем рассматривать ударные волны в пространстве — времени в связи с обсуждением дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных для скалярной функции, а также с обсуждением уравнений поля в вакууме. Электромагнитные ударные волны будут исследованы в гл. X, § 2. Можно отметить, что применяемый ниже метод анализа представляет собой современный эквивалент приемов, использовавшихся ранее в оптике (например, переход от «физической» оптики к «геометрической» посредством рассмотрения периодических волн высокой частоты).

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных

$$F=0, \tag{5.158}$$

где F — инвариант, зависящий от скаляра S и его частных производных $S_{,i}$, $S_{,ij}$. Ударная волна Σ есть трехмерная гиперповерхность, на которой S и $S_{,i}$ непрерывны, но их вторые производные $S_{,ij}$ претерпевают какие-то разрывы. Приступая к исследованию ударных волн, возьмем другие координаты $\bar{x}^i$, такие, что Σ в них задается уравнением $\bar{x}^4 = 0$. Тогда на Σ непрерывны следующие величины:

$$\bar{S},\ \bar{S}_{,\alpha},\ \bar{S}_{,4},\ \bar{S}_{,\alpha\beta},\ \bar{S}_{,\alpha 4}. \tag{5.159}$$

Таким образом, разрыв может претерпевать только вторая производная $\bar{S}_{,44}$.

Будем теперь рассматривать уравнение (5.158) как алгебраическое уравнение относительно $\bar{S}_{,44}$. Если оно допускает единственное решение, то $\bar{S}_{,44}$ на Σ непрерывна. Таким образом, ударной волне можно дать негативное определение: *Σ является ударной волной, если уравнение $F = 0$ не определяет однозначным образом значение производной $\bar{S}_{,44}$*.

Рассмотрим в качестве примера *обобщенное волновое уравнение* в заданном пространстве — времени:

$$g^{ij} S_{|ij}=0. \tag{5.160}$$

Поскольку нас сейчас интересуют только вторые производные, то все рассуждения в равной мере применимы и к уравнениям более общего вида

$$g^{ij}S_{|ij}+B=0, \tag{5.161}$$

где B содержит S и $S_{,i}$. Однако для простоты будем иметь в виду уравнение (5.160). Для системы координат $\bar{x}^i$, в которых гиперповерхность Σ определяется уравнением $\bar{x}^4 = 0$, уравнение (5.160) принимает вид

$$\bar{g}^{44}\bar{S}_{,44}+\ldots=0 \tag{5.162}$$

где черточками помечены члены, содержащие величины (5.159). Условие для ударной волны, очевидно, будет иметь вид

$$\bar{g}^{44}=0, \tag{5.163}$$

так как если бы это не имело места, то $\bar{S}_{,44}$ определялось бы с помощью только (5.162). Перейдем теперь снова к координатам общего вида x^i, полагая

$$\bar{x}^4=f(x), \tag{5.164}$$

так что Σ определяется уравнением $f(x) = 0$. Тогда

$$\bar{g}^{44}=g^{ij}f_{,i}f_{,j}, \tag{5.165}$$

и, следовательно, мы убеждаемся, что *ударные волны для волнового уравнения (5.160), или в более общем случае, для (5.161) представляют собой*

трехмерные гиперповерхности $f(x) = \text{const}$, *где* f *удовлетворяет уравнению*

$$g^{ij}f_{,i}f_{,j}=0, \qquad (5.166)$$

т. е. изотропные поверхности, причем связанные с ними характеристические кривые представляют собой изотропные геодезические. Поскольку (выражаясь математическим языком) изотропные поверхности сами есть характеристические поверхности волнового уравнения, то обычно говорят, что *бихарактеристики* волнового уравнения являются изотропными геодезическими.

Рассмотрим теперь *гравитационные ударные волны*, связанные с уравнениями поля в вакууме

$$G_{ij}=0, \qquad (5.167)$$

и эквивалентные уравнениям

$$R_{ij}=0. \qquad (5.168)$$

Под *ударной волной* мы понимаем трехмерную гиперповерхность Σ, на которой g_{ij} и $g_{ij,k}$ непрерывны (как этого и требуют условия для допустимых координат), но имеют существенные разрывы некоторых из своих вторых производных $g_{ij,km}$; слово *существенный* здесь означает, что такие разрывы нельзя устранить с помощью перехода к другим допустимым координатам. Подойдем к вопросу о гравитационных ударных волнах с той же точки зрения, что и ранее, т. е. выбирая координаты $\overline{x}^i$, в которых уравнение для Σ имеет вид $\overline{x}^4 = 0$. Тогда величины

$$\overline{g}_{ij}, \quad \overline{g}_{ij,k}, \quad \overline{g}_{ij,\alpha\beta}, \quad \overline{g}_{ij,4\alpha} \qquad (5.169)$$

непрерывны, и разрывы могут обнаружиться только у величин

$$\overline{g}_{ij,44}. \qquad (5.170)$$

С помощью (1.86) и (1.104) находим

$$\begin{aligned} \overline{R}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\overline{g}^{44}\overline{g}_{\alpha\beta,44}+\overline{F}_{\alpha\beta}, \\ \overline{R}_{\alpha4} &= -\frac{1}{2}\overline{g}^{4\beta}\overline{g}_{\alpha\beta,44}+\overline{F}_{\alpha4}, \\ \overline{R}_{44} &= \frac{1}{2}\overline{g}^{\alpha\beta}\overline{g}_{\alpha\beta,44}+\overline{F}_{44}, \end{aligned} \qquad (5.171)$$

где F содержит величины (5.169).

Мы непосредственно видим, что уравнения поля

$$\overline{R}_{ij}=0 \qquad (5.172)$$

не определяют все вторые производные (5.170) однозначным образом, так как четыре из них ($\overline{g}_{i4,44}$) в уравнения (5.171) вообще не входят. Итак, разрывы вторых производных могут иметь место на любой гиперповерхности. Нужно, однако, помнить о понятии *существенный*, содержащемся в определении ударных волн. Можно, не выходя за рамки класса допустимых координат, устранить некоторые разрывы вторых производных. При этом лучше всего пользоваться гауссовыми координатами $\overline{x}^i$ (вообще говоря, косоугольными), такими, чтобы, как и раньше, Σ задавалась уравнением $\overline{x}^4 = 0$; в этом случае, как и в (1.212), мы имеем

$$\overline{g}_{\alpha4,4}=0, \quad \overline{g}_{44}=\varepsilon=\pm 1. \qquad (5.173)$$

Тогда $\overline{g}_{i4,44}= 0$, и из десяти вторых производных (5.170) необходимо рас-

смотреть лишь шесть $(\bar{g}_{\alpha\beta,44})$. В этом случае ясно, что, коль скоро условие

$$\bar{g}^{44} = 0 \qquad (5.174)$$

не выполняется, уравнения поля (5.172) определяют эти шесть производных однозначным образом, тогда как в случае, когда (5.174) имеет место, это утверждение не верно. Следовательно, (5.174) представляет собой уравнение, определяющее гравитационные ударные волны. Но (5.174) совпадает с уравнением (5.163), откуда мы заключаем, что *гравитационные ударные волны представляют собой изотропные поверхности, определяемые уравнениями* (5.166) (Леви-Чивита [640], Пастори [874], Финци [337], Лишнеровиц [671], стр. 33). Выражаясь обычным языком, можно говорить, что «гравитационные ударные волны распространяются со скоростью света», и мы можем представлять себе бихарактеристики (изотропные геодезические) как «гравитационные лучи». Разумеется, такого рода утверждения следует принимать cum grano salis[1]). Однако представляется весьма правдоподобным, что, если бы мы когда-нибудь серьезно попытались представить себе квантованный элемент гравитации (гравитон), аналогично тому, как мы представляем себе квантованный элемент света (фотон), было бы естественно приписать гравитонам в качестве их мировых линий именно изотропные геодезические.

---

[1]) Cum grano salis (*лат.*) «с крупинкой соли», с умом. — *Прим. ред*

Глава VI

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

§ 1. Понятие об интегральных законах сохранения

Рассмотрим замкнутую систему в ньютоновской механике. Под замкнутой системой мы понимаем систему, которая не испытывает действия каких-либо внешних сил. Тогда, если ϱ — плотность, а u_α — скорость, мы имеем закон *сохранения импульса* в виде

$$\int \varrho u_\alpha \, d_3v = \text{const} \tag{6.1}$$

и закон *сохранения момента импульса*[1]) в виде

$$\int \varrho \left(x_\alpha u_\beta - x_\beta u_\alpha\right) d_3v = \text{const}, \tag{6.2}$$

где const означает «не зависит от времени». Кроме того, имеется закон сохранения энергии, простой по виду в случае консервативной системы, но выходящий за рамки механики в собственном смысле этого слова, когда имеет место превращение механической энергии в тепло.

При попытке построить релятивистские аналоги интегральных законов сохранения ньютоновской механики первая и наиболее очевидная трудность, с которой мы сталкиваемся, состоит в том, что не существует единственного инвариантного способа разбиения пространства — времени на ∞^1 пространственноподобных частей. Рекомендуется сразу принять более широкую точку зрения, лучше отвечающую смыслу теории относительности, и рассматривать интегральный закон сохранения как утверждение о равенстве нулю интеграла, взятого по *замкнутому* трехмерному подпространству в пространстве — времени. Сформулируем это утверждение точнее. Пусть V_3 — замкнутое трехмерное подпространство (фиг. 60), ограничивающее четырехмерную область V_4. Пусть, далее, N^i — единичная внешняя нормаль к V_3. Тогда, если существует векторное поле F_i, такое, что

$$\oint_{V_3} \varepsilon(N) F_i N^i \, d_3v = 0 \tag{6.3}$$

для каждого замкнутого V_3, то мы будем называть соотношение (6.3) *интегральным законом сохранения*[2]).

---

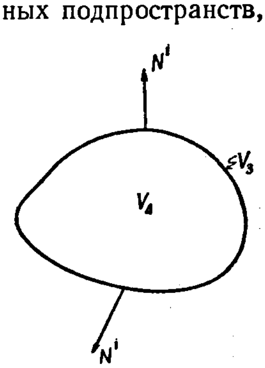
[1]) Автор вместо терминов «импульс» и «момент импульса» пользуется терминами) «линейный момент» («linear momentum») и «угловой момент» («angular momentum» соответственно. — *Прим. ред.*

[2]) Символы d_3v и d_4v означают инвариантные элементы 3-объема и 4-объема, а подынтегральные выражения, встречающиеся в § 1—4, инвариантны относительно преобразования координат в области интегрирования. В § 5—7 подынтегральные выражения уже не будут инвариантами.

Значение термина *сохранение* станет ясным, если разбить замкнутое V_3 на две открытые области ($V_3 = V_3' + V_3''$), причем обе области перекрываются на одном и том же замкнутом V_2 (фиг. 61). Если мы по-прежнему будем обозначать через N^i внешнюю нормаль к V_3'', но изменим значение N^i на V_3', так чтобы эта нормаль стала внутренней, то (6.3) можно записать следующим образом:

$$\int_{V_3'} \varepsilon(N) F_i N^i d_3 v = \int_{V_3''} \varepsilon(N) F_i N^i d_3 v. \tag{6.4}$$

Любой из этих интегралов может быть назван *потоком*. Тот факт, что поток для V_3' совпадает с потоком для V_3'', правильно отражается словом *сохранение*. Очевидно, поток одинаков для всех открытых трехмерных подпространств, перекрывающихся на одном и том же замкнутом V_2, но, вообще говоря, зависит от выбора V_2. При надлежащей осторожности можно расширить V_2 до бесконечности.



Фиг. 60. Общая схема для закона сохранения.

При рассмотрении интегральных законов сохранения можно привлечь обобщенные теоремы Стокса, обсужденные в гл. I, § 10, вставая при этом на несколько более общую точку зрения.

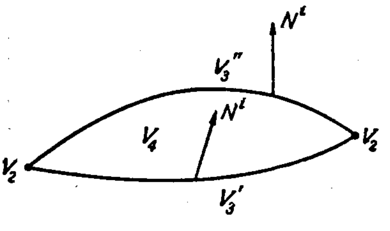
Пусть V_1 — замкнутая кривая в пространстве — времени, а V_2 — покрывающее ее открытое двумерное пространство. Пусть F_i — *произвольное* векторное поле. В силу (1.244)

$$\oint_{V_1} F_i dx^i = \int_{V_2} F_{i|j} d\tau^{ij}. \tag{6.5}$$

Тогда интеграл, стоящий справа, имеет одно и то же значение для всех двумерных пространств, покрывающих V_1, и можно утверждать, что это соотношение дает интегральный закон сохранения. Поскольку интеграл здесь двойной, а не тройной, как в (6.4), то этот закон напоминает классический закон Гаусса[1]) в электростатике.

Увеличим теперь число измерений, рассматривая замкнутое двумерное пространство V_2, покрытое открытым V_3. Пусть F_{ij} — *произвольное* тензорное поле. Тогда в силу (1.245)

$$\oint_{V_2} F_{ij} d\tau^{ij} = \int_{V_3} F_{ij|k} d\tau^{ijk}. \tag{6.6}$$

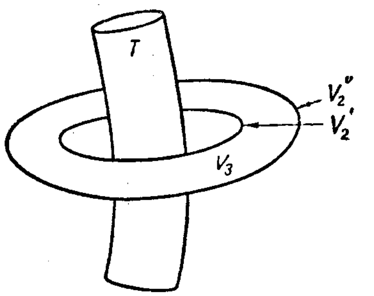


Фиг. 61. Закон сохранения в виде интеграла по открытой области.

Нет необходимости предполагать какие-либо специальные свойства симметрии у тензора F_{ij}, так как вклад в (6.6) дает лишь его кососимметрическая часть. Ясно, что интеграл в первой части имеет одно и то же значение для всех трехмерных пространств, покрывающих данное замкнутое V_2. Таким образом, мы имеем закон сохранения, в некоторой степени аналогичный (6.4). Однако здесь имеется существенная разница: в (6.4) вектор F_i не был произвольным [он удовлетворял условию (6.3)], тогда как в (6.6) тензор F_{ij} произволен. Фактически соотношение (6.6) можно рассматривать как «фабрику, производящую интегральные законы сохранения»: наша задача состоит лишь в том, чтобы выделить F_{ij}, приводящие к законам, интересным с физической точки зрения.

[1]) Автор имеет в виду известную теорему Гаусса — Остроградского. — *Прим. ред.*

Иногда необходимо или желательно ограничить рассмотрение лишь частью пространства — времени, например, V_4. При таком ограничении использование (6.5) или (6.6) требует осторожности, так как покрытие V_1 в первом случае и V_2 во втором могло бы вывести нас за пределы V_4.



Фиг. 62. Сохранение вне области T.

В качестве иллюстрации рассмотрим фиг. 62, на которой изображена трубка T в пространстве — времени, внутрь которой проникать запрещено. Мы не можем покрыть замкнутое двумерное пространство V_2', не проникая внутрь T, и, следовательно, не можем к V_2' применить формулу (6.6). Однако замкнутое V_2, образованное из V_2' и V_2'', можно покрыть открытым V_3, не входя в T, и закон сохранения типа (6.6) существует.

Следует отметить, что наша пространственная интуиция простирается лишь на три измерения, и хотя диаграммы вроде фиг. 62, изображающие пространство — время так, как если бы оно было трехмерным, полезны, все же обращение с ними требует известной осторожности. Во всех сомнительных случаях следует обращаться к формулам. Пусть (x, y, z, t) — координаты, меняющиеся в интервале $(-\infty, +\infty)$ в пространстве — времени. Тогда неравенство

$$x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$$

описывает область T в пространстве — времени, а замкнутые двумерные пространства V_2', V_2'' определяются соотношениями

$$V_2':\quad x^2+y^2+z^2=b^2,\qquad t=0,$$

$$V_2'':\quad x^2+y^2+z^2=c^2,\qquad t=0.$$

Здесь a, b и c — постоянные. Если $a<b<c$, то ситуация как раз совпадает с представленной на фиг. 62. Формула

$$x^2+y^2+z^2\leqslant b^2,\qquad t=0$$

определяет открытое подпространство V_3, покрывающее подпространство V_2', но пересекающее четырехмерную область T. Формула

$$b^2\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant c^2,\qquad t=0$$

определяет открытое подпространство V_3, которое покрывает V_2, образованное двумерными подпространствами V_2' и V_2'', не пересекая T. Другое V_3, пересекающее область T, определяется соотношениями

$$t=(x^2+y^2+z^2-b^2)(c^2-x^2-y^2-z^2),\qquad t\geqslant 0.$$

§ 2. Интегральные законы сохранения, связанные с тензором Эйнштейна

Как и в случае (4.111), мы записываем уравнения поля в виде

$$G_{ij}=-\varkappa T_{ij},\qquad \varkappa=8\pi. \tag{6.7}$$

Левая часть здесь носит геометрический характер, тогда как правая часть — механический. Поскольку эти части связаны знаком равенства, то оказывается, что с математической точки зрения безразлично, какой частью оперировать. Однако с психологической точки зрения здесь различие весьма существенно; дело в том, что, к счастью, геометрия свободна от семанти-

ческой путаницы, и пока мы мыслим геометрически, нам незачем касаться таких метафизических вопросов, как, например, смысла слова *энергия*. Поэтому ради сохранения умственного равновесия мы будем работать с G_{ij}, получая при этом результаты, которые геометрически будут правильными; физические выводы будут в этом случае вытекать из связи между G_{ij} и T_{ij}, определяемой уравнением (6.7).

В этом параграфе мы сосредоточим внимание главным образом лишь на одном свойстве G_{ij}, а именно, на тождестве

$$G^{ij}_{\ |j}=0, \tag{6.8}$$

которое фактически представляет собой *дифференциальный* закон сохранения. Для перехода к интегральной форме, введем произвольное векторное поле λ_i и будем интегрировать по некоторой области V_4 пространства — времени; имеем

$$\int\limits_{V_4} G^{ij}_{\ |j}\lambda_i\, d_4v=0. \tag{6.9}$$

Чтобы придать последнему соотношению вид интегрального закона сохранения (6.3), выполним интегрирование по частям и используем теорему Грина (1.257). Получаем

$$\oint\limits_{V_3}\varepsilon(N)\, G^{ij}\lambda_i N_j d_3v=\int\limits_{V_4} G^{ij}\lambda_{i|j} d_4v, \tag{6.10}$$

где V_3 — замкнутое трехмерное подпространство, ограничивающее V_4, а N^i — единичная внешняя нормаль. Если бы только правая часть (6.10) обращалась в нуль, мы получили бы интегральный закон сохранения в виде

$$\oint\limits_{V_3}\varepsilon(N)\, G^{ij}\lambda_i N_j d_3v=0. \tag{6.11}$$

Чтобы получить этот результат, можно выбрать λ_i так, чтобы удовлетворялось уравнение

$$G^{ij}\lambda_{i|j}=0. \tag{6.12}$$

Это можно сделать различными способами, поскольку здесь лишь одно уравнение для четырех неизвестных. На самом деле, можно выбрать произвольное векторное поле ν_i и положить

$$\lambda_i=\psi\nu_i, \tag{6.13}$$

где ψ — некоторый скаляр. Тогда (6.12) будет удовлетворено, если ψ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$G^{ij}\nu_i\psi_{,j}+G^{ij}\nu_{i|j}\psi=0. \tag{6.14}$$

Соответствующий интегральный закон сохранения имеет вид

$$\oint\limits_{V_3}\varepsilon(N)\,\psi G^{ij}\nu_i N_j d_3v=0. \tag{6.15}$$

Этот метод можно привести к более систематическому виду, выбрав в качестве вектора ν_i один из четырех единичных собственных векторов G_{ij}, так что

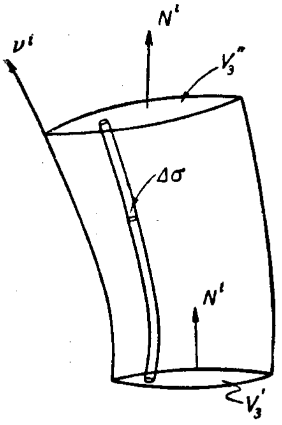
$$G^{ij}\nu_i=\varphi\nu^j, \tag{6.16}$$

где φ — соответствующее собственное значение. Тогда дифференциальное

уравнение в частных производных для ψ принимает вид

$$\varphi\nu^j\psi_{,j}+(\varphi_{,j}\nu^j+\varphi\nu^j_{|j})\psi=0. \qquad (6.17)$$

Если можно интерпретировать в терминах геометрии конгруэнции кривых, имеющих ν^i в качестве единичной касательной. Отсчитывая s от некоторого трехмерного пространства, пересекающего ν-линии, и обозначая через $\Delta\sigma$ 3-объем нормального сечения бесконечно тонкой трубки, образованной из ν-линий, мы имеем



Фиг. 63. Трубка линий, заданных собственными векторами G_{ij}.

$$\nu^j\psi_{,j}=\frac{d\psi}{ds}, \quad \nu^j\varphi_{,j}=\frac{d\varphi}{ds},$$

$$\nu^j_{|j}=\frac{1}{\Delta\sigma}\frac{d\Delta\sigma}{ds}. \qquad (6.18)$$

Вместо (6.17) получится

$$\varphi\frac{d\psi}{ds}+\left(\frac{d\varphi}{ds}+\varphi\frac{1}{\Delta\sigma}\frac{d\Delta\sigma}{ds}\right)\psi=0, \qquad (6.19)$$

откуда следует, что

$$\psi\varphi\Delta\sigma=\Delta k, \qquad (6.20)$$

где Δk — постоянна вдоль каждой ν-линии. Тогда закон сохранения (6.15) приобретет вид

$$\oint\limits_{V_3}\varepsilon(N)\frac{\Delta k}{\Delta\sigma}\nu^jN_jd_3v=0. \qquad (6.21)$$

Возьмем теперь в качестве V_4 трубку в пространстве — времени, образованную из собственных ν-линий, и ограниченную трехмерными «колпаками» V_3' и V_3'' (фиг. 63). Тогда на боковых границах трубки $\nu^jN_j=0$, и (6.21) можно записать в виде

$$\int\limits_{V_3'}\varepsilon(N)\frac{\Delta k}{\Delta\sigma}\nu^jN_jd_3v=\int\limits_{V_3''}\varepsilon(N)\frac{\Delta k}{\Delta\sigma}\nu^jN_jd_3v, \qquad (6.22)$$

где нормаль N^i ориентирована, как показано на фиг. 63. Теперь $\varepsilon(N)\nu^jN_j$ имеет один и тот же знак на V_3' и V_3''. По формуле для проекции получим

$$|\varepsilon(N)\nu^jN_j|d_3v=\Delta\sigma, \qquad (6.23)$$

что позволяет представить закон сохранения (6.21) в самой простой форме

$$\int\limits_{V_3'}\psi\varphi\Delta\sigma=\int\limits_{V_3''}\psi\varphi\Delta\sigma. \qquad (6.24)$$

§ 3. Пространство — время, допускающее группу движений

Мы выяснили, каким образом можно выбрать векторное поле λ_i, такое, чтобы правая часть (6.10) обращалась в нуль, что приводит к интегральному закону сохранения (6.11). Эта процедура оказывается проще, если пространство — время допускает группу движений.

Понятие группы движений можно разъяснить следующим образом[1]). Рассмотрим в пространстве — времени (фиг. 64) конгруэнцию кривых (C),

[1]) Более последовательно этот вопрос рассмотрел Эйзенхарт [311]. Классификацию V_4 и пространств Эйнштейна, в частности, по группам движений см. Петров [903], гл. IV, V.—*Прим. ред.*

на каждой из которых задан параметр u, и, следовательно, определенный касательный вектор

$$\xi^i = \frac{dx^i}{du}. \qquad (6.25)$$

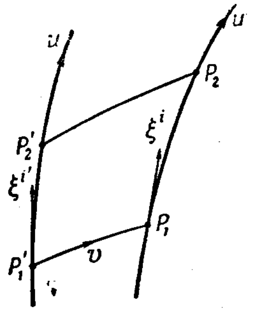
Возьмем две произвольные точки P_1 и P_1', и пусть значения параметра в этих точках равны u_1 и u_1' соответственно. Сместим теперь эти точки вдоль C так, чтобы они заняли положения P_2 и P_2' со значениями параметра u_2 и u_2', где

$$u_2 = u_1 + \Delta u, \quad u_2' = u_1' + \Delta u. \qquad (6.26)$$

Исходя из понятия мировой функции[1]), говорят, что пространство — время *допускает группу движений*, если

$$\Omega(P_2P_2') = \Omega_{i'}(P_1P_1') \qquad (6.27)$$

при условии, что это соотношение справедливо для каждой пары выбранных нами точек P_1 и P_1' и для каждого значения приращения Δu.



Фиг. 64. Пространство — время, допускающее группу движений.

Очевидно, что (6.27) эквивалентно уравнению

$$\Omega_i\xi^i + \Omega_{i'}\xi^{i'} = 0, \qquad (6.28)$$

где левая часть представляет собой двуточечный инвариант для произвольной пары точек P, P'. Если v — канонический параметр на геодезической $P'P$ и $V^i = dx^i/dv$ (так что $\delta V^i/\delta v = 0$), то в силу (2.17) уравнение (6.28) эквивалентно следующему:

$$V^i\xi_i - V^{i'}\xi_{i'} = 0. \qquad (6.29)$$

Определим Ψ с помощью соотношения

$$\Psi = V^i\xi_i - V^{i'}\xi_{i'}, \qquad (6.30)$$

где ξ_i означает векторное поле. Дифференцируя вдоль геодезической $P'P$, получаем

$$\frac{d\Psi}{dv} = V^i\xi_{i|j}V^j. \qquad (6.31)$$

Поскольку с очевидностью $\Psi = 0$, когда $P' = P$, то, следовательно, необходимое и достаточное условие того, чтобы ξ_i определяли группу движений, записывается как

$$\xi_{i|j} + \xi_{j|i} = 0. \qquad (6.32)$$

Эти десять уравнений называются *уравнениями Киллинга*. Мы будем называть ξ_i *вектором Киллинга*, а $\xi_{i|j}$ — *тензором Киллинга*. Заметим, что этот тензор кососимметричен. Ниже рассматриваются некоторые свойства вектора и тензора Киллинга. Согласно (1.94),

$$\xi_{i|jk} - \xi_{i|kj} = R_{aijk}\xi^a. \qquad (6.33)$$

Производя две циклические перестановки индексов ijk, складывая полученные результаты и используя (6.32) и (1.90), получаем

$$\xi_{i|jk} + \xi_{j|ki} + \xi_{k|ij} = 0. \qquad (6.34)$$

---

[1]) Определение группы движений можно сформулировать также в терминах бесконечно малых, беря точки p_1 и p_1' соседними, а приращение Δu — бесконечно малым.

Будем говорить, что тензор Киллинга имеет *нулевую циклическую дивергенцию*. Если ввести дуальный тензор с помощью соотношения

$$\xi^{*ij}=\frac{1}{2}\eta^{ijkm}\xi_{k|m}, \tag{6.35}$$

то мы получим

$$\xi^{*ij}{}_{|j}=0. \tag{6.36}$$

Применив (6.32) к первому члену в (6.34), придем к соотношению

$$-\xi_{j|ik}+\xi_{j|ki}+\xi_{k|ij}=0. \tag{6.37}$$

Здесь первые два члена можно объединить, согласно (6.33), и, следовательно, ковариантную производную второго порядка от вектора Киллинга можно записать через тензор Римана и сам вектор Киллинга следующим образом:

$$\xi_{k|ij}=R_{ajik}\xi^{a}=R_{kija}\xi^{a}. \tag{6.38}$$

Умножив это выражение на g^{ij}, получаем (через обобщенный даламбертиан)

$$\Box\,\xi_{k}=g^{ij}\xi_{k|ij}=R_{ka}\xi^{a}. \tag{6.39}$$

Так как трехмерный элемент объема $d\tau^{ijk}$ кососимметричен по каждой паре индексов, то из (6.34) следует, что

$$\xi_{i|jk}d\tau^{ijk}=0. \tag{6.40}$$

Следовательно, в силу (6.6) для любого замкнутого V_2 справедливо

$$\oint\limits_{V_2}\xi_{i|j}d\tau^{ij}=0. \tag{6.41}$$

Если в формуле (6.10) вместо λ_i подставить ξ_i, то правая часть в силу (6.32) обращается в нуль, и, следовательно, для пространства — времени, допускающего группу движений с вектором Киллинга ξ_i, справедлив интегральный закон сохранения

$$\oint\limits_{V_3}\varepsilon(N)\,G^{ij}\xi_i N_j d_3v=0. \tag{6.42}$$

§ 4. Интегральные законы сохранения, связанные с тензором Римана

Те части V_3, которые относятся к пустым областям пространства — времени, не вносят никакого вклада в сохраняющиеся интегралы в формулах (6.11) и (6.42), так как в таких областях $G_{ij}=0$. Однако можно предполагать, что гравитационное поле должно дать свой вклад даже в пустом пространстве — времени, и поэтому мы обратимся к интегральным законам сохранения, связанным не с G_{ij}, а с R_{ijkm}.

Если F^{ij} — некоторый кососимметричный тензор, то, как и в (6.6),

$$\oint\limits_{V_2}F^{ij}R_{ijkm}d\tau^{km}=\int\limits_{V_3}F^{ij}_{\ |n}R_{ijkm}d\tau^{kmn}. \tag{6.43}$$

Член, появившийся в результате дифференцирования тензора Римана, исчез, поскольку вследствие тождества Бианки (1.98)

$$R_{ijkm|n}d\tau^{kmn}=0. \tag{6.44}$$

Следовательно, независимо от природы F^{ij}, выполняется интегральный закон сохранения

$$\oint\limits_{V_3} F^{ij}{}_{|n} R_{ijkm} d\tau^{kmn} = 0. \tag{6.45}$$

Наша задача состоит в том, чтобы подобрать какой-то тензор F^{ij}, который определялся бы геометрией пространства — времени, а закон, получающийся при его подстановке в (6.45), напоминал в какой-то мере ньютоновские законы сохранения.

Мы могли бы, например, взять в качестве F^{ij} собственный тензор[1]) тензора Римана, т. е. тензор, удовлетворяющий уравнениям вида

$$F^{ij} R_{ijkm} = \varphi F_{km}. \tag{6.46}$$

Однако для стоящей перед нами сейчас задачи этот выбор не приводит к интересным результатам, и мы не станем рассматривать этот случай глубже.

Вместо него возьмем мировую функцию $\Omega(P, P')$, где P — текущая точка (событие) интегрирования, а P' — некоторая *базисная точка*, которая на протяжении дальнейших рассуждений считается фиксированной. Положим

$$F^{ij}_{a'} = -\frac{1}{4} \varkappa^{-1} \eta^{ijpq} \Omega_p \Omega_{a'q}, \quad \varkappa = 8\pi. \tag{6.47}$$

Эта величина ведет себя как кососимметричный тензор относительно преобразований координат точки P и как ковариантный вектор по отношению к преобразованиям координат в точке P'. Выбирая некоторое замкнутое подпространство V_2, определим величину $M_{a'}$ с помощью соотношения

$$M_{a'} = \oint\limits_{V_2} F^{ij}_{a'} R_{ijkm} d\tau^{km}. \tag{6.48}$$

Она ведет себя как ковариантный вектор при преобразованиях координат в P'. Присутствие штрихованного индекса не нарушает равенства (6.43), и, следовательно,

$$M_{a'} = \int\limits_{V_3} F^{ij}_{a'|n} R_{ijkm} d\tau^{kmn}, \tag{6.49}$$

где V_3 — любое открытое трехмерное пространство, ограниченное V_2. Мы получили вполне определенную геометрическую величину, и ей необходимо дать название. Однако последнее представляет собой не лишенную опасностей процедуру, так как не исключено, что, выбирая какое-либо привлекательное название, мы внесем путаницу в употребление этого названия в других присущих ему смыслах. Из соображений, которые будут изложены позднее, мы назовем $M_{a'}$ *потоком полного 4-импульса через открытое трехмерное пространство V_3 относительно базисной точки P'*. Аналогичным образом, определим

$$F^{ij}_{a'b'} = \frac{1}{4} \varkappa^{-1} \eta^{ijpq} (\Omega_{a'p} \Omega_{b'} \Omega_q - \Omega_{b'p} \Omega_{a'} \Omega_q - \Omega \Omega_{a'p} \Omega_{b'q}). \tag{6.50}$$

[1]) Собственный тензор можно определить как некий бивектор, представляющий собой аналог собственного вектора двухвалентного симметричного тензора ($a_{\alpha\beta}\lambda^\beta = \varphi\lambda_\alpha$). — *Прим. ред.*

Относительно преобразований в точке P' эта величина является кососимметричным тензором. Положим

$$H_{a'b'}=\oint\limits_{V_2} F^{ij}_{a'b'}\, R_{ijkm}\, d\tau^{km}, \tag{6.51}$$

И, таким образом,

$$H_{a'b'}=\int\limits_{V_3} F^{ij}_{a'b'\,|\,n} R_{ijkm}\, d\tau^{kmn}. \tag{6.52}$$

Назовем $H_{a'b'}$ *потоком полного момента импульса через открытое трехмерное пространство* V_3 *относительно базисной точки* P'.

Какие бы названия мы не выбрали, важен лишь тот факт, что значения $M_{a'}$ и $H_{a'b'}$ не зависят от частного выбора открытого трехмерного пространства V_3, ограниченного каким-либо заданным замкнутым V_2. Эквивалентным образом, можно утверждать, что для любого *замкнутого* V_3

$$M_{a'}=0, \qquad H_{a'b'}=0. \tag{6.53}$$

Что касается базисной точки P', то можно с уверенностью ожидать (исходя из ньютоновской аналогии), что она (базисная точка P') будет фигурировать в определении момента импульса. Это может показаться неуместным в случае 4-импульса, но здесь следует помнить, что существование ньютоновского трехмерного закона сохранения импульса тесно связано с тем обстоятельством, что евклидово пространство допускает трансляции; для риманова же пространства — времени это в общем случае не имеет места.

Может показаться, что введение в приведенные выше рассуждения замкнутого V_2 приводит к появлению посторонних свойств. Однако этим самым мы просто откровенно признаем возможность появления расходимости в теориях, построенных на основе законов сохранения. Можно было бы допустить, что V_2 удаляется на пространственную бесконечность, и тогда, если тензор Римана достаточно быстро стремится к нулю, интегралы (6.48) и (6.51) могут сходиться к конечным пределам — следовательно, (6.49) и (6.52) будут тогда представлять собой конечные интегралы, сохраняющиеся во всем «пространстве».

Существует возможность использовать приведенные выше определения для получения инвариантного определения траектории движения центра масс всей материи во Вселенной. Эта возможность станет более реальной после того, как будут приняты изложенные ниже приближения. Пока же заметим, что для любого замкнутого V_2 уравнения

$$H_{a'b'}M^{b'}=0 \tag{6.54}$$

(число которых, если судить по виду, равно 4) связаны одним тождеством в силу кососимметричности H. Следовательно, они образуют систему трех уравнений для точки P' и, таким образом, задают *траекторию центра масс*, т. е. мировую линию[1]). Эта траектория зависит, вообще говоря, от выбора V_2, однако при выполнении упомянутых выше условий сходимости ее определению можно придать абсолютный смысл.

Приведем теперь формулы (6.49) и (6.52) к другому виду, который, разумеется, можно было установить с самого начала, если бы мы предпочли использовать теорему Грина, а не теорему Стокса, как было сделано.

---

[1]) Соответствующее определение для плоского пространства — времени дано в книге Синга ([1175], стр. 219).

Однако в этом случае сохранение было бы менее очевидным. Воспользуемся формулой (1.249), которая дает

$$d\tau^{kmn} = \varepsilon(N)\,\eta^{kmnr} N_r d_3 v, \qquad (6.55)$$

где N_r — единичная нормаль к V_3, а $d_3 v$ — инвариантный элемент объема. Тогда (6.49) имеет вид

$$M_{a'} = -\frac{1}{4}\varkappa^{-1}\int_{V_3} \eta^{ijpq}(\Omega_p \Omega_{a'q})_{|n} R_{ijkm}\,\varepsilon(N)\,\eta^{kmnr} N_r d_3 v =$$

$$= -\varkappa^{-1}\int_{V_3} (\Omega_p \Omega_{a'q})_{|n} \widetilde{R}^{pqnr}\varepsilon(N) N_r d_3 v, \qquad (6.56)$$

где $\widetilde{R}$ — дважды дуальный тензор [см. (1.115)]. Аналогичным образом,

$$H_{a'b'} = \varkappa^{-1}\int_{V_3} (\Omega_{a'p}\Omega_{b'}\Omega_q - \Omega_{b'p}\Omega_{a'}\Omega_q - \Omega\Omega_{a'p}\Omega_{b'q})_{|n} \widetilde{R}^{pqnr}\varepsilon(N) N_r d_3 v. \qquad (6.57)$$

Попытаемся теперь в некоторой степени обосновать названия, принятые нами для $M_{a'}$ и $H_{a'b'}$, проделав приближенные вычисления для случая слабого поля (приближение, для которого тензор Римана мал). Как мы знаем, для такого поля, согласно (2.95),

$$\Omega_{ij} = g_{ij} + O_1, \quad \Omega_{ij'} = -g_{ij'} + O_1, \qquad (6.58)$$

где $g_{ij'}$ — оператор параллельного переноса, а O_1 означает малую величину указанного порядка от тензора Римана. Все третьи производные Ω имеют порядок O_1 (см. гл. II, § 5). В формуле (6.56) $M_{a'}$ также имеет порядок O_1, и мы получаем

$$M_{a'} = \varkappa^{-1}\int_{V_3} g_{pn}\, g_{a'q} \widetilde{R}^{pqnr}\varepsilon(N) N_r d_3 v + O_2 \qquad (6.59)$$

и, следовательно, согласно (1.124),

$$M_{a'} = -\varkappa^{-1}\int_{V_3} g_{a'q} G^{qr}\varepsilon(N) N_r d_3 v + O_2. \qquad (6.60)$$

Пусть $\lambda^{a'}$ — произвольный единичный вектор в точке P', а λ^a — результат параллельного переноса вдоль геодезической $P'P$, так что

$$\lambda^{a'} g_{a'q} = \lambda_q. \qquad (6.61)$$

Умножив (6.60) на $\lambda^{a'}$, получим

$$M_{a'}\lambda^{a'} = -\varkappa^{-1}\int_{V_3} \lambda_q G^{qr}\varepsilon(N) N_r d_3 v + O_2 \qquad (6.62)$$

или с помощью тензора энергии (вспомним, что $G_{ij} = -\varkappa T_{ij}$)

$$M_{a'}\lambda^{a'} = \int_{V_3} \varepsilon(N) T^{qr}\lambda_q N_r d_3 v + O_2. \qquad (6.63)$$

Здесь мы сосредоточили основное внимание на главной части, записывающейся в виде интеграла, но в гл. II мы уже излагали метод, позволяющий провести расчеты и до порядка точности O_2.

Вернувшись теперь к (4.26), мы опознаем интеграл, входящий в (6.63): это поток 4-импульса, спроектированный на направление λ^q, через конечную «площадку» V_3. Этот интеграл не подчиняется закону сохранения. Поскольку $M_{a'}$ закону сохранения удовлетворяет, то остаточный член O_2 является существенным. Во избежание недоразумений

следует твердо различать истинные (точные) компоненты $M_{a'}$ и интеграл в (6.63). Если первую величину назвать потоком *полного* 4-импульса, то для второй подойдет название потока *механического* 4-импульса. Разность (O_2) можно рассматривать как поток *гравитационного* 4-импульса — последний существует в вакууме.

Выполним теперь аналогичное приближение для момента импульса. Подынтегральное выражение в (6.57) имеет вид

$$\begin{aligned}(g_{a'p}\, g_{b'n}\Omega_q - g_{a'p}\,\Omega_{b'}\, g_{qn} - g_{b'p}\, g_{a'n}\,\Omega_q + \\ + g_{b'p}\,\Omega_{a'}\, g_{qn} - \Omega_n\, g_{a'p}\, g_{b'q})\tilde{R}^{pqnr}\,\varepsilon(N)\, N_r + O_2 = \\ = g_{a'p}\, g_{b'n}\,\Omega_q\,(\tilde{R}^{pqnr} + \tilde{R}^{pnrq} + \tilde{R}^{prqn})\,\varepsilon(N)\, N_r + \\ + (\Omega_{a'}\, g_{b'p} - \Omega_{b'}\, g_{a'p})\, g_{qn}\tilde{R}^{pqnr}\varepsilon(N)\, N_r + O_2. \qquad (6.64)\end{aligned}$$

Здесь первый член в силу (1.120) обращается в нуль, и, следовательно, согласно (1.124), равенство (6.57) приобретает вид

$$H_{a'b'} = \varkappa^{-1}\int_{V_3}(\Omega_{a'}\, g_{b'p} - \Omega_{b'}\, g_{a'p})\, G^{pr}\varepsilon(N)\, N_r d_3 v + O_2. \qquad (6.65)$$

Пусть $\lambda^{a'}_{(c)}$ — ортонормированный 4-репер в точке P', а $\lambda^{a}_{(c)}$ — результат параллельного переноса его вдоль геодезической $P'P$, так что

$$\lambda^{a'}_{(c)}\, g_{a'p} = \lambda_{(c)\, p}, \qquad (6.66)$$

и пусть, как и в (2.150), квазидекартовы координаты точки P относительно точки P' имеют вид

$$X_{(c)} = -\Omega_{a'}\,\lambda^{a'}_{(c)}. \qquad (6.67)$$

Тогда (6.65) приводит к следующим значениям для инвариантных компонент $H_{a'b'}$ в данном 4-репере:

$$\begin{aligned}H_{(cd)} = H_{a'b'}\,\lambda^{a'}_{(c)}\,\lambda^{b'}_{(d)} = -\varkappa^{-1}\int_{V_3}(X_{(c)}\,\lambda^{p}_{(d)} - X_{(d)}\,\lambda^{p}_{(c)})\, G_{pr}\varepsilon(N)\, N^r d_3 v + O_2 = \\ = \int_{V_3}\varepsilon(N)\,(X_{(c)}\,\lambda^{p}_{(d)} - X_{(d)}\,\lambda^{p}_{(c)})\, T_{pr} N^r d_3 v + O_2. \qquad (6.68)\end{aligned}$$

Сравнивая полученное выражение с (4.26) и (6.2), мы видим, что интеграл в (6.68) представляет собой подходящее выражение для потока *механического* момента импульса. Как и в случае 4-импульса, подчеркнем, что $H_{a'b'}$ представляет собой поток *полного* момента импульса, а разность O_2 можно рассматривать как поток *гравитационного* момента импульса.

Итак, приближениям уделено достаточно внимания. Вернемся теперь к точным уравнениям (6.56) и (6.57). Каждое из них содержит интеграл по открытому V_3, причем оба подынтегральных выражения зависят от выбора базисной точки P'. Мы можем записать

$$\begin{aligned}M_{a'} = \int_{V_3} M^{r}_{a'}\,\varepsilon(N)\, N_r d_3 v, \\ H_{a'b'} = \int_{V_3} H^{r}_{a'b'}\,\varepsilon(N)\, N_r d_3 v,\end{aligned} \qquad (6.69)$$

где

$$M^r_{a'} = -\varkappa^{-1} (\Omega_p \Omega_{a'q})_{|n} \tilde{R}^{pqnr},$$
$$H^r_{a'b'} = \varkappa^{-1} (\Omega_{a'p} \Omega_{b'} \Omega_q - \Omega_{b'p} \Omega_{a'} \Omega_q - \Omega\Omega_{a'p} \Omega_{b'q})_{|n} \tilde{R}^{pqnr}. \qquad (6.70)$$

Последние величины представляют собой двухточечные тензоры с указанными выше трансформационными свойствами относительно точек P и P'. Выражения (6.70) не содержат величин, относящихся к V_3, и их можно рассматривать как локальные плотности 4-импульса и момента импульса, зависящие, однако, от выбора базисной точки P'. Выпишем по ходу дела следующие пределы совпадения при $P' \to P$:

$$[M^r_{a'}] = -\varkappa^{-1} G^r_a, \qquad [H^r_{a'b'}] = 0, \qquad (6.71)$$

Для слабого поля имеем

$$M^r_{a'} = -\varkappa^{-1} g_{a'q} G^{qr} + O_2,$$
$$H^r_{a'b'} = \varkappa^{-1} (\Omega_{a'} g_{b'p} - \Omega_{b'} g_{a'p}) G^{pr} + O_2. \qquad (6.72)$$

Существенное свойство сохранения состоит в том, что интегралы по замкнутому V_3, как и в (6.53), равны нулю. Это свойство сохраняется и в том случае, когда вместо одной базисной точки P' берется набор таких точек, а затем отдельные $M_{a'}$ и отдельные $M_{a'b'}$ складываются. Это наводит на мысль о том, что можно было бы устранить зависимость от базисной точки путем интегрирования по P' во всем пространстве — времени. Но мы не можем интегрировать ни векторы, ни тензоры, и лучшее, что можно сделать (не вводя дополнительные соотношения), это записать интегралы

$$\int\limits_{V_4} M_{a'} M^{a'} d_4 v', \qquad \int\limits_{V_4} H_{a'b'} H^{a'b'} d_4 v', \qquad \int\limits_{V_4} H_{a'b'} H^{*a'b'} d_4 v', \qquad (6.73)$$

где «звездочка» означает дуальный тензор:

$$H^{*a'b'} = \frac{1}{2} \eta^{a'b'c'd'} H_{c'd'}, \qquad (6.74)$$

а интегрирование в каждом случае проводится по области V_4 пространства — времени. Эти интегралы зависят лишь от замкнутого V_2, фигурирующего в (6.48) и (6.51), и от области V_4. Как уже отмечалось, устранить зависимость этих интегралов от выбора замкнутого двумерного пространства V_2 можно, расширяя последнее до пространственной бесконечности. При этом могли бы быть получены три абсолютных инварианта посредством деления интегралов в (6.73) на 4-объем V_4 (или на какую-либо степень этого 4-объема) и перехода к пределу при V_4, стремящемся охватить все пространство — время. Однако без предварительного исследования вопроса о сходимости в ряде специальных случаев результат такого расчета может оказаться сомнительным, поэтому мы оставим этот вопрос.

§ 5. Пространство — время, рассматриваемое с евклидовой точки зрения

Справедливость формул математического анализа является универсальной. Эти формулы описывают подавляющую часть всех связей между числами. Однако каждый математик время от времени обращается к геометрии, так как развитая пространственная интуиция часто позволяет нам осмысливать самые запутанные вопросы, обходясь без сложных аналитических формул. Даже в элементарной алгебре мы скорее понимаем классификацию корней квадратного уравнения с помощью изображения параболической кривой.

При графическом изображении (в широком смысле) мы интуитивно исходим из представления об евклидовом пространстве (обычно, двух или трех измерений). Привлекая аналогии, наша интуиция углубляется (возможно с несколько меньшей отчетливостью) даже в евклидовы пространства большего числа измерений. Таким образом, какими бы ни были физические свойства пространства (независимо от того, существует физическое пространство или нет), понятие евклидова пространства остается одним из тех, с которыми мы ни в коем случае не согласились бы расстаться.

В теории относительности мы имеем дело с *точками* (*событиями*); каждой точке (событию) соответствует набор четырех чисел x^i. Можно было бы построить теорию относительности, не обращаясь к языку геометрии, поскольку g_{ij} можно рассматривать с чисто аналитической точки зрения и оперировать только алгебраическими формулами. Метод этой книги иной. Наши усилия были направлены на то, чтобы описать природу с помощью геометрических картин в четырехмерном искривленном пространстве — времени, и нет нужды оправдывать применение столь мощного способа смотреть на вещи. Однако этот метод нравится далеко не всем. Существует категория физиков, которые предпочитают, когда в этом возникает необходимость, выяснять смысл своих формул не с помощью римановой геометрии, а прибегая к обычным представлениям евклидовой геометрии в указанном выше смысле. Именно к этому способу ориентироваться в формулах они прибегают, когда язык этих формул становится слишком сложным.

Попытаемся же взглянуть на теорию относительности с евклидовой точки зрения. При этом мы не будем иметь в виду ни в каком, самом косвенном смысле, ничего, что предполагало бы евклидовость пространства — времени. Евклидовы подмостки, которые мы построим, будут, разумеется, нашей собственной выделки и служить они будут лишь единственной цели — удобству восприятия.

Пусть V_4 — некоторая область пространства — времени или, что также возможно, все пространство — время. Пусть x^i — какая-нибудь система координат в V_4, такая, что имеет место взаимно однозначное соответствие между точкой (событием) и соответствующим ей набором четырех чисел x^i. Пусть g_{ij} — набор (десяти) симметричных функций координат, имеющих непрерывные первые производные. Пусть, однако, эти функции подчиняются некоторым алгебраическим условиям. Выберем три первые координаты x^α пространственноподобными, а четвертую x^4 — временноподобной. Это означает, что мы накладываем на g_{ij} условия[1])

$$g_{11} > 0, \quad g_{22} > 0, \quad g_{33} > 0, \quad g_{44} < 0. \tag{6.75}$$

Чтобы рассмотреть V_4 с евклидовой точки зрения, построим четырехмерное евклидово пространство с прямоугольными декартовыми координатами x^i, так чтобы каждая точка некоторой области этого пространства соответствовала V_4. Посмотрим, каким условиям (в терминах евклидовой геометрии) должны удовлетворять g_{ij} для того, чтобы форма $g_{ij}dx^i dx_j$ имела правильную сигнатуру.

Возьмем какую-нибудь точку A с координатами $x^i = a^i$ и запишем координаты x^i текущей точки P в виде

$$x^i = a^i + X^i \tag{6.76}$$

так, что X^i будут координатами точки P относительно точки A. Изо-

[1]) В точке, в которой $g_{ij} = 0$ $(i \neq j)$, автор для удобства сравнения с евклидовым пространством берет сигнатуру метрики в виде $(+ + + -)$.— *Прим. ред.*

тропный конус в точке A будет касательным к конусу, определяемому уравнением

$$g_{ij}X^iX^j=0, \tag{6.77}$$

где g_{ij} берутся в точке A (фиг. 65). Пересечение этого конуса с плоскостью $X^4=1$ определяет поверхность второго порядка

$$g_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta+2g_{\alpha 4}X^\alpha+g_{44}=0. \tag{6.78}$$

Основное требование для формы $g_{ij}\,dx^i\,dx^j$ сводится, по существу, к тому, чтобы уравнение (6.78) описывало *вещественный эллипсоид*. Если уравнение (6.78) определяет эллипсоид, то он имеет единственный центр, скажем, в точке $X^\alpha=Y^\alpha$, где

$$g_{\alpha\beta}Y^\beta+g_{\alpha 4}=0. \tag{6.79}$$

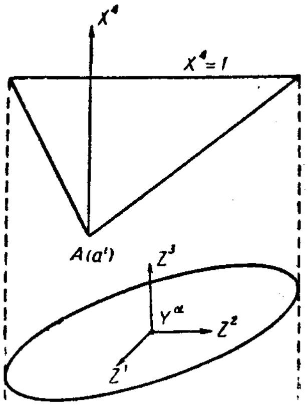
Следовательно,

$$\det g_{\alpha\beta}\neq 0. \tag{6.80}$$

Тогда можно определить $\gamma^{\alpha\beta}$ с помощью соотношения

$$\gamma^{\alpha\beta}g_{\alpha\gamma}=\delta^\beta_\gamma \tag{6.81}$$

и записать решение уравнения (6.79) в виде



Фиг. 65. Изотропный конус и его эллипсоидальное сечение, рассматриваемое с евклидовой точки зрения.

$$Y^\alpha=-\gamma^{\alpha\beta}g_{\beta 4}. \tag{6.82}$$

Полагая

$$Z^\alpha=X^\alpha-Y^\alpha, \tag{6.83}$$

запишем (6.78) в системе координат, начало которой совпадает с центром эллипсоида:

$$g_{\alpha\beta}Z^\alpha Z^\beta=\gamma^{\alpha\beta}g_{\alpha 4}g_{\beta 4}-g_{44}. \tag{6.84}$$

Если (6.84) есть уравнение эллипсоида, то квадратичная форма в левой его части должна быть определенной, а согласно (6.75), она должна быть положительно определенной. Подведем итог: если $g_{44}<0$, то условие (необходимое, а также и достаточное) того, что уравнение (6.78) описывает вещественный эллипсоид, формулируется просто: форма

$$g_{\alpha\beta}Z^\alpha Z^\beta \text{ — положительно определена}, \tag{6.85}$$

или, что эквивалентно, все три корня уравнения

$$\det(g_{\alpha\beta}-\theta\delta_{\alpha\beta})=0 \tag{6.86}$$

положительны. Заметим, что (6.85) при условии $g_{44}<0$ равносильно неравенству

$$\gamma^{\alpha\beta}g_{\alpha 4}g\quad-g_{44}>0. \tag{6.87}$$

Условие для g_{ij}, вытекающее из выбранного нами характера сигнатуры, имеет вид (6.85) при $g_{44}<0$.

Эти элементарные рассуждения изложены здесь столь подробно для того, чтобы дать иллюстрацию взаимосвязей алгебры с евклидовыми представлениями. Речь шла о римановом пространстве — времени, однако вопросы инвариантности метрической формы относительно преобразования координат общего вида мы совершенно обошли.

Когда мы мыслим пространство — время с евклидовой точки зрения, важное значение приобретают «прямые линии», определяемые уравнениями

$$x^i = ua^i + b^i, \qquad (6.88)$$

где u — параметр, а a^i и b^i — постоянные. Следует, однако, четко отличать эти линии от геодезических, удовлетворяющих уравнениям

$$\frac{d^2x^i}{du^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{du}\frac{dx^k}{du} = 0, \qquad (6.89)$$

где u — канонический параметр.

Рассмотрим теперь с евклидовой точки зрения теорему Грина. Формула (1.257) представляется удобной при некоторой привычке иметь дело с тензорами, ибо здесь инвариантно подынтегральное выражение и инвариантен элемент объема. Однако эта формула применима лишь в случае, когда интегрируется дивергенция векторного поля. Лучше вернуться снова к элементарной формуле (1.233) и обобщить ее на случай пространства — времени, рассматриваемого как евклидово в указанном выше смысле. В самом деле, обычный метод, обобщенный на случай евклидова четырехмерного пространства, сразу же приводит к формуле

$$\int\limits_{V_4} U_{,i}\, dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 = \oint\limits_{V_3} Un_i\, dS, \qquad (6.90)$$

где V_4 — область пространства — времени, ограниченная замкнутым V_3, n_i и dS представляют собой соответственно внешнюю единичную нормаль и трехмерный элемент объема V_3, причем и то и другое вычислены в предположении евклидовой метрики. Нет никаких оснований ограничиваться только одной функцией U; рассуждая по аналогии, получаем

$$\int\limits_{V_4} U^{jk}{}_{,i}\, dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 = \oint\limits_{V_3} U^{jk} n_i\, dS. \qquad (6.91)$$

Пусть уравнение, определяющее V_3, имеет вид

$$f(x) = 0, \qquad (6.92)$$

где $f(x)$ возрастает в направлении внешней нормали. Тогда

$$n_i = f_{,i}(f_{,j} f_{,j})^{-1/2}, \qquad (6.93)$$

и с помощью ортогонального проектирования получим

$$n_4 dS = \nu\, dx^1 dx^2 dx^3, \qquad (6.94)$$

где $\nu = +1$ или -1, в зависимости от того, положительно или отрицательно n_4. Таким образом, (6.91) можно записать в виде

$$\int\limits_{V_4} U^{jk}{}_{,i}\, dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 = \oint\limits_{V_3} U^{jk}\nu\left(\frac{f_{,i}}{f_{,4}}\right) dx^1 dx^2 dx^3. \qquad (6.95)$$

Если $U^{jk}n_k = 0$ на V_3, то $U^{jk}f_{,k} = 0$, и, полагая в равенстве (6.95) $i = k$, получаем

$$\int\limits_{V_4} U^{jk}{}_{,k}\, dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 = 0. \qquad (6.96)$$

§ 6. Уравнения движения изолированного тела

Обратимся снова к случаю изолированного тела, уже рассмотренному в гл. IV, § 7. Его траектория представляет собой трубку мировых линий, причем на стенке трубки (Σ)

$$T^{ij}N_j=0, \tag{6.97}$$

а внутри трубки

$$T^{ij}_{|j}=0. \tag{6.98}$$

Поскольку справедливы уравнения поля, то очевидно, что совершенно безразлично, будем ли мы оперировать с тензором Эйнштейна G_{ij} (геометрия) или с тензором энергии T_{ij} (физика). Мы воспользуемся второй возможностью.

Продолжая рассмотрение в духе предыдущего параграфа (т. е. встав на евклидову точку зрения) выпишем тензорное уравнение (6.98) в явном виде

$$T^{ij}_{|,j}+\Gamma^j_{aj}T^{ia}+\Gamma^i_{aj}T^{aj}=0. \tag{6.99}$$

Поскольку

$$\Gamma^j_{aj}=\frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g})_{,a}, \tag{6.100}$$

(6.99) можно записать в виде

$$\mathcal{T}^{ij}_{,i}=\Gamma^i, \tag{6.101}$$

где

$$\mathcal{T}^{ij}=\sqrt{-g}\,T^{ij} \tag{6.102}$$

и

$$\Gamma^i=-\Gamma^i_{ab}\mathcal{T}^{ab}. \tag{6.103}$$

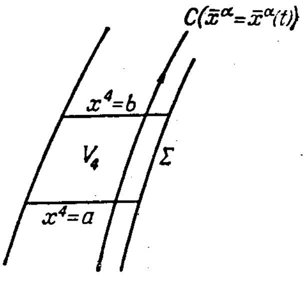
Хотя мы преднамеренно избегаем тензорных воззрений, заметим мимоходом, что $\mathcal{T}^{ij}$ — тензорная плотность или относительный тензор веса 1 (Синг и Шилд [1190], стр. 198, 241).

Рассечем теперь мировую трубку в поперечном направлении двумя плоскостями ($x^4=a$ и $x^4=b$, см. фиг. 66) и обозначим через V_4 область пространства — времени, ограниченную этими плоскостями и поверхностью Σ. С помощью теоремы Грина в форме (6.95) получим

$$\int\limits_{V_4}\mathcal{T}^{ij}{}_{,j}\,d^4x=\oint\limits_{V_3}\mathcal{T}^{ij}\nu\left(\frac{f_{,j}}{f_{,4}}\right)d_3x, \tag{6.104}$$

где для краткости взято

$$d^4x=dx^1dx^2dx^3dx^4,\qquad d^3x=dx^1dx^2dx^3, \tag{6.105}$$



Фиг. 66. Мировая трубка, рассеченная евклидовым способом.

а $f(x)=0$ — уравнение замкнутого V_3, образованного с помощью Σ и двух плоских сечений. Теперь, ввиду (6.97), мы имеем

$$\mathcal{T}^{ij}f_{,j}=0 \quad \text{на} \quad \Sigma,$$

$$\frac{f_{,j}}{f_{,4}}=\delta^j_4 \quad \text{на} \quad x^4=a \quad \text{и} \quad x^4=b, \tag{6.106}$$

$$\nu=1 \quad \text{на} \quad x^4=b,\quad \nu=-1 \quad \text{на} \quad x^4=a.$$

Следовательно, (6.104) дает

$$\int\limits_{V_4} \mathcal{T}^{ij}{}_{,j}\, d^4x = \int\limits_{x^4=b} \mathcal{T}^{i4}\, d^3x - \int\limits_{x^4=a} \mathcal{T}^{i4}\, d^3x, \tag{6.107}$$

или, согласно (6.101),

$$\int\limits_{x^4=b} \mathcal{T}^{i4}\, d^3x - \int\limits_{x^4=a} \mathcal{T}^{i4}\, d^3x = \int\limits_{V_4} \Gamma^i\, d^4x. \tag{6.108}$$

Производя деление на $(b-a)$ и переходя к пределу при $b \to a$, получаем

$$\frac{d}{dx^4} \int \mathcal{T}^{i4}\, d^3x = \int \Gamma^i\, d^3x, \tag{6.109}$$

где интеграл берется по некоторому сечению $x^4 = \text{const}$.

Аналогичным образом можно вывести другую формулу. Мы имеем

$$(x^k \mathcal{T}^{ij})_{,j} = \mathcal{T}^{ik} + x^k \mathcal{T}^{ij}{}_{,j} = \mathcal{T}^{ik} + x^k \Gamma^i, \tag{6.110}$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{x^4=b} x^k \mathcal{T}^{i4}\, d^3x - \int\limits_{x^4=a} x^k \mathcal{T}^{i4}\, d^3x = \int\limits_{V_4} (\mathcal{T}^{ik} + x^k \Gamma^i)\, d^4x. \tag{6.111}$$

Придавая k значения 1, 2, 3 (обозначаемые греческими индексами) и переходя, как и ранее, к пределу, получаем

$$\frac{d}{dx^4} \int x^\alpha \mathcal{T}^{i4}\, d^3x = \int (\mathcal{T}^{i\alpha} + x^\alpha \Gamma^i)\, d^3x. \tag{6.112}$$

При $i = 4$ это уравнение дает

$$\frac{d}{dx^4} \int x^\alpha \mathcal{T}^{44}\, d^3x = \int (\mathcal{T}^{4\alpha} + x^\alpha \Gamma^4)\, d^3x. \tag{6.113}$$

С другой стороны, если взять в (6.112) вместо i индекс β, поменять местами α и β, произвести вычитание и учесть свойства симметрии тензора $\mathcal{T}^{ij}$, то получится

$$\frac{d}{dx^4} \int (x^\alpha \mathcal{T}^{\beta 4} - x^\beta \mathcal{T}^{\alpha 4})\, d^3x = \int (x^\alpha \Gamma^\beta - x^\beta \Gamma^\alpha)\, d^3x. \tag{6.114}$$

Чтобы записать полученные ранее уравнения в более компактном виде, введем новые обозначения. Кроме того, чтобы добиться большей физической наглядности, примем некоторые названия. Определим[1])

$$\begin{aligned} &\text{4-импульс тела} &&= M^i = \int \mathcal{T}^{i4}\, d^3x, \\ &\text{Момент импульса тела} &&= H^{\alpha\beta} = \int (x^\alpha \mathcal{T}^{\beta 4} - x^\beta \mathcal{T}^{\alpha 4})\, d^3x, \\ &\text{Центр масс тела} &&= \bar{x}^\alpha, \quad M^4 \bar{x}^\alpha = \int x^\alpha \mathcal{T}^{44}\, d^3x. \end{aligned} \tag{6.115}$$

Заметим, что

$$\int (x^\alpha - \bar{x}^\alpha)\, \mathcal{T}^{44}\, d^3x = 0. \tag{6.116}$$

---

[1]) В основных чертах (но не во всех деталях) мы следуем методу Ланчоса [605]. Определения (6.115) используются лишь временно; они противоречат самому духу книги, поскольку приписывают физические названия величинам, не имеющим инвариантного определения.

При вращениях осей координат это выражение преобразуется как 3-вектор, и, если принять естественное допущение [см. (4.146а)]

$$\mathcal{T}^{44} > 0, \tag{6.117}$$

то отсюда следует, что каждая плоскость, проходящая через центр масс, пересекает данное тело. Следовательно, если тело выпуклое, центр масс лежит внутри его.

Если положить $x^4 = t$, то из уравнений (6.109) и (6.114) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{dM^i}{dt} &= \int \Gamma^i \, d^3x, \\ \frac{dH^{\alpha\beta}}{dt} &= \int (x^\alpha \Gamma^\beta - x^\beta \Gamma^\alpha) \, d^3x. \end{aligned} \tag{6.118}$$

Кроме того, в силу (6.113)

$$\frac{d}{dt}(M^4 \bar{x}^\alpha) = M^\alpha + \int x^\alpha \Gamma^4 \, d^3x, \tag{6.119}$$

откуда для 3-скорости центра масс получим следующее выражение:

$$\frac{d\bar{x}^\alpha}{dt} = \frac{M^\alpha}{M^4} + \frac{1}{M^4} \int (x^\alpha - \bar{x}^\alpha) \, \Gamma^4 \, d^3x. \tag{6.120}$$

Замечательная особенность приведенных выше рассуждений состоит в том, что, выйдя за рамки требования тензорной инвариантности, мы пришли к нескольким чрезвычайно простым уравнениям, допускающим физическое истолкование. Согласно (6.118), скорости изменения 4-импульса и момента импульса выражаются через величины, которые можно рассматривать как гравитационную силу и момент силы, действующие на тело, в том смысле, что, если отсутствует гравитационное поле, а координаты выбраны так, что Γ^i_{jk} обращаются в нуль, то и упомянутая 4-сила и момент силы также обращаются в нуль. Далее, если в уравнении (6.120) пренебречь последним членом, то оно будет означать, что 4-импульс M^i направлен вдоль 4-скорости $\bar{V}^i$ центра масс.

Однако в каком положении мы сейчас относительно принципов инвариантности? С самого начала мы опирались на геометрические понятия: трубка мировых линий, метрический тензор и симметричный тензор T^{ij}, удовлетворяющий (6.97) и (6.98). Но, как только было произведено поперечное сечение мировой трубки, все последующие результаты стали зависеть от вида этого сечения. Кроме того, координаты в наших рассуждениях были также введены неинвариантным способом. Поскольку с точностью до некоторых общих ограничений здесь применима любая система координат, то следует признать, что мы получили для центра масс *не единственную* мировую линию C, а множество таких мировых линий. Аналогично *неоднозначным* образом определены 4-импульс M^i и момент импульса $H^{\alpha\beta}$. Таким образом, перед нами открывается интересная возможность — восстановить единственность и инвариантность результатов, прибегнув к некоторому статистическому методу, который позволил бы учесть все возможные выборы систем координат. Однако такого рода честолюбивая программа, пожалуй, не для этой книги.

Вместо этого мы обратимся к точным уравнениям, выписанным выше, и попробуем найти приближения, с помощью которых можно «доказать» справедливость гипотез о геодезических; для этого нужно показать, что центр масс бесконечно малого тела движется по геодезической.

Переходя к приближенным вычислениям, полезно выяснить вопрос о размерностях входящих в них величин[1]). Масса, длина и время имеют

[1]) См. замечания относительно бесконечно малых в гл. II, § 3.

одинаковую размерность (обозначим ее $[t]$). Будем использовать координаты размерности $[t]$. Тогда

$$\begin{aligned} &[g_{ij}]=[t^0], && [\Gamma^i_{jk}]=[t^{-1}], \\ &[T^{ij}]=[\mathcal{T}^{ij}]=[t^{-2}], && [\Gamma^i]=[t^{-3}], \\ &\left[\int \Gamma^i d^3x\right]=[t^0], && [M^i]=[t], \\ &\left[\int (x^\alpha-\bar{x}^\alpha)\,\Gamma^4 d^3x\right]=[t]. \end{aligned} \tag{6.121}$$

Последний член в уравнении (6.120) оказывается безразмерным и при прочих равных условиях стремится к нулю при стремлении к нулю объема рассматриваемого тела. Кроме того, в случае слабого поля можно, попросту выражаясь, считать Γ^i_{jk} малыми. Следовательно, в случае, когда размеры тела малы, этим членом можно пренебречь, и тогда (6.120) принимает вид

$$\frac{d\bar{x}^\alpha}{dt}=\frac{M^\alpha}{M^4}. \tag{6.122}$$

Следующий шаг несколько более сомнителен. Мы хотим считать Γ^i_{jk} постоянными на сечениях $t=\text{const}$. Чтобы обосновать приемлемость этого допущения, мы утверждаем, что, если $\mathcal{T}^{ij}$ малы (по сравнению с чем?), то влияние тела на поле оказывается очень малым, и поле определяется главным образом другими телами (последние не конкретизируются). Следовательно, Γ^i_{jk} на протяжении малого сечения меняются незначительно. Таким образом, мы имеем (заметим, что рассматриваемая величина является безразмерной)

$$\int \Gamma^i d^3x=-\int \Gamma^i_{mn}\mathcal{T}^{mn}d^3x=-\bar{\Gamma}^i_{mn}\,\varphi^{mn}, \tag{6.123}$$

где

$$\varphi^{mn}=\int \mathcal{T}^{mn}d^3x, \qquad \varphi^{i4}=M^i. \tag{6.124}$$

Здесь $\bar{\Gamma}^i_{mn}$ записаны в системе центра масс. Таким образом, из (6.118) следует, что

$$\frac{dM^i}{dt}=-\bar{\Gamma}^i_{mn}\,\varphi^{mn}. \tag{6.125}$$

С помощью дифференцирования (6.122) получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2\bar{x}^\alpha}{dt^2}&=(M^4)^{-2}\left(\bar{\Gamma}^4_{mn}M^\alpha-\bar{\Gamma}^\alpha_{mn}M^4\right)\varphi^{mn}= \\ &=(M^4)^{-1}\left(\bar{\Gamma}^4_{mn}\frac{d\bar{x}^\alpha}{dt}-\bar{\Gamma}^\alpha_{mn}\right)\varphi^{mn}, \end{aligned} \tag{6.126}$$

или

$$M^4\frac{d^2\bar{x}^\alpha}{dt^2}+\bar{\Gamma}^\alpha_{mn}\varphi^{mn}=\bar{\Gamma}^4_{mn}\varphi^{mn}\frac{d\bar{x}^\alpha}{dt}. \tag{6.127}$$

Эти уравнения имеют смысл *уравнений движения центра масс*.

Вводя в рассмотрение плотность, 4-скорость и натяжения, получаем

$$\mathcal{T}^{ij}=\sqrt{-g}\,(\mu V^iV^j-S^{ij}). \tag{6.128}$$

Предположим, что уравнения

$$\int \mu V^iV^j\sqrt{-g}\,d^3x=\bar{V}^i\bar{V}^j\int \mu\sqrt{-g}\,d^3x, \tag{6.129}$$

$$\int S^{ij}\sqrt{-g}\,d^3x=0. \tag{6.130}$$

где $\overline{V}^i$ означает 4-скорость центра масс, так что

$$\frac{d\overline{x}^i}{dt} = \frac{\overline{V}^i}{\overline{V}^4} \tag{6.131}$$

удовлетворяются настолько точно, что их можно использовать в (6.127). Тогда в силу (6.124)

$$\varphi^{mn} = \overline{V}^m \overline{V}^n \int \mu \sqrt{-g}\, d^3x, \quad M^4 = \varphi^{44}. \tag{6.132}$$

Если положить $\overline{x}^4 = t$ и задать α в (6.127) равным 4, то получится тождество. В таком случае индекс α в (6.127) можно заменить индексом i. С учетом (6.131) это дает

$$(\overline{V}^4)^2 \frac{d}{dt}\frac{\overline{V}^i}{\overline{V}^4} + \overline{\Gamma}^i_{mn} \overline{V}^m \overline{V}^n = \overline{\Gamma}^4_{mn} \overline{V}^m \overline{V}^n \frac{\overline{V}^i}{\overline{V}^4}. \tag{6.133}$$

На языке абсолютных производных это означает, что

$$\overline{V}^4 \frac{\delta \overline{V}^i}{\delta t} = \overline{V}^i \frac{\delta \overline{V}^4}{\delta t}. \tag{6.134}$$

Умножая (6.134) на $\overline{V}_i$, получаем $\delta \overline{V}^4/\delta t = 0$, и, следовательно,

$$\frac{\delta \overline{V}^i}{\delta t} = 0. \tag{6.135}$$

Это означает, что при *сделанных предположениях мировая линия центра масс является геодезичегкой.*

Трудно судить, насколько существенными окажутся полученные здесь выводы. Мы знаем, что, положив $S_{ij} = 0$, получим невзаимодействующую среду, для которой мировые линии представляют собой геодезические (см. гл. IV, § 4). Условие (6.130) оказывается несколько более слабым. Однако предположения (6.129) и (6.130) кажутся слишком эмпирическими, чтобы рассматривать приведенный анализ как *доказательство* того, что мировая линия малого изолированного тела является геодезической[1]).

§ 7. Псевдотензор

Пусть в пространстве — времени, рассматриваемом с евклидовой точки зрения (как в § 5), задан набор симметричных величин W^{ik} $(= W^{ki})$, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям в частных производных:

$$W^{ik}{}_{,k} = 0. \tag{6.136}$$

При желании можно полностью отвлечься от преобразования координат, приняв, что (6.136) выполняется в некоторой заданной системе координат x^i, и работая только с этими координатами. Однако в теории псевдотензора[2]), которую мы собираемся развить в данном параграфе, закон преобразования W^{ik} таков, что *уравнение* (6.136) имеет место для любых координат, несмотря на то, что W^{ik} не является тензором[3]), так же как $W^{ik}{}_{,k}$ не является вектором в тензорном смысле.

[1]) Изложить этот вопрос в духе работ Инфельда и Шилда [489], Папапетроу [857], Коринальдези и Папапетроу [170] мне представляется затруднительным.

[2]) Псевдотензор был введен Эйнштейном [259] (см. Бергман [38], Мёллер [767]). Мы следуем здесь другому пути, предложенному Ландау и Лифшицем ([612], стр. 351). Как и следует из названия, псевдотензор *не* является тензором, и полученные с ним законы сохранения носят нетензорный характер.

[3]) Величину W^{ik} точнее было бы назвать объектом.— *Прим. ред.*

Интегрируя (6.136) по конечному трехмерному пространству $x^4 = \mathrm{const}$, получаем

$$\int W^{ik}_{,k} d^3x = 0, \quad d^3x = dx^1 dx^2 dx^3. \tag{6.137}$$

В предположении, что на пространственной бесконечности компоненты W^{ik}, отвечающие значениям $k = 1, 2, 3$, достаточно быстро стремятся к нулю, получим из (6.137)

$$\frac{d}{dx^4}\int W^{i4} d^3x = 0, \tag{6.138}$$

так что, рассматривая все сечения $x^4 = \mathrm{const}$, мы имеем

$$\int W^{i4} d^3x = \varkappa M^i, \tag{6.139}$$

где M^i — четыре постоянных, не зависящих от x^4. Константа $\varkappa\,(=8\pi)$ введена лишь с целью упрощения последующих формул.

До сих пор мы не учитывали *симметрию* W^{ik}. Ее свойства таковы, что

$$(x^i W^{jk} - x^j W^{ik})_{,k} = 0, \tag{6.140}$$

и рассуждения, аналогичные вышеизложенным, приводят к соотношению

$$\int (x^i W^{j4} - x^j W^{i4})\, d^3x = \varkappa H^{ij}, \tag{6.141}$$

где $H^{ij}\,(=-H^{ji})$ — шесть постоянных, не зависящих от x^4.

Теперь следует так выбрать W^{ik}, чтобы (6.139) и (6.141) можно было использовать как «законы сохранения», — (6.139) для 4-импульса, а (6.141) для момента импульса. Чтобы произвести этот выбор, воспользуемся следующим математическим тождеством [1]):

$$gG^{ik} = -\frac{1}{2} U^{ijkm}_{,jm} + V^{ik}. \tag{6.142}$$

Здесь G^{ik} — ковариантная форма тензора Эйнштейна, а

$$U^{ijkm} = g\,(g^{ik}g^{jm} - g^{im}g^{jk}). \tag{6.143}$$

Что касается V^{ik}, то его выражение, оказываясь весьма сложным, зависит, однако, лишь от метрического тензора и его *первых* производных. Мы вычислим его позже, а сначала выясним, как нужно пользоваться формулой (6.142).

Мы видим, что U^{ijkm} имеет такие же свойства симметрии, что и тензор Римана R^{ijkm}. Отсюда легко усмотреть, что V^{ik} симметричен и, кроме того, что

$$U^{ijkm}_{,jmk} = 0. \tag{6.144}$$

Последнее соотношение играет существенную роль. В силу (6.144) тензор W^{ik}, определяемый формулой

$$W^{ik} = -gG^{ik} + V^{ik} = \frac{1}{2} U^{ijkm}_{,jm}, \tag{6.145}$$

оказывается не только симметричным, но и удовлетворяет уравнениям (6.136), а следовательно, и (6.139) и (6.141) (при условии, что необходимые условия на бесконечности выполняются, а мы предполагаем, что

---

1) Это тождество можно рассматривать как определение V^{ik}.

это так). Учитывая уравнения поля

$$G^{ik} = -\varkappa T^{ik}, \quad \varkappa = 8\pi, \tag{6.146}$$

определим *псевдотензор энергии* t^{ik} как

$$t^{ik} = \varkappa^{-1} g^{-1} V^{ik}, \tag{6.147}$$

так что (6.145) можно записать в виде

$$W^{ik} = \varkappa g (T^{ik} + t^{ik}). \tag{6.148}$$

Из (6.139) и (6.141) теперь следует, что

$$\int g (T^{i4} + t^{i4}) d^3x = M^i, \tag{6.149}$$

$$\int g [x^i (T^{j4} + t^{j4}) - x^j (T^{i4} + t^{i4})] d^3x = H^{ij}, \tag{6.150}$$

где M^i и H^{ij} — постоянные, не зависящие от x^4. Вид этих уравнений говорит, что их следует рассматривать как уравнения сохранения 4-импульса M^i и момента импульса H^{ij}. При определенных условиях на бесконечности, в конкретное описание которых мы не станем слишком детально углубляться, эти уравнения математически корректны. Однако придать им физическую интерпретацию представляется несколько затруднительным, так как, хотя (6.149) и (6.150) и справедливы в любой выбранной системе координат, постоянные M^i и H^{ij} при переходе от одной системы координат к другой изменяются далеко не простым образом. Сечение $x^4 = \text{const}$, используемое при интегрировании, зависит, разумеется, от выбора координат.

Нам остается вычислить входящий в (6.142) тензор V^{ik}. Воспользуемся для этого следующими тождествами [см. (1.88) и (1.105)]:

$$\begin{aligned} \Gamma^i_{ab,c} - \Gamma^i_{ac,b} &= R^i_{\cdot acb} - \Gamma^p_{ab}\Gamma^i_{pc} + \Gamma^p_{ac}\Gamma^i_{pb}, \\ \Gamma^p_{pb,a} - \Gamma^p_{ab,p} &= R_{ab} - \Gamma^p_{aq}\Gamma^q_{bp} + \Gamma^p_{ab}\Gamma^q_{pq}. \end{aligned} \tag{6.151}$$

Из (6.143) получаем

$$(g^{-1}U^{ijkm})_{|p} = 0 \tag{6.152}$$

и, следовательно, с учетом (1.8)

$$U^{ijkm}_{\ \ ,p} = 2\Gamma^a_{ap}U^{ijkm} - \Gamma^i_{ap}U^{ajkm} - \Gamma^j_{ap}U^{iakm} - \Gamma^k_{ap}U^{ijam} - \Gamma^m_{ap}U^{ijka}. \tag{6.153}$$

Полагая $p = j$ и учитывая симметрию U^{ijkm}, получаем

$$U^{ijkm}_{\ \ ,j} = \Gamma^a_{aj}U^{ijkm} - \Gamma^k_{aj}U^{ijam} - \Gamma^m_{aj}U^{ijka}. \tag{6.154}$$

После дифференцирования имеем

$$U^{ijkm}_{\ \ ,jm} = A^{ik} + B^{ik}, \tag{6.155}$$

где

$$\begin{aligned} A^{ik} &= \Gamma^a_{aj,m}U^{ijkm} - \Gamma^k_{aj,m}U^{ijam} - \Gamma^m_{aj,m}U^{ijka}, \\ B^{ik} &= \Gamma^a_{aj}U^{ijkm}_{\ \ ,m} - \Gamma^k_{aj}U^{ijam}_{\ \ ,m} - \Gamma^m_{aj}U^{ijkv}_{\ \ ,m}. \end{aligned} \tag{6.156}$$

Заметим, что в A^{ik} содержатся вторые производные g_{ij}, тогда как в B^{ik} они отсутствуют. Мы можем записать

$$A^{ik} = U^{ijkm}(\Gamma^p_{pj,m} - \Gamma^p_{mj,p}) + \frac{1}{2}U^{ijam}\left(\Gamma^k_{jm,a} - \Gamma^k_{ja,m}\right) \tag{6.157}$$

и, следовательно, в силу (6.151)

$$A^{ik}=U^{ijkm}R_{jm}+\frac{1}{2}U^{ijam}R^{k}_{\cdot jam}+U^{ijkm}\left(\Gamma^{p}_{mj}\Gamma^{q}_{pq}-\Gamma^{p}_{mq}\Gamma^{q}_{jp}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}U^{ijam}\left(\Gamma^{p}_{ja}\Gamma^{k}_{pm}-\Gamma^{p}_{jm}\Gamma^{k}_{pa}\right). \qquad (6.158)$$

Однако

$$\begin{aligned}U^{ijkm}R_{jm}&=g\left(g^{ik}g^{jm}-g^{im}g^{jk}\right)R_{jm}=g\left(g^{ik}R-R^{ik}\right),\\ U^{ijam}R^{k}_{\cdot jam}&=g\left(g^{ia}g^{jm}-g^{im}g^{ja}\right)R^{k}_{\cdot jam}=-2gR^{ik}\end{aligned} \qquad (6.159)$$

и, таким образом, (6.155) можно записать в виде

$$U^{ijkm}_{,jm}=-2gG^{ik}+2V^{ik}, \qquad (6.160)$$

где

$$2V^{ik}=U^{ijkm}\left(\Gamma^{p}_{mj}\Gamma^{q}_{pq}-\Gamma^{p}_{mq}\Gamma^{q}_{jp}\right)+U^{ijam}\Gamma^{p}_{ja}\Gamma^{k}_{pm}+B^{ik}. \qquad (6.161)$$

Ясно, что V^{ik} не зависит от вторых производных g_{ij}. Чтобы довести вычисления до конца, подсчитаем с помощью (6.153) и (6.154) производные, входящие в B^{ik}. Мы получим

$$\begin{aligned}2V^{ik}&=U^{iakb}D_{ab}+U^{iabc}E^{k}_{\cdot abc}+U^{kabc}E^{i}_{\cdot abc}+U^{abcd}\Gamma^{i}_{ad}\Gamma^{k}_{bc},\\ D_{ab}&=\Gamma^{p}_{pa}\Gamma^{q}_{qb}+\Gamma^{p}_{qa}\Gamma^{q}_{pb}-2\Gamma^{p}_{ab}\Gamma^{q}_{pq},\\ E^{k}_{\cdot abc}&=-\Gamma^{k}_{ab}\Gamma^{p}_{pc}-\Gamma^{p}_{ab}\Gamma^{k}_{pc}.\end{aligned} \qquad (6.162)$$

Глава VII

ПОЛЯ СО СФЕРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ

§ 1. Пространство—время постоянной кривизны (пространство де Ситтера)

Самое простое из всех римановых пространств — плоское пространство — время Минковского. Оно соответствует физически полному отсутствию гравитационных полей и именно в нем строится специальная теория относительности. В общей теории относительности плоское пространство — время нас будет мало интересовать. Мы будем касаться этого понятия лишь в связи с вопросом об условиях на бесконечности (можно предположить, что на бесконечности гравитационное поле стремится к нулю[1])) и в связи с обсуждением плоских гравитационных волн в гл. IX (пространство — время плоско вне волны).

Следующим по степени простоты оказывается пространство — время постоянной кривизны. Если обозначить через K постоянную кривизну, то, согласно (1.101), имеем

$$\begin{aligned} R_{ijkm} &= K(g_{ik}g_{jm} - g_{jm}g_{jk}), \\ R_{ij} &= -3Kg_{ij}, \\ R &= -12K, \\ G_{ij} &= 3Kg_{ij}. \end{aligned} \tag{7.1}$$

С помощью уравнений поля (4.108), содержащих космологическую постоянную, получим

$$G_{ij} - \Lambda g_{ij} = -\varkappa T_{ij}, \quad \varkappa = 8\pi; \tag{7.2}$$

следовательно, тензор энергии в пространстве — времени постоянной кривизны K имеет вид

$$T_{ij} = \varkappa^{-1}(\Lambda - 3K)\,g_{ij}. \tag{7.3}$$

Все четыре собственных значения этого тензора равны друг другу, а его собственные векторы являются полностью неопределенными. Это не соответствует никакому реальному виду материи. Найти выход из создавшейся неудовлетворительной ситуации можно, лишь предположив, что космологическая постоянная Λ и постоянная кривизна K связаны соотношением[2])

$$\Lambda = 3K. \tag{7.4}$$

---

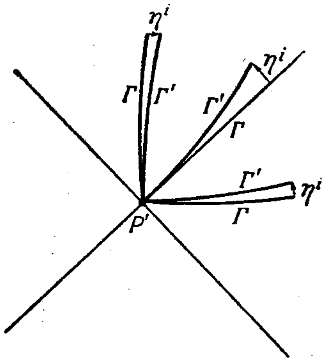
[1]) Можно строго доказать, что существуют целые классы пространств, удовлетворяющих уравнениям поля Эйнштейна, которые нигде не могут стремиться к плоской метрике Минковского (см. Петров, [903], § 53).— *Прим. ред.*

[2]) Обычно принято считать космологическую постоянную положительной. Следовательно, K также положительна. Однако идея пространства — времени постоянной кривизны и того, и другого знака весьма заманчива и заслуживает внимания исследователей. Для простоты мы будем говорить о пространстве де Ситтера, независимо от знака K. Позднее мы убедимся, что отрицательный знак K приводит к настолько странным следствиям, что вряд ли можно принять пространство такого типа в качестве физической модели.

В этом пространстве тензор T_{ij} равен нулю, и мы получаем пустое пространство де Ситтера [1112], удовлетворяющее уравнениям поля

$$G_{ij}-\Lambda g_{ij}=0. \tag{7.5}$$

Трудно определить степень серьезности, с которой физик должен мыслить пустое пространство де Ситтера физически. Исключив материю, мы по существу возвращаемся в пространство без гравитации, где вместо геометрии Минковского справедлива геометрия пространства — времени постоянной кривизны. Успех специальной теории относительности (плоское пространство — время) в описании явлений, не связанных с гравитацией, наводит на мысль о том, что если и следует оперировать в пространстве де Ситтера, то его кривизна, безусловно, должна быть очень малой по сравнению с существенными физическими величинами той же размерности (K измеряется в $сек^{-2}$). Без достаточных оснований никого не привлечет мысль осложнять простоту геометрии Минковского посредством введения кривизны.



Фиг. 67. Изучение пространства де Ситтера.

Тем не менее вселенная де Ситтера интересна сама по себе. Она открывает новые возможности, приводя к идее о том, что пространство может быть конечным. Оказывается, что это удовлетворяет некоторым нашим умственным потребностям, ибо бесконечность представляет собой одно из тех понятий, которые нам трудно реально вообразить.

Чтобы исследовать пространство де Ситтера, возьмем некоторую точку P' и проведем через нее все геодезические (временноподобные, пространственноподобные и изотропные (фиг. 67). Выберем на каждой геодезической канонический параметр u, обращающийся в нуль в точке P', так что

$$\frac{\delta U^i}{\delta u}=0, \qquad U^i=\frac{dx^i}{du}. \tag{7.6}$$

Свяжем соответствием точки на двух соседних геодезических Г и Г', выбирая их при равных значениях u. Тогда вектор геодезического отклонения η^i удовлетворяет уравнению (1.131):

$$\frac{\delta^2\eta^i}{\delta u^2}+R^i_{\cdot jkm}U^j\eta^k U^m=0, \tag{7.7}$$

причем

$$\eta^i=0 \quad \text{для} \quad u=0. \tag{7.8}$$

С учетом (7.1) получаем

$$\frac{\delta^2\eta^i}{\delta u^2}+\eta^i KU_jU^j-U^iKU_j\eta^j=0. \tag{7.9}$$

Чтобы рассмотреть отклонения пространственноподобных или временноподобных геодезических, выберем $u=s$. Тогда в силу (1.133) и (7.8) имеем

$$U_jU^j=\varepsilon, \qquad U_j\eta^j=0, \tag{7.10}$$

где ε — индикатор Г. Уравнение (7.9) сводится к

$$\frac{\delta^2\eta^i}{\delta s^2}+\varepsilon K\eta^i=0. \tag{7.11}$$

Вводя произвольный вектор λ^i, параллельно переносимый на Γ, получаем

$$\frac{d^2}{ds^2}(\eta^i\lambda_i)+\varepsilon K\eta^i\lambda_i=0. \qquad (7.12)$$

Решение этого элементарного уравнения можно написать сразу. Например, если $K>0$ и $\varepsilon=1$, то

$$\eta^i\lambda_i=A\sin(sK^{1/2}), \qquad (7.13)$$

где A — постоянная. Полагая

$$\zeta^i=\frac{\delta\eta^i}{\delta u} \qquad (7.14)$$

и используя штрихи для величин, вычисленных в точке P', соотношение (7.13) можно записать с помощью оператора параллельного переноса в следующем виде:

$$\eta^i=K^{-1/2}g^{ij'}\zeta_{j'}\sin(sK^{1/2}). \qquad (7.15)$$

Таким образом, если принять в учет все возможные случаи, геодезические отклонения пространственноподобных и временноподобных геодезических имеют следующие свойства:

Пространство — время положительной кривизны ($K>0$):

пространственноподобные геодезические ($\varepsilon=1$):

$$\eta^i=K^{-1/2}g^{ij'}\zeta_{j'}\sin(sK^{1/2}); \qquad (7.16)$$

временноподобные геодезические ($\varepsilon=-1$):

$$\eta^i=K^{-1/2}g^{ij'}\zeta_{j'}\,\mathrm{sh}\,(sK^{1/2}). \qquad (7.17)$$

Пространство — время отрицательной кривизны ($K<0$):

пространственноподобные геодезические ($\varepsilon=1$):

$$\eta^i=(-K)^{-1/2}g^{ij'}\zeta_{j'}\,\mathrm{sh}\,[s(-K)^{1/2}]; \qquad (7.18)$$

временноподобные геодезические ($\varepsilon=-1$):

$$\eta^i=(-K)^{-1/2}g^{ij'}\zeta_{j'}\sin[s(-K)^{1/2}]. \qquad (7.19)$$

Нам остается рассмотреть геодезическое отклонение в случае, когда одна или обе из кривых Γ и Γ′ изотропны. Беря сначала случай, когда обе кривые изотропны, мы вместо (7.10) имеем

$$U_jU^j=0, \qquad U_j\eta^j=0, \qquad (7.20)$$

так что уравнение (7.9) принимает вид

$$\frac{\delta^2\eta^i}{\delta u^2}=0, \qquad (7.21)$$

а геодезическое отклонение задается формулой

$$\eta^i=ug^{ij'}\zeta_{j'}. \qquad (7.22)$$

Предположим теперь, что геодезическая Γ изотропна, а Γ′ либо пространственно-, либо временноподобна. Первое соотношение (7.20) удовлетворяется, тогда как второе не имеет места. Умножая (7.9) на U_i, получаем

$$\frac{d^2}{du^2}(\eta^iU_i)=0 \qquad (7.23)$$

и, следовательно,

$$\eta^iU_i=au, \qquad a=\zeta^{i'}U_{i'}. \qquad (7.24)$$

Таким образом, (7.9) принимает вид

$$\frac{\delta^2\eta^i}{\delta u^2} - uU^iKa = 0 \qquad (7.25)$$

и, следовательно,

$$\frac{d^2}{du^2}(\eta^i\lambda_i) = uKaU^i\lambda_i, \qquad (7.26)$$

где λ_i — вектор параллельного переноса. Правая часть постоянна, и для геодезического отклонения получаем

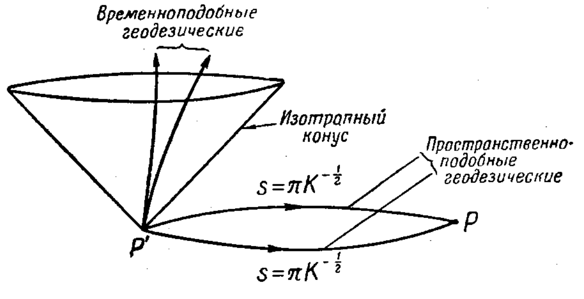
$$\eta^i = ug^{ij'}\zeta_{j'} + \frac{1}{6}u^3KU^i\zeta^{k'}U_{k'}. \qquad (7.27)$$

В предыдущих вычислениях мы опирались на единственное предположение: пространство—время имеет постоянную кривизну K. Это предположение не определяет пространства — времени полностью, поскольку не затрагивает его топологических свойств. Проиллюстрируем сказанное с помощью простой аналогии. Тот факт, что двумерное пространство с положительно определенной метрикой плоско, не означает, что оно представляет собой плоскость: цилиндр имеет плоскую геометрию, существует также двумерное пространство (произведение двух окружностей), имеющее топологию тора (листа Мёбиуса). Тем не менее из формул (7.16) — (7.19) можно извлечь некоторые интересные сведения.

Допустим, что $K > 0$. Тогда (7.16) означает, что две пересекающиеся пространственноподобные геодезические, исходящие из некоторой точки P', снова встречаются ($\eta^i = 0$) в некоторой точке P, где

$$s = \pi K^{-1/2}. \qquad (7.28)$$

Действительно, переходя от одной геодезической к другой, мы видим, что *все* пространственноподобные геодезические, исходящие из P', встречаются в единственной точке P (фиг. 68), причем длины их одинаковы и определяются по (7.28).



Фиг. 68. Геодезические в пространстве де Ситтера с $K > 0$.

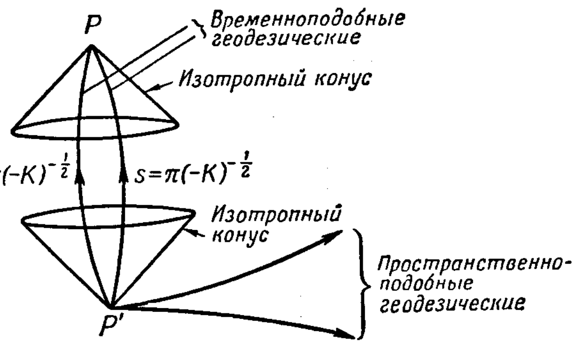
Если, достигнув точки P, мы пройдем через нее, двигаясь дальше, то снова, покрыв расстояние, определяемое формулой (7.28), вернемся в точку P'. Таким образом, все пространственноподобные геодезические оказываются замкнутыми кривыми. Однако здесь могут быть два случая. В первом случае P и P' представляют собой различные точки (представим себе полюсы земного шара) и длина замкнутой геодезической равна $2\pi K^{1/2}$; такой случай называют *антиподным* или *сферическим*. Во втором случае P и P' совпадают, так что кривая $P'P$ сама оказывается замкнутой геодезической длины $\pi K^{-1/2}$. Этот случай называют *полярным* или *эллиптиче-*

ским. Что касается двух соседних временноподобных геодезических, то, как это следует из (7.17), они расходятся по экспоненциальному закону и нигде больше не встречаются, если только это не обусловлено каким-либо топологическим ограничением, которое можно наложить.

Если $K < 0$, то пространственноподобная и временноподобная геодезические меняются ролями (фиг. 69). Пространственноподобные геодезические, исходящие из P', снова встречаются в P через период времени

$$s = \pi(-K)^{-1/2}. \tag{7.29}$$

Этот результат вытекает из формул (7.18) и (7.19). Тот факт, что временноподобные геодезические встречаются, кажется странным, и поэтому лучше его больше не касаться, поскольку метод геодезических отклонений фактически не позволяет изучить это свойство адекватным образом.



Фиг. 69. Геодезические в пространстве де Ситтера с $K<0$.

Пространство де Ситтера можно рассмотреть различными способами (Шредингер [1075]), каждый из которых представляет свой особый интерес. Однако чтобы сделать более прозрачными вопросы топологии, лучше всего рассматривать пространство де Ситтера как четырехмерное пространство V_4, вложенное в плоское пятимерное пространство V_5 с евклидовой топологией. Пусть индексы, обозначаемые прописными буквами, принимают значения 1, 2, 3, 4, 5. Рассмотрим плоское V_5 с координатами x^A, каждая из которых меняется в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, и метрической формой

$$\Psi = \eta_{AB} dx^A dx^B, \tag{7.30}$$

где η_{AB} — диагональная 5×5-матрица с элементами ± 1 (более определенно мы их не специализируем). Когда мы говорим, что топология V_5 евклидова, то это просто означает, что имеет место взаимно однозначное соответствие между точками V_5 и пятью координатами x^A (фактически «точка» означает задание пяти координат). Определим V_4 с помощью уравнения

$$\eta_{AB} x^A x^B = C, \tag{7.31}$$

где C — постоянная. Его можно записать также в виде

$$(x^5)^2 = \eta_{55}(C - \eta_{ij} x^i x^j), \tag{7.32}$$

и, следовательно, для любого смещения в V_4 мы имеем

$$x^5 dx^5 = -\eta_{55}\eta_{ij} x^i dx^j. \tag{7.33}$$

Следующим шагом будет вычисление кривизны V_4. Кривизна относится к локальным свойствам, и мы будем пользоваться в качестве координат x^i, не обращая внимания на то обстоятельство, что уравнение (7.32) определяет x^5 лишь с точностью до знака. Метрика, индуцируемая в V_4 метрикой (7.30), имеет вид

$$\Phi = \eta_{ij}dx^i dx^j + (C-S)^{-1}(\eta_{ij}x^i dx^j)^2 = g_{ij}dx^i dx^j, \tag{7.34}$$

где

$$g_{ij} = \eta_{ij} + y_i y_j (C-S)^{-1},$$
$$y_i = \eta_{ik}x^k, \tag{7.35}$$
$$S = \eta_{ij}x^i x^j = y_i x^i = \eta_{ij}y_i y_j.$$

Тензор g_{ij} представляет собой метрический тензор V_4. Методами матричного исчисления легко доказать (или проверить непосредственно), что тензор, сопряженный ему, имеет вид

$$g^{ij} = \eta_{ij} - x^i x^j C^{-1}. \tag{7.36}$$

Пространство V_4 либо содержит, либо не содержит точку V_5, для которой $x^i = 0$. Если реализуется первая возможность, то, как это видно из (7.35), мы должны выбрать

$$\eta_{ij} = \mathrm{diag}\,(1,\ 1,\ 1, -1), \tag{7.37}$$

для того чтобы метрика V_4 могла иметь правильную сигнатуру, т. е. сигнатуру геометрии пространства — времени.

Теперь нетрудно вычислить символы Кристоффеля и, следовательно, с помощью (1.88) тензор Римана для V_4. В результате вычислений получаем

$$\Gamma^a_{ij} = C^{-1}x^a[\eta_{ij} + (C-S)^{-1}y_i y_j],$$
$$R_{ijkm} = C^{-1}(g_{ik}g_{jm} - g_{im}g_{jk}). \tag{7.38}$$

Следовательно, в соответствии с (1.101) V_4 есть пространство де Ситтера в том смысле, что оно представляет собой четырехмерное пространство постоянной кривизны

$$K = C^{-1}. \tag{7.39}$$

Решив изложенным выше способом вопрос о топологической структуре, можно с полной определенностью исследовать свойства вложенного пространства де Ситтера[1]). Примем здесь без математического доказательства, что геодезические в пространстве V_4 (аналогично большим окружностям на обычной сфере) представляют собой пересечения V_4 с двумерными плоскостями, проходящими через начало координат V_5. Это позволяет значительно упростить рассмотрение этих геодезических, если ввести векторные обозначения, полагая $P^A = \mathbf{P}$, $x^A = \mathbf{x}$, и использовать скалярное произведение

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q} = \eta_{AB}P^A Q^B. \tag{7.40}$$

В силу (7.31) и (7.39) уравнение V_4 имеет вид

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = K^{-1}. \tag{7.41}$$

[1]) Чтобы не слишком обременять рассуждения, ограничимся анализом только антиполярных случаев. Для перехода к полярному случаю следует отождествить диаметрально противоположные точки в V_4, т. е. точки, лежащие на прямой линии в V_5, проходящей через начало координат V_5.

Следовательно, для бесконечно малого смещения в пространстве V_4 имеем

$$\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x}=0. \tag{7.42}$$

Пусть $\mathbf{x}=\mathbf{P}$ — произвольная точка на V_4, а Γ — геодезическая в V_4, проведенная в направлении вектора $\mathbf{Q}$. Тогда

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}=K^{-1}, \quad \mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}=0. \tag{7.43}$$

Параметрическое уравнение двумерной плоскости, проходящей через $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$, имеет вид

$$\mathbf{x}=p\mathbf{P}+q\mathbf{Q}, \tag{7.44}$$

где p и q пробегают все возможные значения. В таком случае кривая Γ представляет собой пересечение пространств, определяемых уравнениями (7.41) и (7.44). Фактически (7.44) является параметрическим уравнением для Γ, если p и q удовлетворяют уравнению

$$(p\mathbf{P}+q\mathbf{Q})\cdot(p\mathbf{P}+q\mathbf{Q})=K^{-1}, \tag{7.45}$$

где $p=1$, а $q=0$ в точке $\mathbf{P}$. Мы имеем

$$p^2+K\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q}q^2=1. \tag{7.46}$$

Предположим, что Γ — изотропная геодезическая (изотропная в V_5 и, следовательно, относительно индуцированной метрики также и в V_4). Тогда

$$\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q}=0,\ p=1, \tag{7.47}$$

и параметрическое уравнение Γ приобретает вид

$$\mathbf{x}=\mathbf{P}+q\mathbf{Q} \quad (-\infty<q<\infty). \tag{7.48}$$

Изотропные геодезические V_4 фактически представляют собой прямые линии в V_5 (аналогично образующим однополостного гиперболоида).

Предположим теперь, что Γ не изотропна. Мы можем нормировать $\mathbf{Q}$ так, чтобы

$$K\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q}=\omega=\pm 1 \tag{7.49}$$

и, следовательно, (7.46) перейдет в

$$p^2+\omega q^2=1. \tag{7.50}$$

Самым существенным является знак ω. Если $\omega=1$, то параметр u можно определить посредством соотношений

$$\cos u=p, \quad \sin u=q. \tag{7.51}$$

Тогда (7.44) дает параметрическое уравнение Γ в виде

$$\mathbf{x}=\mathbf{P}\cos u+\mathbf{Q}\sin u. \tag{7.52}$$

Фактически это уравнение определяет окружность [в пространстве V_5. при $u=\pi$ мы имеем $\mathbf{x}=-\mathbf{P}$, при $u=2\pi$ получаем $\mathbf{x}=\mathbf{P}$. Эти геодезические оказываются замкнутыми кривыми. Все геодезические этого типа, исходящие из $\mathbf{P}$, сходятся в антиполюсе $-\mathbf{P}$ и затем снова в исходной точке $\mathbf{P}$. С другой стороны, если $\omega=-1$, то можно положить

$$\operatorname{ch}u=p, \quad \operatorname{sh}u=q, \tag{7.53}$$

и уравнение геодезической приобретает в этом случае вид

$$\mathbf{x}=\mathbf{P}\operatorname{ch}u+\mathbf{Q}\operatorname{sh}u \tag{7.54}$$

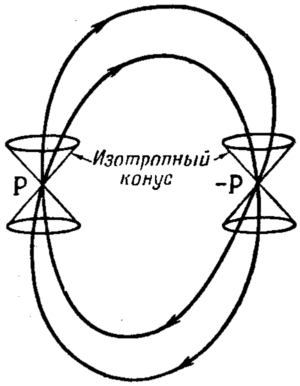
и, таким образом, описывает гиперболу в пространстве V_5. Она относится к незамкнутым кривым, так что две геодезические этого типа, исходящие из $\mathbf{P}$, нигде больше не встречаются.

Заметим, что

$$\omega = 1 \quad \text{для} \begin{cases} K>0 & \text{и пространственноподобной } \Gamma, \\ K<0 & \text{и временноподобной } \Gamma; \end{cases} \tag{7.55}$$

$$\omega = -1 \quad \text{для} \begin{cases} K>0 & \text{и временноподобной } \Gamma, \\ K<0 & \text{и пространственноподобной } \Gamma. \end{cases} \tag{7.56}$$

Сравнивая полученные результаты с результатами (7.16) — (7.19), мы обнаруживаем, что между ними существует согласие. Но новые результаты оказываются более сильными. При $K < 0$ временноподобные геодезические не только встречаются, как это показано на фиг. 69, но они являются *замкнутыми кривыми*, и мы должны перерисовать фиг. 69, как показано на фиг. 70. На ней представлена ситуация, которую можно охарактеризовать только как фантастическую. Мы видим, что пробная частица снова и снова повторяет движение (свою историю) по той же самой траектории! Это расходится с нашим основным представлением о причинности, и мы делаем вывод, что пространство де Ситтера с отрицательной кривизной K приводит к идеям, которые носят слишком уж «революционный характер» с точки зрения физики, в том виде как она существует сегодня.



Фиг. 70. Замкнутые временноподобные геодезические для пространства де Ситтера, заключенного в пятимерное евклидово пространство, при $K < 0$.

§ 2. Метрические формы в случае сферической симметрии

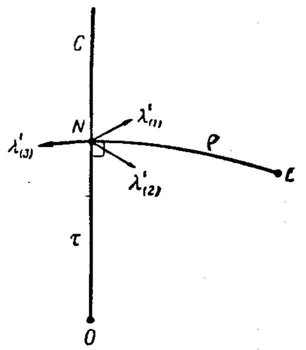
По выражению Вейля [1374], «симметрия, в каком бы широком или узком смысле мы не понимали этого слова, есть та единственная идея, с помощью которой человек испокон веков пытался постигнуть и воспроизвести порядок, красоту и совершенство». Понятие симметрии укоренилось в нас настолько сильно, что смысл этого слова трудно объяснить словами, которые выражали бы нечто большее, чем само слово «симметрия». Мы непосредственно замечаем симметрию, которой обладает, например, равносторонний треугольник, квадрат или окружность. Но у интуиции есть свои пределы, и всякий раз серьезное обсуждение симметрии приводит к теории групп. Однако здесь существует опасность притупить в погоне за математическим формализмом столь ценное интуитивное восприятие. Поэтому в соответствии с геометрическим духом книги мы при обсуждении симметричных пространств — времен будем стараться сохранить в некоторой степени интуитивный характер элементарной геометрии.

Поясним с помощью вымышленного примера смысл слова *эквивалентный*, которым нам будет удобно пользоваться в дальнейшем. Предположим, человек хочет спрятать сундук с сокровищами и оставить указание в виде инструкции, по которой этот клад в будущем можно было бы снова отыскать. В инструкции не должно содержаться ничего, кроме данных геодезических измерений без указания на видимые ориентиры. Если человек обитает на идеальной сфере, ему не удастся дать сколь-нибудь удовлетворительных указаний, так как любые две точки идеальной сферы *эквивалентны*. Если же он обитает на эллипсоиде вращения, то лучший способ спрятать клад — это зарыть его на одном из полюсов. Хотя оба полюса *эквивалентны* и, сле-

довательно, его указания не могут определить место, где зарыт клад, совершенно однозначно, все же лучше зарыть клад на полюсе, чем где-нибудь еще, так как на параллели, соответствующей какой-то широте, все точки *эквивалентны*. Если человек обитает на грушевидной планете, то на ней с помощью геодезических измерений, выполненных в окрестностях полюсов, каждый из полюсов может быть *идентифицирован* индивидуально, и человек может спрятать свой клад на полюсе, имеющем меньшую (или большую) гауссову кривизну.

Перейдем теперь к изучению симметричных пространств, вооружившись понятиями *эквивалентный* и *идентифицируемый* и применяя их по анало ии в поясненном выше смысле. «Геодезические» измерения, выполняемые в пространстве — времени, относятся, разумеется, к римановой метрике.

В плоском пространстве — времени Минковского (случай специальной теории относительности) эквивалентны: все точки, все единичные временноподобные векторы, направленные в будущее, все единичные пространственноподобные векторы, все направленные в будущее изотропные векторы. Ни один из только что упомянутых элементов не является идентифицируемым. Аналогичные утверждения справедливы и для пространства де Ситтера, рассмотренного в предыдущем параграфе. В сущности говоря, плоское пространство — время Минковского и пространство де Ситтера симметричны в такой мере, в какой это вообще возможно для пространства — времени; разница между прошедшим и будущим, а также между временноподобным, изотропным и пространственноподобным всегда остается. Строя простую модель при изучении гравитационного поля Солнца или пульсирующей звезды в ньютоновской физике, мы приписываем этим объектам сферическую симметрию вполне определенного смысла. Теперь наша задача будет состоять в том, чтобы перенести понятие сферической симметрии в общую теорию относительности с целью исследования гравитационного поля Солнца или пульсирующей звезды, причем первое представляет собой частный случай второго.



Фиг. 71. Построение для полярных и гауссовых координат.

Определение сферической симметрии совершенно просто. Предположим, что мировая линия C некоторой частицы, принадлежащей звезде, является осью симметрии в том смысле, что в каждой точке на линии C все единичные векторы, ортогональные к ней, эквивалентны. Мы, однако, пока не предполагаем эквивалентности всех точек на C.

Очевидно, что C должна быть геодезической, так как в противном случае ее первая нормаль представляла бы собой идентифицируемый вектор, ортогональный C.

Наша задача теперь заключается в том, чтобы вычислить в случае сферической симметрии метрический тензор g_{ij}. Но эта задача приобретает смысл лишь после того, как мы конкретизируем координаты, которые решено использовать.

Существует множество различных координатных систем, каждая из которых обладает своими достоинствами. Начнем с координат, которые мы будем называть *полярными гауссовыми координатами*. Они определяются следующим образом. На фиг. 72 мы видим центральную геодезическую C, на которой выбрана некоторая точка O. Пусть $\lambda^i_{(\alpha)}$ — ортонормированный 3-репер, ортогональный C в точке O и затем перенесенный параллельно вдоль C. Пусть E — произвольная точка, а EN — геодезическая, проведенная через

E так, что она пересекает линию C по нормали к последней. Касательная к NE в точке N лежит в трехмерном элементе, определяющемся $\lambda^i_{(\alpha)}$, и ее направление можно задать через обычные полярные углы (θ и φ). Обозначим $NE = \varrho$ и $ON = \tau$. Тогда ϱ, θ, φ, τ и есть искомые полярные гауссовы координаты. Они отличаются от гауссовых координат, рассмотренных в гл. I, § 8, лишь тем, что базируются на геодезической C, а не на трехмерном пространстве. Однако это различие до некоторой степени тривиально, ибо как те, так и другие обладают важным свойством гауссовых координат — они являются допустимыми (везде, кроме линии C). Метрическая форма пространства — времени имеет вид

$$\Phi = d\varrho^2 + \Phi_1, \tag{7.57}$$

где Φ_1 — квадратичная форма относительно $d\theta$, $d\varphi$, $d\tau$. В силу принятого нами допущения об эквивалентности всех единичных векторов, ортогональных C, Φ не должна меняться при преобразовании $\lambda^i_{(\alpha)}$. Преобразование этого 3-репера есть не что иное, как вращение осей в трехмерном евклидовом пространстве. Единственная дифференциальная форма по $d\theta$ и $d\varphi$, инвариантная относительно таких вращений, имеет вид

$$d\sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2. \tag{7.58}$$

Поэтому в качестве общего выражения для метрики пространства — времени со сферической симметрией при записи в полярных гауссовых координатах мы имеем

$$\Phi = d\varrho^2 + \varrho^2 f(\varrho, \tau)\, d\sigma^2 - h(\varrho, \tau)\, d\tau^2, \tag{7.59}$$

где f и h имеют непрерывные первые производные. Множитель ϱ^2 при $d\sigma^2$ выделен лишь из соображений формального удобства. С учетом элементарной евклидовости пространства — времени (отношение периметра малой окружности к ее радиусу равно 2π) и определения τ, мы имеем на C

$$f(0, \tau) = 1, \quad h(0, \tau) = 1. \tag{7.60}$$

Можно перейти от полярных гауссовых координат к *координатам Ферми* (см. гл. II, § 10; здесь эти координаты обозначены через x^i), полагая

$$x^1 = \varrho \sin\theta \cos\varphi, \quad x^2 = \varrho \sin\theta \sin\varphi,$$
$$x^3 = \varrho \cos\theta, \qquad x^4 = \tau. \tag{7.61}$$

Тогда (учитывая, что греческие индексы принимают значения 1, 2, 3) получим

$$x^\alpha x^\alpha = \varrho^2, \quad x^\alpha dx^\alpha = \varrho\, d\varrho,$$
$$dx^\alpha dx^\alpha = d\varrho^2 + \varrho^2 d\sigma^2, \tag{7.62}$$

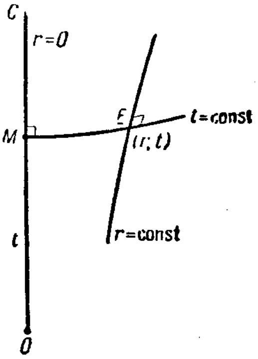
и формула (7.59) даст

$$\Phi = g_{ij}\, dx^i dx^j,$$
$$g_{\alpha\beta} = f\delta_{\alpha\beta} + \varrho^{-2}(1 - f)\, x^\alpha x^\beta, \tag{7.63}$$
$$g_{\alpha 4} = 0, \quad g_{44} = -h,$$

где f и h — функции ϱ и x^4.

По какой-то странной причине ни одна из рассмотренных выше координатных систем не приводит к максимальному упрощению уравнений поля. Поэтому построим третью систему координат, которые назовем *координатами кривизн*.

Рассмотрим двумерное пространство, для которого ϱ и τ имеют фиксированное значение, а θ и φ служат текущими координатами. В силу предположения о сферической симметрии все точки этого двумерного пространства эквивалентны. Следовательно, это двумерное пространство имеет постоянную собственную кривизну, равную, скажем, $1/r^2$, где r — функция ϱ и τ.



Фиг. 72. Построение для координат кривизн (r, t).

Наше двумерное пространство фактически ничем не отличается от обычной сферы радиуса r: его инвариантная площадь равна $4\pi r^2$ (возможно, это лучший способ запомнить, что такое r) и метрика, заданная на этом пространстве, имеет вид

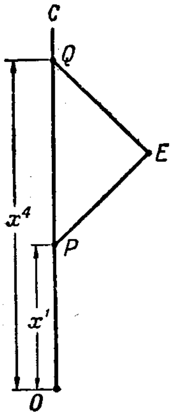
$$ds^2 = r^2 d\sigma^2. \tag{7.64}$$

Из сравнения этого выражения с формулой (7.59) получаем

$$r^2 = \varrho^2 f. \tag{7.65}$$

На линии C, очевидно, $r = 0$.

Рассмотрим теперь другой тип двумерного пространства, когда θ и φ фиксированы, а ϱ и τ представляют собой текущие координаты. Проведем в этом пространстве кривые $r = \text{const}$ (фиг. 72) и ортогональные к ним траектории, такие, как EM. В этом случае любая точка E определяет точку M на C, и если положить $OM = t$, то r и t будут представлять собой систему ортогональных координат в рассматриваемом двумерном пространстве. Таким образом, в этих *координатах кривизн* получаем



Фиг. 73. Построение для изотропных координат.

$$\Phi = A(r, t)\, dr^2 + r^2 d\sigma^2 - B(r, t)\, dt^2, \tag{7.66}$$

где

$$A(0, t) = 1, \quad B(0, t) = 1. \tag{7.67}$$

Мы используем термин *координаты кривизн*, учитывая способ определения r.

Но несмотря на то, что эти координаты упрощают уравнения поля (как это будет показано ниже), они не лишены некоторых недостатков. Гауссовые координаты $(\varrho, \theta, \varphi, \tau)$ являются допустимыми, однако в процессе построения траекторий, ортогональных к линиям $r = \text{const}$, степень гладкости была понижена и нужно быть готовым обнаружить разрывы первых производных A и B, хотя сами эти функции непрерывны. Этот вопрос о гладкости, часто бывавший причиной недоразумений, подробно рассмотрел Израель [494]. Мы здесь не будем на нем останавливаться (см., однако, стр. 235—236).

Рассмотрим теперь четвертую систему координат, а именно *изотропные координаты*. Выбирая θ и φ таким же способом, как и раньше, определим координаты x^1 и x^4 точки E (фиг. 73), строя в точке E полный изотропный конус, пересекающий C, допустим, в точках P и Q. Положим $OP = x^1$ и $OQ = x^4$. Тогда $(x^1, \theta, \varphi, x^4)$ представляют собой изотропные координаты точки E, а метрическая форма (как это легко видеть из изотропного характера PE и EQ) имеет вид

$$\Phi = -2F(x^1, x^4)\, dx^1 dx^4 + H(x^1, x^4)\, d\sigma^2. \tag{7.68}$$

Здесь F и H — произвольные функции[1]), причем H играет роль r^2.

[1]) Относительно условий на оси C см. работу Синга [1178].

Полученные нами формулы (7.59), (7.63), (7.66) и (7.68) представляют собой четыре различных (но, разумеется, эквивалентных) способа записи метрической формы для пространства — времени со сферической симметрией. В каждом случае мы имеем *две* неизвестные функции *двух* независимых переменных. Таким образом, наложение сферической симметрии приводит к сильному упрощению: в случае поля общего вида (для гауссовых координат) получается *шесть* неизвестных функций *четырех* независимых переменных. Именно благодаря этому упрощению удается получить в случае сферической симметрии некоторые результаты.

Существуют, конечно, и другие способы записи метрической формы для пространств со сферической симметрией. Есть, например, *изотермические координаты*, для которых

$$\Phi = C(x^1, x^4)\left[(dx^1)^2 - (dx^4)^2\right] + H(x^1, x^4)\, d\sigma^2 \tag{7.69}$$

и *однородные координаты*[1]), для которых

$$\Phi = M(x^\beta x^\beta, x^4)\, dx^\alpha dx^\alpha - N(x^\beta x^\beta, x^4)(dx^4)^2. \tag{7.69a}$$

Но как бы ни были выбраны координаты, всегда необходимо иметь в виду их геометрический смысл.

§ 3. Различные формулы для случая сферической симметрии

Сферическая симметрия в силу своей сравнительной простоты представляет настолько большой интерес, а физические проблемы, связанные со свойствами такого вида симметрии, еще настолько далеко не исчерпаны, что весьма целесообразно провести достаточно подробный вывод ряда формул. Если исходить при вычислениях из метрической формы[2])

$$\Phi = e^\alpha (dx^1)^2 + e^\beta \left[(dx^2)^2 + \sin^2 x^2 (dx^3)^2\right] - e^\gamma (dx^4)^2, \tag{7.70}$$

где α, β и γ — *три* функции переменных (x^1, x^4), то можно конкретизировать наши результаты, накладывая следующие особые требования:

$$\begin{aligned} &\text{полярные гауссовы координаты:} && \alpha = 0;\\ &\text{координаты кривизн:} && \beta = 2\ln x^1\ (x^1 = r);\\ &\text{изотермические координаты:} && \alpha = \gamma;\\ &\text{однородные координаты:} && \alpha = \beta. \end{aligned} \tag{7.71}$$

Этот перечень не содержит ни координат Ферми, ни изотропных координат. Стремясь избежать рутины утомительных вычислений, связанных с переходом от одной системы координат к другой, лучше работать с координатами Ферми и изотропными координатами отдельно.

Работая с метрической формой (7.70), мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\sin x^2 = s, \quad \cos x^2 = c. \tag{7.72}$$

Частные производные функций α, β и γ по x^1 и x^4 будем обозначать индексом без запятой, например,

$$\alpha_1 = \frac{\partial\alpha}{\partial x^1}, \quad \gamma_{14} = \frac{\partial^2\gamma}{\partial x^1 \partial x^4}. \tag{7.73}$$

---

[1]) По этому вопросу см. книгу Петрова [903], § 7, 30, 49 — *Прим. ред.*

[2]) Для ортогональной метрики общего вида символы Кристоффеля и тензор Эйнштейна были получены в явном виде Динглом [206], а также Толманом ([1270]) и Мак-Витти ([732]); однако эти формулы, естественно, несколько громоздки.

Для формы (7.70) имеем

$$g_{11}=e^{\alpha},\quad g_{22}=e^{\beta},\quad g_{33}=e^{\beta}s^2,\quad g_{44}=-e^{\gamma},\quad g_{ij}=0\ (i\neq j),$$
$$g^{11}=e^{-\alpha},\quad g^{22}=e^{-\beta},\quad g^{33}=e^{-\beta}s^{-2},\quad g^{44}=-e^{-\gamma},\quad g^{ij}=0\ (i\neq j),$$
$$g=\det g_{ij}=-s^2\exp(\alpha+2\beta+\gamma), \tag{7.74}$$
$$\ln\sqrt{-g}=\frac{1}{2}\alpha+\beta+\frac{1}{2}\gamma+\ln s.$$

Отличные от нуля компоненты символа Кристоффеля Γ^i_{jk} имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}
\Gamma^1_{11}=\frac{1}{2}\alpha_1,\quad \Gamma^4_{11}=\frac{1}{2}\alpha_4 e^{\alpha-\gamma},\\
\Gamma^2_{12}=\Gamma^3_{13}=\frac{1}{2}\beta_1,\\
\Gamma^1_{14}=\frac{1}{2}\alpha_4,\quad \Gamma^4_{14}=\frac{1}{2}\gamma_1,\\
\Gamma^1_{22}=-\frac{1}{2}\beta_1 e^{\beta-\alpha},\quad \Gamma^4_{22}=\frac{1}{2}\beta_4 e^{\beta-\gamma},\\
\Gamma^3_{23}=cs^{-1},\quad \Gamma^2_{24}=\Gamma^3_{34}=\frac{1}{2}\beta_4,\\
\Gamma^1_{33}=-\frac{1}{2}\beta_1 e^{\beta-\alpha}s^2,\quad \Gamma^2_{33}=-sc,\quad \Gamma^4_{33}=\frac{1}{2}\beta_4 e^{\beta-\gamma}s^2,\\
\Gamma^1_{44}=\frac{1}{2}\gamma_1 e^{\gamma-\alpha},\quad \Gamma^4_{44}=\frac{1}{2}\gamma_4.
\end{gathered} \tag{7.75}$$

Следовательно, как показывают непосредственные вычисления с помощью (1.88), отличны от нуля следующие компоненты тензора Римана:

$$\begin{aligned}
&R_{2323}=s^2e^{\beta}\left(1-\frac{1}{4}\beta_1^2e^{\beta-\alpha}+\frac{1}{4}\beta_4^2e^{\beta-\gamma}\right),\\
&R_{1212}=e^{\beta}\left(-\frac{1}{2}\beta_{11}-\frac{1}{4}\beta_1^2+\frac{1}{4}\alpha_1\beta_1\right)+\frac{1}{4}\alpha_4\beta_4e^{\alpha+\beta-\gamma},\\
&R_{3131}=s^2R_{1212},\\
&R_{1224}=e^{\beta}\left(\frac{1}{2}\beta_{14}+\frac{1}{4}\beta_1\beta_4-\frac{1}{4}\alpha_4\beta_1-\frac{1}{4}\beta_4\gamma_1\right),\\
&R_{3134}=-s^2R_{1224},\\
&R_{1414}=e^{\alpha}\left(-\frac{1}{2}\alpha_{44}-\frac{1}{4}\alpha_4^2+\frac{1}{4}\alpha_4\gamma_4\right)+e^{\gamma}\left(\frac{1}{2}\gamma_{11}+\frac{1}{4}\gamma_1^2-\frac{1}{4}\gamma_1\alpha_1\right),\\
&R_{2424}=e^{\beta}\left(-\frac{1}{2}\beta_{44}-\frac{1}{4}\beta_4^2+\frac{1}{4}\beta_4\gamma_4\right)+\frac{1}{4}\beta_1\gamma_1e^{\beta-\alpha+\gamma},\\
&R_{3434}=s^2R_{2424}.
\end{aligned} \tag{7.76}$$

Заметим, что обращаются в нуль те компоненты, в которых индекс 2, либо индекс 3 встречается только один раз. Это нетрудно показать и не прибегая к вычислениям, а основываясь лишь на свойствах симметрии. Аналогичным образом, компонента тензора Риччи равна нулю, если она имеет всего лишь один индекс 2 (или один индекс 3). Как показывают вычисления, отличные от нуля компоненты тензора Риччи имеют следующий вид:

$$R_{11}=\beta_{11}+\frac{1}{2}\beta_1^2+\frac{1}{2}\gamma_{11}+\frac{1}{4}\gamma_1^2-\frac{1}{2}\alpha_1\beta_1-\frac{1}{4}\alpha_1\gamma_1+$$
$$+e^{\alpha-\gamma}\left(-\frac{1}{2}\alpha_{44}-\frac{1}{4}\alpha_4^2-\frac{1}{2}\alpha_4\beta_4+\frac{1}{4}\alpha_4\gamma_4\right),$$

$$R_{22}=-1+e^{\beta-\alpha}\left(\frac{1}{2}\beta_{11}+\frac{1}{2}\beta_1^2+\frac{1}{4}\beta_1\gamma_1-\frac{1}{4}\alpha_1\beta_1\right)+$$
$$+e^{\beta-\gamma}\left(-\frac{1}{2}\beta_{44}-\frac{1}{2}\beta_4^2-\frac{1}{4}\alpha_4\beta_4+\frac{1}{4}\beta_4\gamma_4\right),$$
$$R_{33}=s^2R_{22},\tag{7.77}$$
$$R_{44}=\beta_{44}+\frac{1}{2}\beta_4^2+\frac{1}{2}\alpha_{44}+\frac{1}{4}\alpha_4^2-\frac{1}{4}\alpha_4\gamma_4-\frac{1}{2}\beta_4\gamma_4+$$
$$+e^{\gamma-\alpha}\left(-\frac{1}{2}\gamma_{11}-\frac{1}{4}\gamma_1^2+\frac{1}{4}\alpha_1\gamma_1-\frac{1}{2}\beta_1\gamma_1\right),$$
$$R_{14}=R_{41}=\beta_{14}+\frac{1}{2}\beta_1\beta_4-\frac{1}{2}\alpha_4\beta_1-\frac{1}{2}\beta_4\gamma_1.$$

В завершение вычислений получим выражения для неравных нулю компонент смешанного тензора Эйнштейна при метрической форме (7.70); они имеют следующий вид:

$$G_1^1=e^{-\alpha}\left(-\frac{1}{4}\beta_1^2-\frac{1}{2}\beta_1\gamma_1\right)+e^{-\beta}+e^{-\gamma}\left(\beta_{44}+\frac{3}{4}\beta_4^2-\frac{1}{2}\beta_4\gamma_4\right),$$
$$G_2^2=G_3^3=e^{-\alpha}\left(-\frac{1}{2}\beta_{11}-\frac{1}{4}\beta_1^2-\frac{1}{2}\gamma_{11}-\frac{1}{4}\gamma_1^2-\frac{1}{4}\beta_1\gamma_1+\frac{1}{4}\alpha_1\beta_1+\frac{1}{4}\alpha_1\gamma_1\right)+$$
$$+e^{-\gamma}\left(\frac{1}{2}\beta_{44}+\frac{1}{4}\beta_4^2+\frac{1}{2}\alpha_{44}+\frac{1}{4}\alpha_4^2+\frac{1}{4}\alpha_4\beta_4-\frac{1}{4}\beta_4\gamma_4-\frac{1}{4}\alpha_4\gamma_4\right),\tag{7.78}$$
$$G_4^4=e^{-\alpha}\left(-\beta_{11}-\frac{3}{4}\beta_1^2+\frac{1}{2}\alpha_1\beta_1\right)+e^{-\beta}+e^{-\gamma}\left(\frac{1}{4}\beta_4^2+\frac{1}{2}\alpha_4\beta_4\right),$$
$$e^{\alpha}G_4^1=-e^{\gamma}G_1^4=\beta_{14}+\frac{1}{2}\beta_1\beta_4-\frac{1}{2}\alpha_4\beta_1-\frac{1}{2}\beta_4\gamma_1.$$

Для полярных гауссовых координат в приведенных выше формулах следует положить $\alpha=0$, для изотермических координат — $\alpha=\gamma$ и для однородных — $\alpha=\beta$. Это приводит к некоторым упрощениям, но мы не будем утруждать себя выписыванием получающихся при этом формул. Для координат кривизн, однако, упрощения оказываются более существенными. В этом случае

$$r=x^1,\qquad \theta=x^2,\qquad \varphi=x^3,\qquad t=x^4,$$
$$\Phi=e^{\alpha}dr^2+r^2d\sigma^2-e^{\gamma}dt^2,$$
$$d\sigma^2=d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2,\tag{7.79}$$
$$e^{\beta}=r^2,\qquad \beta=2\log r,\qquad \beta_1=2r^{-1},\qquad \beta_{11}=-2r^{-2},$$
$$\beta_{11}+\frac{1}{2}\beta_1^2=0,\qquad \beta_4=0.$$

Тогда (7.76) дает ($s=\sin\theta$)

$$R_{2323}=s^2r^{-2}(1-e^{-\alpha}),\qquad R_{1212}=\frac{1}{2}r\alpha_1,\qquad R_{3131}=s^2R_{1212},$$
$$R_{1224}=-\frac{1}{2}r\alpha_4,\qquad R_{3134}=-s^2R_{1224},$$
$$R_{1414}=e^{\alpha}\left(-\frac{1}{2}\alpha_{44}-\frac{1}{4}\alpha_4^2+\frac{1}{4}\alpha_4\gamma_4\right)+e^{\gamma}\left(\frac{1}{2}\gamma_{11}+\frac{1}{4}\gamma_1^2-\frac{1}{4}\alpha_1\gamma_1\right),\tag{7.80}$$
$$R_{2424}=\frac{1}{2}r\gamma_1e^{\gamma-\alpha},\qquad R_{3434}=s^2R_{2424},$$

а из (7.78) следует, что

$$
\begin{aligned}
G_1^1 &= r^{-2} - r^{-2}e^{-\alpha}(1 + r\gamma_1),\\
G_2^2 = G_3^3 &= e^{-\alpha}\left(-\frac{1}{2}\gamma_{11} - \frac{1}{4}\gamma_1^2 - \frac{1}{2}r^{-1}\gamma_1 + \frac{1}{2}r^{-1}\alpha_1 + \frac{1}{4}\alpha_1\gamma_1\right) +\\
&\quad + e^{-\gamma}\left(\frac{1}{2}\alpha_{44} + \frac{1}{4}\alpha_4^2 - \frac{1}{4}\alpha_4\gamma_4\right),\\
G_4^4 &= r^{-2} - r^{-2}e^{-\alpha}(1 - r\alpha_1),\\
e^{\alpha}G_4^1 &= -e^{\gamma}G_1^4 = -r^{-1}\alpha_4.
\end{aligned}
\tag{7.81}
$$

Заметим, что здесь мы совсем не упоминали об уравнениях поля. Приведенные выше формулы получены лишь в предположении сферической симметрии пространства — времени. Продолжим рассуждения несколько далее в таком чисто геометрическом духе. С точностью до условий элементарной евклидовости (7.67), имеющих теперь вид

$$\alpha = \gamma = 0 \quad \text{для} \quad r = 0, \tag{7.82}$$

α и γ — произвольные функции переменных r и t, или x^1 и x^4, и из формул (7.81) соответствующий тензор Эйнштейна получается с помощью дифференцирования. Однако эти формулы обладают одним замечательным свойством — мы можем совсем легко выразить α и γ через G_1^1 и G_4^4. Из третьего уравнения (7.81) с учетом (7.82) получаем

$$e^{-\alpha} = 1 - \frac{1}{r}\int_0^r r^2 G_4^4\, dr. \tag{7.83}$$

Подставляя полученное таким образом α в первое уравнение (7.81) и учитывая (7.82), приходим к формуле

$$\gamma = \int_0^r \left(\frac{e^{\alpha} - 1}{r} - re^{\alpha}G_1^1\right) dr. \tag{7.84}$$

Теперь, используя другие уравнения (7.81), можно выразить остальные компоненты G_j^i через G_1^1 и G_4^4. В силу последнего уравнения (7.81) мы имеем

$$G_4^1 = -e^{\gamma-\alpha}G_1^4 = -\frac{1}{r^2}\int_0^r r^2 G_{4,4}^4\, dr. \tag{7.85}$$

Для вычисления же G_2^2 вместо (7.81) можно прибегнуть к тождеству

$$G_{i\,|\,j}^j = 0 \tag{7.86}$$

для случая $i = 1$. Это дает

$$
\begin{aligned}
G_2^2 = G_3^3 &= \frac{1}{2}rG_{1,1}^1 + \frac{1}{2}rG_{1,4}^4 + \left(1 + \frac{1}{4}r\gamma_1\right)G_1^1 +\\
&\quad + \frac{1}{4}r(\alpha_4 + \gamma_4)\,G_1^4 - \frac{1}{4}r\gamma_1 G_4^4.
\end{aligned}
\tag{7.87}
$$

Смысл всех полученных соотношений состоит в том, что мы имеем, по самой сути дела, *две* произвольные функции α и γ или G_1^1 и G_4^4, тогда как другие G_j^i выражаются через первые с помощью дифференцирования или интегрирования.

Как отмечалось ранее, координаты кривизн не являются, в математическом смысле этого слова, допустимыми. Таким образом, на трехмер-

ной гиперповерхности разрыва, определяющейся уравнением

$$f(r,\ t)=0, \tag{7.88}$$

мы должны предполагать непрерывность α и γ, но не обязательно их первых производных. Условия связности фактически имеют тот же вид, что и в (1.229):

$$G_1^1 f_{,1}+G_1^4 f_{,4}=[C], \quad G_4^1 f_{,1}+G_4^4 f_{,4}=[C], \tag{7.89}$$

где $[C]$ означает непрерывность. В частном случае, когда гиперповерхность разрыва определяется уравнением $r=\text{const}$, эти условия сводятся к следующим:

$$G_1^1=[C], \quad G_4^1=[C]. \tag{7.90}$$

§ 4. Внешнее поле Шварцшильда

Рассмотрим звезду или какой-нибудь другой объект, распределение материи в котором обладает сферически симметрично. Не будем пока интересоваться внутренней областью рассматриваемого объекта и рассмотрим лишь область $r>a$ (будут использованы координаты кривизн), материя в которой отсутствует. В этой области $T_{ij}=0$ и, следовательно, уравнения поля имеют вид

$$G_j^i-\Lambda\delta_j^i=0 \tag{7.91}$$

(космологическая константа введена здесь из соображений общности). Однако ввиду сферической симметрии необходимо рассматривать лишь уравнения

$$\begin{aligned} G_1^1&=\Lambda,\\ G_4^4&=\Lambda,\\ G_4^1&=0.\end{aligned} \tag{7.92}$$

Другие уравнения

$$\begin{aligned} G_2^2&=\Lambda,\\ G_3^3&=\Lambda\end{aligned} \tag{7.93}$$

будут тогда удовлетворяться в силу тождества (7.87).

Подставляя (7.81) в (7.92), приходим к трем следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} e^{-\alpha}(1+r\gamma_1)&=1-\Lambda r^2,\\ e^{-\alpha}(1-r\alpha_1)&=1-\Lambda r^2,\\ \alpha_4&=0.\end{aligned} \tag{7.94}$$

Из последней формулы в (7.94) следует, что

$$\alpha=\alpha(r). \tag{7.95}$$

Тогда из второй формулы получаем

$$e^{-\alpha}=1-\frac{A}{r}-\frac{1}{3}\Lambda r^2, \tag{7.96}$$

где A — произвольная постоянная. [Формула (7.82) здесь не справедлива, так как рассматриваемая область $r>a$ не содержит оси симметрии $r=0$.] Вычитая из первого уравнения (7.94) второе, получаем

$$\alpha_1+\gamma_1=0 \tag{7.97}$$

и, следовательно,

$$\gamma = -\alpha + F(t), \tag{7.98}$$

где F — произвольная функция. Следовательно, метрика для области $r > a$ имеет вид

$$\Phi = \frac{dr^2}{1 - \frac{A}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2} + r^2 d\sigma^2 - \left(1 - \frac{A}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right) e^{F(t)} dt^2. \tag{7.99}$$

Если произвести замену $t \to t'$, где

$$t' = \int \exp\left[\frac{1}{2} F(t)\right] dt, \tag{7.100}$$

то

$$\Phi = \frac{dr^2}{1 - \frac{A}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2} + r^2 d\sigma^2 - \left(1 - \frac{A}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right) dt'^2. \tag{7.101}$$

Поле, соответствующее (7.101), можно назвать *внешним полем Шварцшильда* (Шварцшильд [1078]), хотя это понятие по существу используется лишь в случае $\Lambda = 0$.

Пространство — время называют *стационарным*, если существуют такие координаты, что

$$g_{ij,4} = 0. \tag{7.102}$$

Стационарное пространство — время допускает группу движений (см. гл. VI, § 2). Если в дополнение к (7.102)

$$g_{\alpha 4} = 0, \tag{7.103}$$

так что метрическая форма записывается в виде

$$\Phi = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta + g_{44} (dx^4)^2, \tag{7.104}$$

то говорят, что пространство — время является *статическим*.

Ясно, что пространство — время с метрической формой (7.101) — статическое. В действительности, *любое сферически симметричное поле в вакууме является статическим*. Этот замечательный результат часто называют «теоремой Биркгоффа» (Джебсен [512], Александров [3], Биркгофф [53]).

Сделаем несколько критических замечаний относительно формулы (7.101). Во-первых, в § 2 координате t был приписан вполне определенный смысл собственного времени на оси $r = 0$. При переходе с помощью (7.100) к t' этот смысл был утрачен. Однако если отбросить несколько затрудняющую рассмотрение константу Λ (см. ниже), так что формула (7.101) примет вид

$$\Phi = \frac{dr^2}{1 - \frac{A}{r}} + r^2 d\sigma^2 - \left(1 - \frac{A}{r}\right) dt'^2, \tag{7.105}$$

и устремить r к бесконечности, то, как легко видеть, dt' станет элементом собственного времени для частицы, фиксированной в том смысле, что r, θ и φ будут оставаться неизменными.

Во-вторых, чтобы сигнатура Φ в (7.101) оставалась правильной, должно выполняться неравенство

$$1 - \frac{A}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2 > 0. \tag{7.106}$$

Если допустить (как это обычно делается), что константа Λ положительна, то для достаточно больших значений r это неравенство будет, очевидно,

нарушаться. Однако эта неувязка отступает на второй план перед лицом другой опасности. Как будет показано далее, r достигает максимума по мере удаления от начала координат вдоль геодезической NE (см. фиг. 72), а затем снова начинает убывать. Это означает, что за этим максимумом координаты кривизн использовать нельзя, так как взаимно однозначное соответствие между точками и четверкой координат r, θ, φ и t отсутствует.

Для изучения поведения r будем использовать гауссовы координаты, для которых метрическая форма имеет вид[1])

$$\Phi = d\varrho^2 + r^2\,d\sigma^2 - e^{\gamma}\,d\tau^2. \tag{7.107}$$

Чтобы установить соответствие с обозначениями § 3, положим

$$\varrho = x^1, \quad \tau = x^4, \quad r^2 = e^{\beta} \tag{7.108}$$

и учтем то обстоятельство, что теперь r является функцией x^1 и x^4. Из всех уравнений поля в вакууме мы будем использовать лишь следующие:

$$G_4^4 = \Lambda, \quad G_4^1 = 0. \tag{7.109}$$

Так как мы пользуемся полярными гауссовыми координатами, то в формуле (7.78) следует положить $\alpha = 0$. Тогда уравнения поля (7.109) примут вид

$$\begin{aligned} -\beta_{11} - \frac{3}{4}\beta_1^2 + e^{-\beta} + \frac{1}{4}e^{-\gamma}\beta_4^2 &= \Lambda, \\ \beta_{14} + \frac{1}{2}\beta_1\beta_4 - \frac{1}{2}\beta_4\gamma_1 &= 0. \end{aligned} \tag{7.110}$$

Здесь

$$\begin{aligned} &\beta = 2\ln r, \qquad \beta_1 = \frac{2r_1}{r}, \qquad \beta_4 = \frac{2r_4}{r}, \\ &\beta_{11} = \frac{2r_{11}}{r} - \frac{2r_1^2}{r^2}, \qquad \beta_{14} = \frac{2r_{14}}{r} - \frac{2r_1r_4}{r^2} \end{aligned} \tag{7.111}$$

и, следовательно, (7.110) принимает вид

$$\begin{aligned} 1 - 2rr_{11} - r_1^2 + e^{-\gamma}r_4^2 &= \Lambda r^2, \\ 2r_{14} - r_4\gamma_1 &= 0. \end{aligned} \tag{7.112}$$

Второе из этих уравнений дает

$$r_4 e^{-1/2\gamma} = B(x^4), \tag{7.113}$$

где функция B произвольна. Тогда из первого уравнения (7.112) следует, что

$$1 - 2rr_{11} - r_1^2 + B^2 = \Lambda r^2, \tag{7.114}$$

а это можно переписать в виде

$$(rr_1^2)_1 = (1 - \Lambda r^2 + B^2)\,r_1 \tag{7.115}$$

и, следовательно,

$$r_1^2 = 1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2 + B^2 - \frac{C}{r}, \tag{7.116}$$

где C — какая-то другая произвольная функция x^4. Последнее уравнение при фиксированном x^4 может быть разрешено в квадратурах. Тогда

[1]) Здесь предполагается, что для $\varrho > 0$ соседние геодезические NE (см. фиг. 71) не пересекаются; другими словами, $r > 0$, $e^{\gamma} > 0$ для $\varrho > 0$.

инверсия даст функцию $r(x^1, x^4)$. Однако из (7.116) очевидно, что если Λ положительна, то r не может возрастать бесконечно при увеличении x^1; r будет иметь максимум и затем начнет убывать, как указано выше [1]).

§ 5. Полное поле в случае сферически симметричного распределения материи

В предыдущем параграфе мы рассмотрели внешнее поле для сферически симметричного распределения материи, причем было сочтено целесообразным рассмотреть отдельно внешнее поле с тем, чтобы подчеркнуть факт независимости теоремы Биркгоффа от структуры материи, разумеется, только когда распределение материи сферически симметрично. Обратимся теперь к общей проблеме полного поля (внешнего и внутреннего).

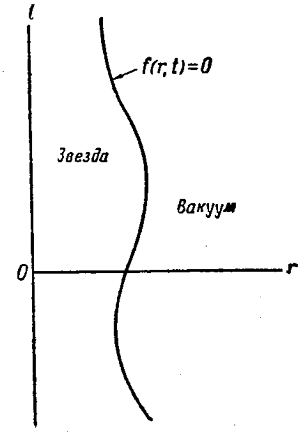
Для конкретности представим себе звезду, которая может пульсировать в радиальных направлениях [2]). Ради формальной простоты мы применим логарифмические координаты, так что метрическая форма будет иметь вид

$$\Phi = e^{\alpha} dr^2 + r^2 d\sigma^2 - e^{\nu} dt^2,$$
$$d\sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2, \qquad (7.117)$$
$$x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \varphi, \quad x^4 = t.$$

Для общности введем в рассмотрение космологическую константу, так что уравнения поля будут иметь вид

$$G^i_j - \Lambda\delta^i_j = -\varkappa T^i_j, \qquad \varkappa = 8\pi. \qquad (7.118)$$

Однако ввиду затруднений, отмеченных в предыдущем параграфе, мы будем в некоторых случаях полагать $\Lambda = 0$.



Фиг. 74. Пространственно-временная картина пульсирующей звезды.

В действительности совершенно безразлично, предполагаем ли мы, что звезда ограничена резкой границей, или считаем ее простирающейся (без четкой границы) до бесконечности. Можно рассматривать вторую возможность как предельный случай первой. Пусть звезда имеет резкую границу и пусть уравнение этой границы имеет вид

$$f(r, t) = 0. \qquad (7.119)$$

Графически она изображена на фиг. 74. При переходе через нее должны выполняться условия соединения (7.89).

Сферическая симметрия накладывает ограничения на тензор энергии. Собственные векторы λ^i и собственные значения k этого тензора таковы, что в любой точке два собственных вектора лежат в двумерном элементе, для которого $dx^2 = dx^3 = 0$, а два других — в двумерном элементе, для которого $dx^1 = dx^4 = 0$. В последнем случае оба собственных значения

[1]) Такого рода вопросы более детально были изучены О'Райфертаем [839].

[2]) При поверхностном рассмотрении теоремы Биркгоффа могло бы показаться, что, поскольку внешнее поле статическое, звезда не может пульсировать! Однако это не так. В действительности, звезда может пульсировать, сохраняя при этом сферическую симметрию, но, как и в ньютоновской теории, в общей теории относительности эти пульсации не влияют на внешнее гравитационное поле, т. е. фактически монопольное «гравитационное излучение» отсутствует.

равны между собой и оба собственных вектора неопределенны. Уравнения для собственных векторов и собственных значений записываются следующим образом:

$$T_{ij}\lambda^j = kg_{ij}\lambda^j. \qquad (7.120)$$

Учитывая, что g_{ij} имеет диагональный вид, легко показать, что уравнения, относящиеся к случаю $dx^1 = dx^4 = 0$, записываются в виде

$$\begin{aligned} &T_{12}\lambda^2 + T_{13}\lambda^3 = 0, \\ &T_{22}\lambda^2 + T_{23}\lambda^3 = kg_{22}\lambda^2, \\ &T_{32}\lambda^2 + T_{33}\lambda^3 = kg_{33}\lambda^3, \\ &T_{42}\lambda^2 + T_{43}\lambda^3 = 0. \end{aligned} \qquad (7.121)$$

Этим уравнениям должны удовлетвор ть какие-то k при произвольном отношении $\lambda^2 : \lambda^3$. Следовательно,

$$T_{12} = T_{13} = T_{42} = T_{43} = T_{23} = 0, \quad \frac{T_{22}}{g_{22}} = \frac{T_{33}}{g_{33}} \qquad (7.122)$$

и, таким образом, отличны от нуля лишь следующие компоненты T^i_j:

$$T^1_1, \quad T^2_2 = T^3_3, \quad T^4_4, \quad T^1_4, \quad T^4_1, \qquad (7.123)$$

где

$$e^{\alpha}T^1_4 = -e^{\nu}T^4_1. \qquad (7.124)$$

Из всех уравнений поля (7.118) мы должны удовлетворить лишь четырем следующим:

$$\begin{aligned} &G^1_1 = \Lambda - \varkappa T^1_1, \\ &G^2_2 = \Lambda - \varkappa T^2_2, \\ &G^4_4 = \Lambda - \varkappa T^4_4, \\ &G^1_4 = -\varkappa T^1_4. \end{aligned} \qquad (7.125)$$

Подставляя в правую часть выражения (7.81), получаем четыре уравнения для шести величин

$$\alpha, \quad \gamma, \quad T^1_1, \quad T^2_2, \quad T^4_4, \quad T^1_4. \qquad (7.126)$$

Будем рассматривать T^1_1 и T^4_4 как заданные функции переменных r и t. Вместо того чтобы заново решать (7.125), воспользуемся результатами, полученными в § 3. Подставляя (7.125) в (7.83) и (7.84), получаем

$$\begin{aligned} &e^{-\alpha} = 1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2 + \frac{\varkappa}{r}\int_0^r r^2 T^4_4\,dr, \\ &\gamma = -\Lambda\int_0^r re^{\alpha}\,dr + \int_0^r \left(\frac{e^{\alpha}-1}{r} + \varkappa re^{\alpha}T^1_1\right)dr. \end{aligned} \qquad (7.127)$$

Из первого и третьего уравнений (7.81) следует, что

$$G^1_1 - G^4_4 = -r^{-1}e^{-\alpha}(\alpha_1 + \gamma_1) \qquad (7.128)$$

и, следовательно, в силу (7.125)

$$\alpha_1 + \gamma_1 = \varkappa re^{\alpha}(T^1_1 - T^4_4). \qquad (7.129)$$

Таким образом, второе равенство (7.127) можно записать в несколько

ином виде:

$$\gamma=-\alpha+\varkappa\int_0^r re^{\alpha}(T_1^1-T_4^4)\,dr. \tag{7.130}$$

Выразив таким образом α и γ через T_1^1 и T_4^4, мы получим следующие выражения для остальных величин (7.126), подставляя (7.125) в (7.85) и (7.87):

$$\begin{aligned} T_4^1 &= -r^{-2}\int_0^r r^2 T_{4,4}^4\,dr,\\ T_2^2 &= \frac{1}{2}rT_{1,1}^1+\frac{1}{2}rT_{1,4}^4+\left(1+\frac{1}{4}r\gamma_1\right)T_1^1-\\ &\quad -\frac{1}{4}re^{\alpha-\gamma}(\alpha_4+\gamma_4)T_4^1-\frac{1}{4}r\gamma_1T_4^4. \end{aligned} \tag{7.131}$$

Если положить

$$T_1^1=0, \qquad T_4^4=0, \tag{7.132}$$

то все компоненты T_j^i обратятся в нуль, и звезда фактически исчезнет. В этом случае (7.127) и (7.130) дают

$$e^{-\alpha}=e^{\gamma}=1-\frac{1}{3}\Lambda r^2, \tag{7.133}$$

и метрическая форма принимает вид

$$\Phi=\frac{dr^2}{1-\frac{1}{3}\Lambda r^2}+r^2\,d\sigma^2-\left(1-\frac{1}{3}\Lambda r^2\right)dt^2. \tag{7.134}$$

Если $\Lambda=0$, то это — метрика плоского пространства — времени, если $\Lambda\neq 0$, то метрика пространства — времени постоянной кривизны $K={}^1/_3\Lambda$. Фактически мы вновь пришли к пространству де Ситтера, рассмотренному в § 1.

Оставив этот весьма специальный случай, положим $\Lambda=0$ и подведем итог следующим образом: *если комоненты тензора Римана T_1^1 и T_4^4 заданы как произвольные функции переменных r и t, то метрическая форма (7.117) совместна с уравнениями поля, коль скоро функции α и γ заданы в виде*

$$\begin{aligned} e^{-\alpha} &= 1+\frac{\varkappa}{r}\int_0^r r^2T_4^4\,dr,\\ \gamma &= \int_0^r\left(\frac{e^{\alpha}-1}{r}+\varkappa re^{\alpha}T_1^1\right)dr=-\alpha+\varkappa\int_0^r re^{\alpha}(T_1^1-T_4^4)\,dr, \end{aligned} \tag{7.135}$$

а остальные компоненты тензора T_j^i при этом задаются равенствами (7.131).

§ 6. Масса звезды конечного радиуса и теорема Гаусса

Рассмотрим теперь случай, когда звезда имеет резкую границу (см. фиг. 75), вне которой имеет место вакуум. Все, что было сказано выше, будет верно и в этом случае. Однако здесь необходимо учитывать

условия соединения (7.89), которые эквивалентны следующим:

$$T^1_1 f_{,1} + T^4_1 f_{,4} = 0, \qquad T^1_4 f_{,1} + T^4_4 f_{,4} = 0 \qquad \text{для } f = 0. \tag{7.136}$$

Отсюда следует, что

$$T^1_1 T^4_4 - T^1_4 T^4_1 = 0 \qquad \text{для } f = 0 \tag{7.137}$$

или в силу (7.124) и (7.131)

$$T^1_1 T^4_4 + e^{\alpha-\gamma} r^{-4} \left(\int_0^r r^2 T^4_{4,4}\, dr \right)^2 = 0 \qquad \text{для } f = 0. \tag{7.138}$$

Пытаясь строить модель звезды с резкой границей, мы не можем просто задать гладкие T^1_1 и T^4_4 и затем обратить их в нуль вне некоторой заданной кривой $f(r, t) = 0$. Возможен лишь выбор кривой, определяющейся формулой (7.138). Кроме того, существует условие, ограничивающее первоначальный выбор T^1_1 и T^4_4: если выражение (7.138) обозначить через f, то f должна удовлетворять одному из условий (7.136) при $f = 0$.

Продолжая рассмотрение случая ограниченной сферической звезды, совершающей произвольные пульсации, и полагая вне звезды $\Lambda = 0$, согласно (7.96), имеем

$$e^{-\alpha} = 1 - \frac{A}{r}, \tag{7.139}$$

где A — *постоянная*. С другой стороны, если уравнение границы звезды имеет вид $r = \chi(t)$, то для любой точки вне звезды из (7.135) получим

$$e^{-\alpha} = 1 + \frac{\varkappa}{r} \int_0^{\chi(t)} r^2 T^4_4\, dr. \tag{7.140}$$

Отсюда следует, что

$$A = -\varkappa \int_0^{\chi(t)} r^2 T^4_4\, dr. \tag{7.141}$$

Таким образом, правая часть оказывается постоянной (а не функцией t, как это могло показаться). Это несколько неожиданное обстоятельство можно проверить следующим образом. С помощью (7.131) получим

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\chi(t)} r^2 T^4_4\, dr = \int_0^{\chi(t)} r^2 T^4_{4,4}\, dr + \\ + r^2 T^4_4 \chi'(t) = -r^2 (T^1_4 - T^4_4 \chi'(t)), \tag{7.142}$$

где T^1_4 и T^4_4 вычислены на границе. Последнее выраженне обращается в нуль вследствие второго условия сшивания (7.136). Таким образом, наши утверждения доказаны.

Вводя в целях дальнейшего приближения к ньютоновской теории [см. (7.154) и § 8] численный множитель, определим *массу* m звезды конечного радиуса как

$$m = \frac{1}{2} A = -\frac{1}{2} \varkappa \int_0^{\chi(t)} r^2 T^4_4\, dr, \quad \varkappa = 8\pi. \tag{7.143}$$

Тогда для внешнего поля имеем

$$e^{-\alpha}=1-\frac{2m}{r},$$

$$e^{\gamma}=\left(1-\frac{2m}{r}\right)\exp\left[\varkappa\int\limits_0^{\chi(t)}\frac{T_1^1-T_4^4}{r-2m}r^2\,dr\right],\qquad (7.144)$$

$$\Phi=\frac{dr^2}{1-\frac{2m}{r}}+r^2d\sigma^2-e^{\gamma}dt^2.$$

В этом расчете координата t определена — это собственное время, измеренное в центре звезды. Как мы уже знаем, внешнюю форму всегда можно привести к статической. Итак, теперь ясно, что означает «время t'», фигурирующее в формуле (7.105). В самом деле, полагая

$$\Phi=\frac{dr^2}{1-\frac{2m}{r}}+r^2d\sigma-\left(1-\frac{2m}{r}\right)dt'^2,\qquad (7.145)$$

получаем

$$t'=\int\exp\left(\frac{1}{2}\varkappa\int\limits_0^{\chi(t)}\frac{T_1^1-T_4^4}{r-2m}r^2\,dr\right)dt.\qquad (7.146)$$

Исторически внешней метрической форме (7.145) придавали большее значение, чем внутренней, считая ее в некотором смысле более фундаментальной.

Теперь нам ясно, что при $r=2m$ имеет место какое-то нарушение. Это — так называемая «сингулярность Шварцшильда». Изучению последней посвящено значительное количество работ. Однако если рассуждать не формально и попытаться выяснить причину ее появления, то окажется, что в наших рассуждениях фактически содержатся некоторые скрытые допущения относительно природы неравенств. По существу здесь предполагается, что величина T_4^4 такова, что $\exp(-\alpha)$ в соотношении (7.135) всюду положительна. Это означает, что точки, для которых $r=2m$, находятся *внутри* звезды. В таком случае (7.145) применима лишь *вне* звезды, и *в области где формула (7.145) справедлива*, сингулярность отсутствует.

Перейдем к анализу теоремы Гаусса в случае ограниченной звезды, обладающей сферической симметрией. Напомним, что в ньютоновской теории эта теорема гласит:

$$\int N\,dS=4\pi m,\qquad (7.147)$$

где N — ориентированная в направлении внутренней нормали составляющая напряженности гравитационного поля на поверхности S, охватывающей полную массу звезды m.

Чтобы распространить эту теорему на случай теории относительности, необходимо найти подходящий аналог для напряженности ньютоновского гравитационного поля. Итак, если наблюдатель, движущийся вдоль t-линии (с постоянными r, θ и φ), бросает пробную частицу, то ее геодезическая будет отклоняться от t-линии движения наблюдателя и это отклонение можно рассматривать как меру напряженности гравитационного поля. В согласии с задачей о падающем яблоке, решенной в гл. III, § 9, могло бы показаться, что измерять напряженность гравитационного поля следует через величину первой кривизны t-линии. Однако, как мы увидим, к теореме Гаусса можно прийти быстрее, используя не величину b, а первую

компоненту[1]) вектора первой кривизны. Поскольку система координат геометрически вполне определена, нет никаких возражений против использования компоненты вектора, так как эта компонента фактически инвариантна.

Вектор первой кривизны для любой кривой определяется формулой

$$b^i = \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}, \tag{7.148}$$

и для t-линии мы имеем

$$b^1 = \Gamma^1_{44}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = e^{-\gamma}\Gamma^1_{44}. \tag{7.149}$$

или в силу (7.75)

$$b^1 = \frac{1}{2}\gamma_1 e^{-\alpha}. \tag{7.150}$$

В точке вне звезды (7.135) дает

$$\gamma = \int\limits_0^r \frac{e^{\alpha}-1}{r}\,dr + \varkappa\int\limits_0^{\chi(t)} re^{\alpha}T^1_1\,dr, \tag{7.151}$$

$$\gamma_1 = \frac{e^{\alpha}-1}{r}, \quad e^{-\alpha}\gamma_1 = \frac{1}{r}(1-e^{-\alpha}) = \frac{2m}{r^2}$$

и, таким образом, напряженность гравитационного поля определяется формулой

$$b^1 = \frac{m}{r^2}. \tag{7.152}$$

Заметим, что здесь справедлив закон обратного квадрата.

Проинтегрируем теперь эту напряженность по двумерной сфере, для которой $r = \text{const}$, $t = \text{const}$. Элемент площади имеет вид

$$dS = r^2\sin^2\theta\,d\theta\,d\varphi, \tag{7.153}$$

и это дает формулу

$$\int b^1\,dS = 4\pi m, \tag{7.154}$$

которая при сравнении с (7.147) оказывается *теоремой Гаусса*.

§ 7. Поле жидкости, обладающей сферической симметрией, и полное поле Шварцшильда

В предыдущих рассуждениях мы рассматривали T^1_1 и T^4_4 как исходные функции, заданные произвольно, с точностью до условия, сформулированного вслед за формулой (7.138). Но это физически вряд ли реально, так как материя имеет некоторую структуру (твердое тело или жидкость). Найдем теперь поле сферически симметрично распределенной идеальной жидкости и, в частности, поле сферы, заполненной идеальной жидкостью. Положим $\Lambda = 0$ и будем рассматривать только статический случай.

Согласно (4.84), тензор энергии для идеальной жидкости имеет вид

$$T_{ij} = (\mu + p)V_iV_j + pg_{ij}, \tag{7.155}$$

[1]) Это r-компонента вектора b^i. Напомним, что инвариантное определение r дано в § 2.

где μ — плотность, p — давление, а V^i — 4-скорость, удовлетворяющая условию

$$g_{ij} V^i V^j = -1. \tag{7.156}$$

Для статического случая мы выберем ориентацию вектора V^i в t-направлении, так что с учетом метрики (7.117)

$$\begin{aligned} &V^\alpha = 0, && V_\alpha = 0, \\ &V^4 = e^{-1/2\gamma}, && V_4 = -e^{1/2\gamma}. \end{aligned} \tag{7.157}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} &T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = p, \\ &T_4^1 = T_1^4 = 0, \qquad T_4^4 = -\mu, \end{aligned} \tag{7.158}$$

где μ и p зависят только от r.

Уравнения поля эквивалентны (7.135) с учетом (7.131). Вместо второго уравнения (7.135) удобно использовать (7.129). Таким образом, поскольку первое уравнение (7.131) удовлетворяется тождественно, необходимо удовлетворить только следующим трем уравнениям:

$$\begin{aligned} &e^{-\alpha} = 1 - \frac{\varkappa}{r} \int_0^r r^2 \mu \, dr, \\ &\alpha_1 + \gamma_1 = \varkappa r e^\alpha (p + \mu), \\ &p_1 + \frac{1}{2} \gamma_1 (p + \mu) = 0. \end{aligned} \tag{7.159}$$

Напомним, что индекс 1 означает d/dr.

Плотность μ может иметь разрывы, однако α, γ и p непрерывны, причем непрерывность p обеспечивается условиями соединения (7.90). Если жидкость заполняет сферу радиусом $r = a$, вне которой только вакуум, то

$$\mu = 0, \quad p = 0 \quad \text{для} \quad r > a, \tag{7.160}$$

и по мере приближения к поверхности $r = a$ с внутренней стороны $p \to 0$.

Поскольку мы имеем три уравнения (7.159) для четырех величин α, γ, μ и p, то ясно, что в данном случае задача недоопределена. В задачах, связанных с изучением жидкости, определенности иногда можно добиться посредством наложения связи между плотностью и давлением. Однако мы здесь по этому пути не пойдем. Вместо этого будем считать функцию $\mu(r)$ заданной. Разумеется, это лишь психологическая увертка, не противоречащая уравнениям (7.159).

Мы будем предполагать вначале, что функция $\mu(r)$ является гладкой, а случай резкой границы рассмотрим позднее.

Если функция $\mu(r)$ задана, то первое уравнение (7.159) определяет $\alpha(r)$. Исключая γ из двух других уравнений, получаем следующее дифференциальное уравнение для $(p + \mu)$:

$$(p + \mu)_1 + \frac{1}{2}(p + \mu)\left[\varkappa r e^\alpha (p + \mu) - \alpha_1\right] - \mu_1 = 0. \tag{7.161}$$

Если определить σ с помощью выражения

$$\sigma^{-1} = p + \mu, \tag{7.162}$$

то это уравнение примет вид

$$\sigma_1 + \mu_1 \sigma^2 + \frac{1}{2} \alpha_1 \sigma - \frac{1}{2} \varkappa r e^\alpha = 0. \tag{7.163}$$

Нет никакой необходимости искать точное решение. Для нашей цели достаточно заметить, что если величина p при некотором значении r

задана, то это уравнение определяет функцию $\sigma(r)$ и, следовательно, $p(r)$. Тогда, согласно второму уравнению (7.159), γ определяется как

$$\gamma = -\alpha + \varkappa \int_0^r re^{\alpha} \sigma^{-1}\, dr. \tag{7.164}$$

Таким образом, проблема для случая сферически симметричной жидкости решена по крайней мере принципиально, если считать функцию $\mu(r)$ произвольно заданной.

Уравнение (7.163) можно записать в виде

$$(\sigma e^{1/2\alpha})_1 = \frac{1}{2} \varkappa r e^{3\alpha/2} - \mu_1 \sigma^2 e^{1/2\alpha} \tag{7.165}$$

и, следовательно,

$$\sigma e^{1/2\alpha} = \sigma_0 + \frac{1}{2} \varkappa \int_0^r re^{3\alpha/2}\, dr - \int_0^r \mu_1 \sigma^2 e^{1/2\alpha}\, dr, \tag{7.166}$$

где σ_0 есть значение σ при $r=0$. Эта формула не дает, конечно, решения уравнения (7.163), так как последний интеграл здесь содержит неизвестную σ. Однако (7.166) может оказаться полезной при выполнении процесса итераций.

Перейдем теперь к случаю *однородной жидкой сферы*, полагая

$$\mu = \mu_0 \quad \text{при} \quad r < a,$$
$$\mu = 0 \quad \text{при} \quad r > a. \tag{7.167}$$

Здесь μ_0 — постоянная плотность шара. Полагая, как и в (7.160), $p=0$ при $r > a$, мы придем, как это будет видно позднее, к постановке полностью определенной проблемы.

Рассмотрим сначала внутреннюю область ($r < a$). Вследствие первого уравнения (7.159)

$$e^{-\alpha} = 1 - qr^2, \quad q = \frac{1}{3} \varkappa \mu_0 = \frac{8}{3} \pi \mu_0. \tag{7.168}$$

Согласно (7.166),

$$\sigma e^{1/2\alpha} = \sigma_0 + \frac{1}{2} \varkappa \int_0^r re^{3\alpha/2}\, dr. \tag{7.169}$$

Последний интеграл легко вычислить, так как, согласно (7.168),

$$e^{-\alpha}\, d\alpha = 2qr\, dr \tag{7.170}$$

и, следовательно,

$$\sigma = (p+\mu_0)^{-1} = \sigma_0 e^{-1/2\alpha} + \frac{1}{2} \varkappa q^{-1} (1 - e^{-1/2\alpha}). \tag{7.171}$$

Постоянную σ_0 вычисляют с помощью перехода к предельному случаю при приближении к поверхности сферы, где $r=a$, $p=0$. Подставляя это значение σ_0 в (7.171), получаем

$$\sigma\mu_0 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1-qr^2}{1-qa^2} \right)^{1/2} \tag{7.172}$$

и, следовательно, давление внутри сферы определяется формулой

$$p = \mu_0 \frac{(1-qr^2)^{1/2} - (1-qa^2)^{1/2}}{3(1-qa^2)^{1/2} - (1-qr^2)^{1/2}}. \tag{7.173}$$

Внутреннее решение будет найдено полностью, если мы определим γ из (7.164), что дает

$$e^{\gamma}=\left(\frac{3\sqrt{1-qa^2}-\sqrt{1-qr^2}}{3\sqrt{1-qa^2}-1}\right)^2 \tag{7.174}$$

и метрическая форма внутри сферы приобретает вид

$$\Phi=\frac{dr^2}{1-qr^2}+r^2\,d\sigma^2-e^{\gamma}\,dt^2,\quad q=\frac{1}{3}\varkappa\mu_0. \tag{7.175}$$

Напомним, что t — собственное время и убедимся, что, как и должно быть, $\gamma=0$ при $r=0$.

Согласно общему определению массы в случае ограниченного, сферически симметричного распределения материи [см. (7.143)], масса жидкой сферы определяется формулой

$$m=\frac{1}{2}\varkappa\int\limits_0^a \mu r^2\,dr=\frac{1}{6}\varkappa\mu_0 a^3=\frac{4}{3}\pi\mu_0 a^3. \tag{7.176}$$

Таким образом, переходя во внешнюю область ($r>a$), из (7.159) получаем

$$e^{-\alpha}=1-\frac{2m}{r},\qquad \gamma=-\alpha+\ln C, \tag{7.177}$$

где C — постоянная. В силу непрерывности при $r=a$

$$C=(e^{\gamma+\alpha})_{r=a}, \tag{7.178}$$

куда нужно подставить внутренние значения (7.168) и (7.174), и, таким образом,

$$C=4\left(3\sqrt{1-qa^2}-1\right)^{-2}. \tag{7.179}$$

Таким образом, метрическая форма вне сферы имеет вид

$$\Phi=\frac{dr^2}{1-\frac{2m}{r}}+r^2\,d\sigma^2-\frac{4\left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2}{(3\sqrt{1-qa^2}-1)^2},\qquad q=\frac{1}{3}\varkappa\mu_0. \tag{7.180}$$

Мы видим, что эта формула сшивается с (7.175), если учесть, что

$$\frac{2m}{a}=\frac{1}{3}\varkappa\mu_0 a^2=qa^2. \tag{7.181}$$

Использование координат, достаточно просто определенных (как физически, так и геометрически), всегда дает большое преимущество, поэтому в качестве собственного времени в центре сферы постоянно использовалось t. Однако формулы для жидкой сферы несколько упрощаются, если произвести замену временно́й координаты, согласно следующей формуле:

$$t'=2t\left(3\sqrt{1-qa^2}-1\right)^{-1}. \tag{7.182}$$

Теперь с помощью (7.175) и (7.180) получим полное поле Шварцшильда [1078—1079] для жидкой сферы с постоянной плотностью[1]):

[1]) Чтобы преобразовать внешнюю форму к гауссовым полярным координатам, положим $d\varrho=dr\,(1-2m/r)^{-1/2}$. Внешняя метрическая форма в изотропных координатах задается формулой (8.179).

для внутренней области ($r < a$),

$$\Phi_i = \frac{dr^2}{1-qr^2} + r^2\,d\sigma^2 - \left(\frac{3}{2}\sqrt{1-qa^2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-qr^2}\right)^2 dt'^2; \qquad (7.183)$$

для внешней области ($r > a$),

$$\Phi_e = \frac{dr^2}{1-\frac{2m}{r}} + r^2\,d\sigma^2 - \left(1-\frac{2m}{r}\right) dt'^2.$$

Ясно, что t' фактически представляет собой собственное время частицы, фиксированной при $r = \infty$.

§ 8. Орбиты и лучи в поле Солнца

Основные концепции общей теории относительности Эйнштейна столь существенно отличаются от ньютоновских, что достаточно хорошее согласие физических предсказаний этих двух теорий могло бы показаться удивительным[1]). Однако согласие действительно существует, по крайней мере, в условиях, встречающихся в природе, так как здесь приходится иметь дело лишь со слабыми гравитационными полями и малыми относительными скоростями (понятия «слабый» и «малые» используются, разумеется, в математическом смысле). Хотя об этом согласии уже упоминалось выше, оно еще раз будет продемонстрировано в нижеследующих рассуждениях. Это согласие представляет собой большой триумф работы по построению теории гравитации, не опирающейся на нетерпимое понятие абсолютного времени и в то же время согласующейся в области астрономических предсказаний с наблюдениями так же успешно, как ньютоновская теория.

Однако предсказания этих двух теорий совпадают не полностью. Небольшие расхождения их предсказаний привлекали большое внимание и выражались сомнения относительно того, действительно ли наблюдения полностью подтверждают предсказания теории Эйнштейна.

Обоснованность суждения об этом вопросе требует более глубокого знания техники наблюдений, а какие-либо догматические утверждения были бы чужды духу этой книги[2]). Но одно обстоятельство следует считать ясным. Спор ведется не между Ньютоном и Эйнштейном. Концепция абсолютного времени в свете успехов специальной теории относительности не сохранила в физике никакой опоры и, если эйнштейновская теория гравитации в самом деле недостаточна, то нужна модификация этой теории, а не возвращение к ньютоновской. Но если потребность в каких-либо изменениях и появится, то первое, что при этом потребуется, это ясное и критическое понимание того, что представляют собой точно эти предсказания общей теории относительности.

Мы говорим здесь о поле Солнца, хотя наши математические расчеты применимы к любому сферически симметричному полю в вакууме. Возь-

---

[1]) В этой книге мы имеем дело только с теорией Эйнштейна; однако необходимо обращаться и к ньютоновской теории, поскольку астрономы облекают результаты своих измерений в ньютоновскую терминологию. Мы не затрагиваем здесь вопроса о некоторых других теориях гравитации, построенных в плоском пространстве — времени (имеются в виду главным образом теории Нордстрема [814—816], Ми [738], Уайтхеда [1378] и Биркгоффа [57, 60]. Некоторые замечания о работах первых двух авторов можно найти у Паули [881]).

[2]) Читатель может познакомиться с критическим обзором этого вопроса у Мак-Витти [732].

мем, как и в (7.145), метрическую форму вида

$$\Phi = \frac{dr^2}{1-\frac{2m}{r}} + r^2 d\sigma^2 - \left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2,$$

$$d\sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2. \tag{7.184}$$

Используемые здесь координаты очень сходны с координатами кривизны § 2, хотя и не совпадают с ними полностью. Ради простоты обозначений мы опустили штрих у t' в формуле (7.145), так что t в формуле (7.184) представляет собой собственное время не в центре Солнца, а в точке, фиксированной при $r = \infty$. Координата r, очевидно, не является «пространственным расстоянием»; она, как и ранее, определяется требованием, что величина r^{-2} есть внутренняя гауссова кривизна двумерного пространства $t = \mathrm{const}$, $r = \mathrm{const}$. Что касается m, то это масса Солнца, определенная посредством (7.143), или, если Солнце рассматривать как однородный жидкий шар,— посредством (7.176). Для нашей цели лучше всего считать m некоторой константой.

Мы собираемся, основываясь на гипотезах о геодезических, изучать орбиты планет и фотонов. При рассмотрении геодезических пространства — времени, имеющего метрику (7.184), с чисто математической точки зрения не возникает необходимости в каких-либо реальных подтверждениях результатов. У реалиста же могут появиться сомнения. Убедившись, что гипотезы о геодезических справедливы лишь для очень «малых тел», он может задуматься, что это означает — неужели Земля и Юпитер «очень малы»?[1]) На этот вопрос невозможно ответить до тех пор, пока не будет развита рациональная теория проблемы двух тел и единственное, что остается — это двигаться дальше, опираясь лишь на гипотезы о геодезических и пытаясь выяснить, какие предсказания отсюда будут извлечены в связи с вопросом о движении планет и лучей света.

Самый корректный способ изучения геодезических — это воспользоваться уравнениями Лагранжа. Если при метрике общего вида записать функцию Лагранжа как

$$F(x, x') = \frac{1}{2} g_{ij} x^{i\prime} x^{j\prime}, \tag{7.185}$$

где «штрих» означает d/dw (здесь w — канонический параметр), то уравнения геодезических примут вид

$$\frac{d}{dw}\frac{\partial F}{\partial x^{i\prime}} - \frac{\partial F}{\partial x^i} = 0. \tag{7.186}$$

Для изотропных геодезических эти уравнения допускают первый интеграл вида

$$F = 0, \tag{7.187}$$

а для временноподобных геодезических (при $w = s$) — первый интеграл вида

$$2F = -1. \tag{7.188}$$

Лагранжиан для (7.184) задается формулой

$$2F = \frac{r'^2}{1-\frac{2m}{r}} + r^2(\theta'^2 + \sin^2\theta\varphi'^2) - \left(1-\frac{2m}{r}\right)t'^2. \tag{7.189}$$

Так как φ и t — независимые координаты, то имеют место два первых

[1]) См. замечания «малых» величинах в гл. II, § 3.

интеграла

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi'} = r^2 \sin^2 \theta \varphi' = \alpha^{-1},$$
$$\frac{\partial F}{\partial t'} = -\left(1-\frac{2m}{r}\right)t' = -\beta, \qquad (7.190)$$

где α и β — постоянные, зависящие от начальных условий. Уравнение для θ имеет вид

$$\frac{d}{dw}\frac{\partial F}{\partial \theta'} - \frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{d}{dw}(r^2\theta') - r^2 \sin\theta\cos\theta\varphi'^2 = 0. \qquad (7.191)$$

Кроме того, имеется первый интеграл (7.187) или (7.188) соответственно рассматриваемому случаю.

Из (7.191) очевидно, что если в качестве начальных данных взять

$$\theta = \frac{1}{2}\pi, \qquad \theta' = 0, \qquad (7.192)$$

то эти уравнения остаются справедливыми. Но для любой отдельной геодезической можно вращать оси координат (см. фиг. 71, стр. 229), так что условия (7.192) будут выполняться и, следовательно, приняв (7.192), можно без потери общности рассматривать отдельную геодезическую, или, естественно, систему «компланарных» геодезических. Тогда (7.190) и другой первый интеграл будут иметь вид

$$r^2\varphi' = \alpha^{-1}, \qquad \left(1-\frac{2m}{r}\right)t' = \beta,$$
$$\frac{r'^2}{1-\frac{2m}{r}} + r^2\varphi'^2 - \left(1-\frac{2m}{r}\right)t'^2 = -\eta, \qquad (7.193)$$

где $\eta = 1$ для временноподобной геодезической и $\eta = 0$ для изотропной.

Наш план состоит в том, чтобы, исключая t и w, вывести уравнение орбиты, связывающее r и φ. Мы имеем

$$dw = \alpha r^2\, d\varphi,$$
$$\left(1-\frac{2m}{r}\right)dt = \beta\, dw = \alpha\beta r^2\, d\varphi. \qquad (7.194)$$

Тогда второе уравнение (7.193) дает уравнение, связывающее r и φ, а именно

$$dr^2 + \left[r^2\left(1-\frac{2m}{r}\right) - \alpha^2\beta^2 r^4 + \eta\alpha^2 r^4\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right]d\varphi^2 = 0. \qquad (7.195)$$

Положим теперь

$$u = \frac{1}{r}, \qquad (7.196)$$

Поделив (7.195) на $r^4\, d\varphi^2$, получим

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = f(u), \qquad (7.197)$$

где

$$f(u) = \alpha^2\beta^2 - (u^2+\eta\alpha^2)(1-2mu) = 2mu^3 - u^2 + 2\eta\alpha^2 mu + \alpha^2(\beta^2-\eta) =$$
$$= 2m(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3). \qquad (7.198)$$

Здесь u_1, u_2, u_3 представляют собой нули функции $f(u)$, причем, если все они вещественны, то $u_1 < u_2 < u_3$. Имеем

$$u_1 + u_2 + u_3 = \frac{1}{2m}, \qquad (7.199)$$

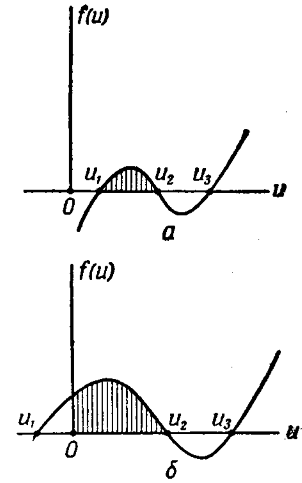
$$u_2u_3 + u_3u_1 + u_1u_2 = \eta\alpha^2. \qquad (7.200)$$

Полная информация о поведении планет и фотонов (согласно гипотезам о геодезических) содержится в орбитальном уравнении (7.197), для решения которого требуется лишь выполнить интегрирование и инверсию, ибо как только (7.194) решено, w и t задаются как функции φ с помощью интегри ования (7.194).

Исчерпывающее исследование орбит было выполнено Хаджихара [424]. Мы наложим здесь небольшое ограничение, рассматривая лишь те орбиты, которые имеют перигелий (точку наибольшего приближения к Солнцу). В точке перигелия

$$\frac{du}{d\varphi}=0, \qquad f(u)=0, \qquad (7.201)$$

а в остальной части орбиты u меньше, чем соответствующее значение в перигелии. В силу (7.197) $f(u)\geqslant 0$ на всей орбите, а вследствие (7.198) $f(u)$ положительна для больших положительных значений u. Оказывается, что все три нуля функции $f(u)$ вещественны и u_2 и u_3 положительны, причем u_2 соответствует перигелию. График $f(u)$ принадлежит к одному из двух типов, показанных на фиг. 75 (фиг. 75а — для случая $u_1>0$ и фиг. 75б — для случая $u_1<0$). В первом случае мы получаем орбиту эллиптического типа, когда u колеблется в интервале $u_1<u<u_2$ (u_1 соответствует афелию). Во втором случае получается орбита гиперболического типа. Разумеется, существуют и другие частные случаи: при $u_1=0$ мы получаем орбиту параболического типа, а если $u_1=u_2$, то получается круговая орбита.



Фиг. 75. Графики $f(u)$ для орбиты эллиптического типа (а); для орбиты гиперболического типа (б).

Общее решение (7.197) в эллиптических функциях Якоби получается с помощью подстановки

$$x=\frac{1}{2}\varphi\sqrt{2m(u_3-u_1)}, \quad y=\sqrt{\frac{u-u_1}{u_2-u_1}}, \quad k=\sqrt{\frac{u_2-u_1}{u_3-u_1}}. \qquad (7.202)$$

В этом случае (7.197) принимает вид

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=(1-y^2)(1-k^2y^2) \qquad (7.203)$$

и общее решение этого уравнения имеет вид

$$y=\operatorname{sn}(x+\delta), \qquad (7.204)$$

где δ — произвольная постоянная. Таким образом, *все геодезические орбиты, имеющие перигелий, удовлетворяют условию*

$$u-u_1=(u_2-u_1)\operatorname{sn}^2\left(\frac{1}{2}\varphi\sqrt{2m(u_3-u_1)}+\delta\right), \qquad (7.205)$$

где $u=1/r$, *а модуль эллиптической функции, согласно (7.202), равен* k.

Сравним этот результат с законом планетарных орбит в ньютоновской астрономии. Приступая к численным оценкам, мы отождествим r с расстоянием от центра Солнца в ньютоновской модели. Таким образом, беря для массы Солнца значение, приведенное в (4.137), а для его радиуса величину $6{,}953\cdot 10^{10}$ *см* = 2,319 *сек*, мы находим, что на поверхности Солнца

$$mu=\frac{m}{r}=2{,}122\cdot 10^{-6}, \qquad (7.206)$$

т. е. оказывается очень малой безразмерной величиной. Для более удален-

ных точек величина mu еще меньше (в частности, для перигелия и афелия), так что (7.199) приблизительно дает

$$2mu_3 = 1. \qquad (7.207)$$

Таким образом, отношения u_1/u_3 и u_2/u_3 оказываются малыми величинами, и, следовательно, в силу (7.202) приближенно $k = 0$. Но когда модуль стремится к нулю, эллиптическая функция sn вырождается в обычный синус, так что уравнение орбиты принимает вид

$$u - u_1 = (u_2 - u_1)\sin^2\left(\frac{1}{2}\varphi + \delta\right). \qquad (7.208)$$

Это — фокальное выражение эксцентриситета $e = (u_2 - u_1)/(u_2 + u_1)$ и, следовательно, оно задает эллипс или гиперболу, в зависимости от знака неравенства: $u_1 > 0$ или $u_1 < 0$. Таким образом, на основе гипотез о геодезических и приемлемых приближений мы получаем с высокой степенью точности важнейший астрономический факт — эллиптический характер планетарных орбит. Из (7.194) вытекает закон площадей.

Чтобы исследовать существующее небольшое различие между релятивистской орбитой и ньютоновским эллипсом, обратимся к точному уравнению (7.205) для релятивистской орбиты. Эллиптическая функция sn имеет период $4K$, а ее квадрат (sn^2) — период $2K$, где

$$K = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}. \qquad (7.209)$$

Следовательно, приращение φ при смещении перигелия в точности равно

$$\Delta\varphi = \frac{4K}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}}. \qquad (7.210)$$

Как мы убедились выше, величина k мала. Пренебрегая k^4, получаем из (7.209)

$$K = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\left(1 + \frac{1}{2}k^2y^2\right) = \frac{1}{2}\pi\left(1 + \frac{1}{4}k^2\right). \qquad (7.211)$$

В силу (7.199)

$$2m(u_3 - u_1) = 1 - 2m(2u_1 + u_2) \qquad (7.212)$$

и, так как отношения u_1/u_3 и u_2/u_3 малы, то (7.202) приближенно дает

$$k^2 = 2m(u_2 - u_1). \qquad (7.213)$$

Таким образом, в силу (7.211)

$$K = \frac{1}{2}\pi\left[1 + \frac{1}{2}m(u_2 - u_1)\right] \qquad (7.214)$$

и (7.210) принимает вид

$$\Delta\varphi = 2\pi\left[1 + \frac{1}{2}m(u_2 - u_1)\right][1 + m(2u_1 + u_2)] = 2\pi\left[1 + \frac{3}{2}m(u_1 + u_2)\right]. \qquad (7.215)$$

Поскольку эта величина несущественно превышает 2π, орбита должна рассматриваться как эллипс, слабо вращающийся в описанном выше смысле. *Смещение перигелия* за один период вращения планеты вокруг Солнца равно

$$\varepsilon = \Delta\varphi - 2\pi = 3\pi m(u_1 + u_2) = 3\pi m\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right), \qquad (7.216)$$

где r_1 и r_2 соответствуют двум противоположным точкам (афелию и перигелию). Так как ε — очень малая величина, то допустима замена ее соответствующей величиной из классической механики. Таким образом, если

a — большая полуось орбиты,

e — эксцентриситет орбиты,

T — период (планетарный год),

то мы имеем

$$r_1 = a(1+e), \quad r_2 = a(1-e), \quad m = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}, \tag{7.217}$$

и (7.216) принимает вид

$$\varepsilon = \frac{24\pi^3 a^2}{T^2(1-e^2)}. \tag{7.218}$$

Здесь, как и на протяжении всей книги, a и T измеряются в одинаковых единицах; в противном случае мы должны были бы представлять вместо T величину cT, где c — скорость света.

Формула Эйнштейна (7.218) (Эйнштейн [257]) для смещения перигелия за один период вращения представляет собой одну из наиболее известных формул общей теории относительности[1]). Как отмечалось ранее, в задачу данной книги не входит обсуждение вопроса о согласии этой формулы с астрономическими наблюдениями. Значительная трудность состоит в том, что в солнечной системе не одна, а много планет, и их взаимное притяжение существенно. Наиболее подходящей для наблюдения оказывается планета Меркурий[2]), поскольку для нее формула (7.218) дает смещение 43",03 $\pm$ 0,03 за земной век (Клименс [162], Мак-Витти [732][3])). И ньютоновская теория возмущений, и наблюдения дают для смещения величину более, чем в 100 раз превышающую данную. Если же к расчетной величине прибавить релятивистское смещение, то получается хорошее согласие с наблюдениями[4]).

---

[1]) Аналогичная формула получена также в теориях Уайтхеда [1378] и Биркгоффа [57, 60]. Ее престиж настолько велик, что вряд ли какая-нибудь теория гравитации может оказаться приемлемой, если она не будет давать эту (или практически неотличимую от нее) формулу. Общепринятая форма записи выражения для ε [формула (7.218)] несколько затемняет ее подлинную связь с метрикой (7.184). Из (7.199) и (7.216) ясно, что ε зависит (в нашем приближении) лишь от значения u_3, которое является корнем кубического уравнения $f(u) = 0$, где $f(u)$ имеет вид (7.198). Если положить $2mu_3 = x$, $\eta = 1$, то это уравнение примет вид

$$x^3 - x^2 + 4m^2\alpha^2 x + 4m^2\alpha^2(\beta^2 - 1) = 0.$$

Согласно (7.207), $x = 1 - \xi$, где ξ — малая величина. Мы сразу же получаем $\xi = 4m^2\alpha^2\beta^2$, и (7.216) дает

$$\varepsilon = 3\pi m(u_1 + u_2) = 3\pi m\left(\frac{1}{2m} - u_3\right) = \frac{3}{2}\pi(1-x) = \frac{3}{2}\pi\xi = 6\pi\frac{m^2}{h^2},$$

где приближенно $h = (\alpha\beta)^{-1} = r^2 d\varphi/dt$. Могло бы показаться, что смещение перигелия должно рассматриваться *как эффект, пропорциональный* m^2. Однако легко убедиться, что для орбиты эллиптического типа h^2 есть малая величина порядка m, следовательно, смещение представляет собой эффект не второго, а первого порядка по m. Действительно, если разложить метрическую форму (7.184) в ряд по m и взять лишь первый член разложения, то получится правильная величина для смещения [см. P. S. Florides, J. L. Synge, Communications of the Dublin Institute for Advanced Studies, A14 (1961)].

[2]) Джильвари [391, 392] предложил использовать для этой цели астероид Икарус, открытый в 1949 г., или искусственный спутник.

[3]) Мак-Витти получил величину 43",15.

[4]) Вычисленное (теоретическое) смещение равно 5557", 18 $\pm$ 0,85; наблюдаемое же равно 5599", 74 $\pm$ 0,41; разность равна 42", 56 $\pm$ 0,94 (Клименс [162], Мак-Витти [732]). О сложности вопроса и трудностях, связанных с формулировкой каждого результата в релятивистских терминах, хорошо сказал Клименс: «Наблюдения не могут

Такая смесь ньютоновской и эйнштейновской теорий психологически неприятна, ибо эти теории основываются на слишком разных исходных концепциях. Ситуация прояснится лишь после того, как будет решена рациональным и математически удовлетворительным образом релятивистская проблема многих тел. Более того, необходимы пояснения, относительно чего перигелий вращается. В рассмотренной выше теории это вращение происходит относительно оси 3-репера, параллельно переносимого вдоль мировой линии центра Солнца. Но это тоже из тех вещей, которые требуют объяснения с эмпирической точки зрения. Перейдем к изучению *световых лучей*, понимая под этим орбиты (r, φ) вдоль изотропных геодезических. В этом случае в формуле (7.200) $\eta = 0$ и, исключая u_3 из (7.199) и (7.200), получаем

$$4mu_1 = 1 - 2mu_2 \pm [(1 + 2mu_2)^2 - 16m^2u_2^2]^{1/2}. \qquad (7.219)$$

Так как u_2 и u_3 положительны, из формулы (7.200) следует, что величина u_1 отрицательна. Следовательно, беря перед (7.219) знак минус, мы получаем, приближенно,

$$2mu_1 = -2mu_2 + 4m^2u_2^2. \qquad (7.220)$$

Тогда (7.200) дает

$$2mu_3 = 1 - 4m^2u_2^2. \qquad (7.221)$$

Если луч света приходит из точки $r = \infty$ $(u = 0)$, проходит Солнце и снова удаляется на бесконечность, то в силу (7.197) полное приращение азимута равно

$$\Delta\varphi = 2\int_{0_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{f(u)}} = 2\int_0^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}}, \qquad (7.222)$$

где

$$z_1 = 2mu_1, \quad z_2 = 2mu_2, \quad z_3 = 2mu_3. \qquad (7.223)$$

Используя приближения (7.220), (7 221), выполняя подстановку и интегрируя, получаем с точностью до первого порядка по z_2

$$\Delta\varphi = 2\int_0^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{(z_2 - z)(z + z_2 - z_2^2)(1 - z - z_2^2)}} =$$

$$= 2\int_0^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{z_2^2 - z^2}}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{z_2^2}{z + z_2} + \frac{1}{2}z\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}z_2 + \frac{1}{2}z_2\right) = \pi + 4mu_2. \qquad (7.224)$$

Мы получили формулу Эйнштейна [259] для *отклонения луча света*: луч света отклоняется в сторону Солнца на угол

$$\Delta\varphi - \pi = \frac{4m}{r_2}, \qquad (7.225)$$

где r_2 — минимальное значение r при прохождении луча возле Солнца.

быть выполнены в ньютоновской системе отсчета. Они относятся к системе координат, движущейся вследствие суточного вращения Земли, т. е., другими словами, на наблюдаемые эффекты накладывается прецессия суточного вращения. Задача учета прецессии — одна из самых трудных, если не самая трудная, в астрономии, занимающейся определением точек расположения астрономических объектов. В свете этих замечаний не удивительно, что существует разница во мнениях о согласии между эмпирическими и теоретическими результатами».

Измеряя независимо массу, длину и время, последнюю формулу можно переписать в виде

$$\Delta\varphi - \pi = \frac{4\gamma m}{c^2 r_1}, \tag{7.226}$$

где γ — гравитационная константа, а c — скорость света.

Для луча, касающегося поверхности Солнца, формула (7.225) [см. (7.206)] дает отклонение

$$8{,}488 \cdot 10^{-6}\ \text{рад} = 1'',75. \tag{7.227}$$

Эффект такого отклонения должен приводить к искажению видимой картины звездного неба, когда напротив последнего оказывается Солнце. Звезды будут казаться раздвинутыми на малый угол, всюду пропорциональный угловому расстоянию от центра Солнца. Яркость Солнца мешает наблюдать этот эффект, и его можно обнаружить лишь при полных солнечных затмениях. Оказывается, что такого рода деформация звездного неба действительно наблюдается, при этом результаты наблюдений достаточно хорошо согласуются с формулой (7.225). Результаты наблюдений в случае солнечных затмений, начиная с 1919 и по 1952 г., и обсуждение этих результатов читатель может найти у Мак-Витти [732].

В поле Солнца имеют место следующие явления:

1) смещение перигелия;
2) отклонение луча света;
3) спектральное красное смещение.

Из этих явлений два уже были описаны выше. Третий эффект мы рассмотрим в следующем параграфе.

§ 9. Спектральные смещения и мировая функция

В гл. III, § 7 была рассмотрена релятивистская теория спектральных смещений и было показано, что во всех случаях этот эффект можно интерпретировать как эффект Допплера, обусловленный относительным движением источника и наблюдателя. Однако это не более чем способ выражаться, и в некоторых случаях полезно разделить эффект смещения на две части, одна из которых обязана относительному движению, а другая — гравитации.

Как показано было в гл. III, § 7, для спектрального смещения справедливы две формулы, которые математически эквивалентны, но сильно отличаются по форме. Напомним эти формулы. На фиг. 76 показаны мировая линия C' источника и мировая линия C наблюдателя, а также соседние изотропные геодезические $P'P$ и $Q'Q$, соединяющие C и C'. Тогда, если $P'Q' = ds'$ и $PQ = ds$, то смещение, согласно (3.49), задается формулой

$$\frac{\nu' - \nu}{\nu'} = 1 - \frac{ds'}{ds}. \tag{7.228}$$

(Смещение в направлении красной линии — красное смещение — положительно.) С другой стороны, для энергии фотона [см. (3.37)] имеем

$$\frac{\nu' - \nu}{\nu'} = \frac{p_{i'}V^{i'} - p_i V^i}{p_{i'}V^{i'}}, \tag{7.229}$$

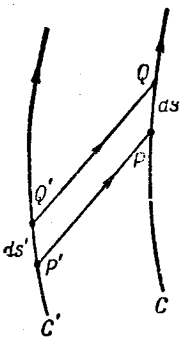
где $p^{i'}$ и p^i — 4-импульсы фотона, а $V^{i'}$ и V^i — 4-скорости источника и наблюдателя в точках P' и P соответственно. Вследствие (2.17) и гипотез [они уже использовались при выводе (7.229)], согласно кото-

рым p^i есть вектор, касательный к кривой $P'P$ и параллельно переносимый вдоль нее, мы можем записать (7.229) с помощью мировой функции $\Omega(P', P)$ аналогично (3.53)

$$\frac{\nu'-\nu}{\nu'}=\frac{\Omega_{i'}V^{i'}+\Omega_i V^i}{\Omega_{i'}V^{i'}}. \qquad (7.230)$$

Формулы (7.228) и (7.230) представляют собой формулы спектрального смещения, которыми мы в дальнейшем будем пользоваться.

В случае, когда и источник, и наблюдатель покоятся в стационарном пространстве, лучше оперировать с (7.228). В стационарном пространстве[1]) метрический тензор g_{ij} от временно́й координаты (x^4 или t) не зависит, и пространство — время допускает группу движений вдоль t-линии. Изотропный конус с вершиной в точке Q' получается из изотропного конуса с вершиной в точке P' посредством простого смещения всех его точек вверх с одним и тем же приращением t. Когда мы говорим, что источник и наблюдатель «покоятся», имеется в виду, что C' и C являются t-линиями, и, следовательно, если dt' относится к $P'Q'$, а dt — к PQ, то



Фиг. 76. Диаграмма для объяснения спектрального смещения.

$$dt'=dt. \qquad (7.231)$$

Это — основная формула. Мы имеем

$$ds'^2=-g'_{44}dt'^2, \quad ds^2=-g_{44}dt^2, \qquad (7.232)$$

и, следовательно, спектральное смещение имеет вид

$$\frac{\nu'-\nu}{\nu'}=1-\sqrt{\frac{g'_{44}}{g_{44}}}. \qquad (7.233)$$

Применим эту формулу к случаю поля Солнца, когда

$$\Phi=\frac{dr^2}{1-\frac{2m}{r}}+r^2d\sigma^2-\left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2. \qquad (7.234)$$

Если источник находится в точке r', а наблюдатель — в точке r (оба фиксированы), то (7.233) дает

$$\frac{\nu'-\nu}{\nu'}=1-\sqrt{\frac{1-\frac{2m}{r'}}{1-\frac{2m}{r}}}. \qquad (7.235)$$

Так как m/r — малая величина для всех точек вне Солнца, то (7.235) можно заменить приближенной формулой

$$\frac{\nu'-\nu}{\nu'}=\frac{m}{r'}-\frac{m}{r}. \qquad (7.236)$$

Если источником служит атом на поверхности Солнца, а наблюдатель находится на Земле (пусть ее положение фиксировано), то $r'=a$ (радиус Солнца), и последним членом в (7.236) можно пренебречь. Таким образом, мы приходим к формуле *красного смещения*, полученной Эйнштейном,

$$\frac{\nu'-\nu}{\nu'}=\frac{m}{a} \qquad (7.237)$$

[1]) О геометрической оптике в статистическом пространстве, заполненном средой, см. гл. XI, § 4.

или, в других единицах измерения,

$$\frac{\nu' - \nu}{\nu'} = \frac{\gamma m}{c^2 a}. \qquad (7.238)$$

Эта безразмерная величина в точности равна четвертой части отклонения (7.225) для луча света, касающегося поверхности Солнца, и ее численное значение равно $2{,}122 \cdot 10^{-6}$. Иногда спектральное смещение выражают в *км/сек* и, так как

$$1 = 2{,}998 \cdot 10^5 \text{ км/сек}, \qquad (7.239)$$

то красное смещение (7.237), обусловленное полем Солнца, равно 0,636 *км/сек*.

У Мак-Витти [732] приведена таблица красных смещений, наблюдаемых в спектре Солнца.

Между теорией и наблюдениями имеются некоторые расхождения, причем теоретическое значение (7.237) оказывается близким к измеренному лишь на краю солнечного диска, а наблюдаемое смещение убывает при приближении к центру диска. Согласно изложенной выше теории, положение источника на поверхности Солнца не должно вообще играть никакой роли. Для очень плотного спутника Сириуса красное смещение должно быть примерно в три раза больше, чем для Солнца. Достаточно точно установлено, что в этом случае имеется качественное согласие между наблюдениями и теорией (Толман [1270], стр. 212, Бергман [38], стр 222; Мёллер [767], стр. 348)[1]).

Простая формула (7.233) применима лишь к стационарным пространствам при условии, если источник и наблюдатель в нем фиксированы. Поправку на движение источника и наблюдателя можно приближенно оценить путем добавления эффекта Допплера, обусловленного относительным радиальным движением в плоском пространстве — времени. Однако для последовательного рассмотрения красного смещения лучше провести все рассуждения сначала, не пользуясь предположением о стационарности и применяя вместо (7.228) формулу (7.230). Если бы мировая функция Ω была известна, то формула (7.230) задавала бы точное спектральное смещение для любых скоростей источника и наблюдателя.

Рассмотрим вновь случай, когда поле гравитации можно считать слабым (пространство — время малой кривизны). Вычислим мировую функцию с точностью до первого порядка. Мы не будем делать никаких предположений относительно скоростей источника и наблюдателя. Последнее могло бы представлять определенный интерес, но не в связи с рассмотрением эффекта спектрального смещения. Дополнительное ограничение малости скоростей будет наложено несколько позднее.

Будем пользоваться координатами x^i, для которых

$$g_{ij} = \eta_{ij} + \gamma_{ij}, \qquad \eta_{ij} = \operatorname{diag}(1, 1, 1, -1), \qquad (7.240)$$

причем γ-члены оказываются величинами первого порядка малости (O_1). Для большей наглядности будем рассматривать x^i как прямоугольные декар-

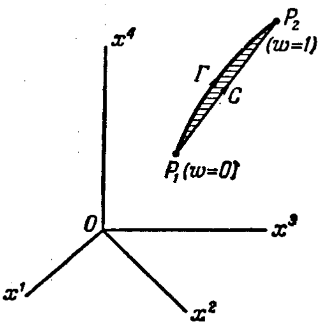
[1]) Однако Мак-Витти [732] получил теоретическое значение, более чем в 2 раза превышающее эмпирическое. См. также работы Финлай-Френдлиха [329—330]. [См. также С. И. Вавилов, Экспериментальные основания общей теории относительности, ГИЗ, 1928.— *Прим. ред.*]

товы координаты в евклидовом четырехмерном пространстве (фиг. 77), так что следует делать различие между *геодезической*, определяемой уравнениями

$$\frac{d^2x^i}{dw^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dw}\frac{dx^k}{dw}=0, \qquad (7.241)$$

и *прямой линией*, задаваемой линейными уравнениями.

Пусть P_1 и P_2 — две точки, соединенные геодезической Г (может быть, изотропной) и прямой линией C. Для Г мы имеем уравнения (7.241), где w — канонический параметр, принимающий значения от 0 в точке P_1 до 1 в точке P_2. Уравнения для C имеют вид



Фиг. 77. Геодезическая Г и примыкающая к ней прямая линия C.

$$x^i=(1-w)\,x^{i_1}+wx^{i_2}, \qquad (7.242)$$

где w снова меняется в интервале от 0 до 1, а x^{i_1} и x^{i_2} — координаты точек P_1 и P_2 соответственно. Установим соответствие между точками на Г и C, связывая каждую пару точек с одним и тем же значением w.

В силу слабой искривленности пространства, Г лежит близко от C и фактически C можно рассматривать как вариацию Г. Из определения геодезической (гл. I, § 2) следует, что

$$\int\limits_{\Gamma} g_{ij}\frac{dx^i}{dw}\frac{dx^j}{dw}\,dw=\int\limits_{C} g_{ij}\frac{dx^i}{dw}\frac{dx^j}{dw}\,dw+O_2. \qquad (7.243)$$

Тогда в силу (2.1) мировая функция определяется формулами

$$\Omega(P_1P_2)=\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma} g_{ij}\frac{dx^i}{dw}\frac{dx^j}{dw}\,dw=\frac{1}{2}\int\limits_{C} g_{ij}\frac{dx^i}{dw}\frac{dx^j}{dw}\,dw+O_2=$$

$$=\frac{1}{2}\Delta x^i\Delta x^j\int\limits_{C} g_{ij}\,dw+O_2, \qquad (7.244)$$

$$\Delta x^i=x^{i_2}-x^{i_1}. \qquad (7.245)$$

По сути дела, мы имеем

$$\Omega(P_1P_2)=\frac{1}{2}\eta_{ij}\Delta x^i\Delta x^j+\frac{1}{2}\Delta x^i\Delta x^j\int\limits_{C}\gamma_{ij}\,dw+O_2, \qquad (7.246)$$

где первый член — мировая функция для плоского пространства — времени, а второй имеет порядок малости O_1.

Мы предполагаем, что γ_{ij} — заданные функции x^i. При вычислении интеграла (7.246) нужно подставить x^i из (7.242), так что

$$\gamma_{ij}(x)=f_{ij}(P_1,P_2,w), \qquad (7.246)$$

и мировая функция приобретает вид (погрешностью второго порядка малости мы пренебрегаем)

$$\Omega(P_1,P_2)=\frac{1}{2}\eta_{ij}\Delta x^i\Delta x^j+\frac{1}{2}\Delta x^i\Delta x^j\int\limits_0^1 f_{ij}(P_1,P_2,w)\,dw. \qquad (7.247)$$

Все, что мы должны сделать, — это вычислить интеграл вдоль прямой C.

Для вычисления спектрального смещения нужна не сама мировая функция, а ее частные производные. Переходя к дифференцированию (7.247), заметим, что

$$(\Delta x^i)_{,j_1} = -\delta_{ij}, \quad (\Delta x^i)_{,j_2} = \delta_{ij}, \tag{7.248}$$

и в силу (7.242) и (7.246) для фиксированного значения w

$$f_{ij,k_1} = (1-w)\,\gamma_{ij,k}, \quad f_{ij,k_2} = w\gamma_{ij,k}. \tag{7.249}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Omega_{k_1} &= -\eta_{jk}\Delta x^j - \Delta x^j \int_0^1 \gamma_{jk}\,dw + \frac{1}{2}\Delta x^i \Delta x^j \int_0^1 \gamma_{ij,k}(1-w)\,dw, \\ \Omega_{k_2} &= \eta_{jk}\Delta x^j + \Delta x^j \int_0^1 \gamma_{jk}\,dw + \frac{1}{2}\Delta x^i \Delta x^j \int_0^1 \gamma_{ij,k} w\,dw. \end{aligned} \tag{7.250}$$

Хотя ковариантные производные Ω второго порядка для вычисления спектральных смещений не нужны, мы могли бы их вычислить аналогичным образом (следуя обозначениям гл. II, мы будем отмечать их индексом без черточек). Имеем

$$\begin{aligned} \Omega_{k_1 m_1} &= \Omega_{k_1, m_1} - \Gamma^{a_1}_{k_1 m_1}\Omega_{a_1}, \\ \Omega_{k_1 m_2} &= \Omega_{m_2 k_1} = \Omega_{k_1, m_2} = \Omega_{m_2, k_1}, \\ \Omega_{k_2 m_2} &= \Omega_{k_2, m_2} - \Gamma^{a_2}_{k_2 m_2}\Omega_{a_2}, \end{aligned} \tag{7.251}$$

где вторичный (численный) индекс при Γ означает, что соответствующая величина вычисляется в точках P_1 или P_2, и, следовательно,

$$\begin{aligned} \Omega_{k_1 m_1} &= \eta_{km} + \int_0^1 \gamma_{km}\,dw - \Delta x^j \int_0^1 (\gamma_{jk,m} + \gamma_{jm,k})(1-w)\,dw + \\ &\quad + \frac{1}{2}\Delta x^i \Delta x^j \int_0^1 \gamma_{ij,km}(1-w)^2\,dw + \Gamma^{a_1}_{k_1 m_1}\eta_{aj}\Delta x^j, \\ \Omega_{k_1 m_2} &= \Omega_{m_2 k_1} = -\eta_{km} - \int_0^1 \gamma_{km}\,dw - \Delta x^j \int_0^1 \gamma_{jk,m} w\,dw + \\ &\quad + \Delta x^j \int_1^1 \gamma_{jm,k}(1-w)\,dw + \frac{1}{2}\Delta x^i \Delta x^j \int_0^1 \gamma_{ij,km} w(1-w)\,dw, \\ \Omega_{k_2 m_2} &= \eta_{km} + \int_0^1 \gamma_{km}\,dw + \Delta x^j \int_0^1 (\gamma_{jk,m} + \gamma_{jm,k})\,w\,dw + \\ &\quad + \frac{1}{2}\Delta x^i \Delta x^j \int_0^1 \gamma_{ij,km} w^2\,dw - \Gamma^{a_2}_{k_2 m_2}\eta_{aj}\Delta x^j. \end{aligned} \tag{7.252}$$

В этих формулах погрешность порядка O_2. Можно сравнить (7.252) с формулой (2.95), при выводе которой мы исходили из того же приближения (малая кривизна), но в которой координатная система была общего вида.

Для слабого статического поля γ-члены не зависят от x^4 (или t), и $\gamma_{\alpha 4} = 0$. Это не приводит к существенному упрощению выражения (7.246)

для Ω, но проявляется при записи частных производных (7.250):

$$\Omega_{\gamma_1} = -\Delta x^\gamma - \Delta x^\beta \int_0^1 \gamma_{\beta\gamma} dw + \frac{1}{2}\Delta x^\alpha \Delta x^\beta \int_0^1 \gamma_{\alpha\beta,\gamma}(1-w)\,dw + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \int_0^1 \gamma_{44,\gamma}(1-w)\,dw,$$

$$\Omega_{4_1} = \Delta t\left(1 - \int_0^1 \gamma_{44} dw\right) = -\Delta t \int_0^1 g_{44} dw, \qquad (7.253)$$

$$\Omega_{\gamma_2} = \Delta x^\gamma + \Delta x^\beta \int_0^1 \gamma\beta_\gamma dw + \frac{1}{2}\Delta x^\alpha \Delta x^\beta \int_0^1 \gamma_{\alpha\beta,\gamma} w\,dw + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \int_0^1 \gamma_{44,\gamma} w\,dw,$$

$$\Omega_{4_1} = -\Omega_{4_2}.$$

Последнее уравнение означает, что производные Ω по t в точках P_1 и P_2 отличаются лишь знаком. Вследствие существования группы движений этот факт имеет место не только в статическом, но и в стационарном случае, и мы могли бы использовать его для вывода (7.233) из (7.230). Для поля Солнца метрику (7.234) можно записать в виде

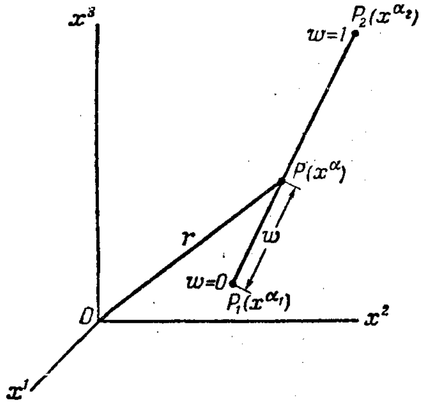
$$\Phi = dx^\alpha dx^\alpha + \frac{2m/r^3}{1-(2m/r)}(x^\alpha dx^\alpha)^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2, \quad r^2 = x^\alpha x^\alpha, \qquad (7.254)$$

так что, опуская члены порядка малости O_2, мы имеем

$$g_{ij} = \eta_{ij} + \gamma_{ij},$$
$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{2mx^\alpha x^\beta}{r^3} = 2m(r^{-1}\delta_{\alpha\beta} - r_{,\alpha\beta}), \qquad (7.255)$$
$$\gamma_{\alpha 4} = 0, \quad \gamma_{44} = \frac{2m}{r}.$$

В силу (7.246) мировая функция для поля Солнца записывается как

$$\Omega(P_1P_2) = \frac{1}{2}[\Delta x^\alpha \Delta x^\alpha - (\Delta t)^2] + m\Delta x^\alpha \Delta x^\beta \int_0^1 \frac{x^\alpha x^\beta}{r^3} dw + m(\Delta t)^2 \int_0^1 \frac{dw}{r} + O_2. \qquad (7.256)$$



Фиг. 78. Пространственная схема, поясняющая использование мировой функции в вычислениях.

Значения входящих сюда интегралов приведены на стр. 263. Первые производные Ω задаются формулой (7.253), в которую и следует подставить выражения (7.255). В процессе вычислений желательно иметь прежде всего диаграмму (фиг. 78), изображающую трехмерное евклидово пространство, в котором x^α представляют собой прямоугольные декартовы координаты. Пожалуй на этом можно закончить вычисление мировой функции Ω и ее производных в слабом, в частности статическом поле (как еще более частный случай последнего, мы рассмотрели поле Солнца). Как только эти произ-

водные найдены, формула (7.230) позволяет вычислить спектральное смещение. Но здесь возникает одно осложнение. В любой конкретной задаче точку испускания P_1 и точку приема P_2 (обозначенные на фиг. 76 через P' и P) нельзя обе выбрать произвольно, поскольку P_1P_2—изотропная геодезическая. Начнем с конкретизации P_2, т. е. зададим координаты x^{i_2}. Изобразим область прошедшего для изотропного конуса с вершиной в точке P_2, пересекающую мировую линию источника в точке P_1. Ясно, что независимыми величинами будут

$$x^{i_2}, \quad \Delta x^{\alpha}, \tag{7.257}$$

и что $\Delta x^4 (=\Delta t)$ определяется этими величинами в заданном пространстве — времени. Переходя к отысканию Δt, заметим, что $\Omega(P_1P_2)=0$, так как P_1P_2 — изотропная геодезическая и, следовательно, основное дифференциальное уравнение (2.20) дает

$$g^{k_2m_2}\Omega_{k_2}\Omega_{m_2}=0. \tag{7.258}$$

Так как из (7.240) с точностью до первого порядка следует, что

$$g^{ij}=\eta_{ij}=\eta_{ia}\gamma_{ab}\eta_{bj}, \tag{7.259}$$

то (7.258) в силу (7.250) можно записать в виде

$$\eta_{km}\Omega_{k_2}\Omega_{m_2}-\gamma_{k_2m_2}\Delta x^k\Delta x^m=0. \tag{7.260}$$

Используя снова (7.250), мы получаем

$$\eta_{km}\Delta x^k\Delta x^m=Q, \tag{7.261}$$

где

$$Q=\gamma_{k_2m_2}\Delta x^k\Delta x^m-2\Delta x^j\Delta x^k\int_0^1\gamma_{jk}\,dw-\Delta x^i\Delta x^j\Delta x^k\int_0^1\gamma_{ij,k}w\,dw. \tag{7.262}$$

Следовательно,

$$\begin{gathered}(\Delta t)^2=\Delta x^{\alpha}\Delta x^{\alpha}-Q,\\ \Delta t=(\Delta x^{\alpha}\Delta x^{\alpha})^{1/2}-\frac{1}{2}Q\,(\Delta x^{\alpha}\Delta x^{\alpha})^{-1/2}.\end{gathered} \tag{7.263}$$

Здесь последний член мал, и в Q можно подставить

$$\Delta t=(\Delta x^{\alpha}\,\Delta x^{\alpha})^{1/2}. \tag{7.264}$$

Членами порядка малости O_2 мы всюду пренебрегаем.

Все это представляется достаточно громоздким, но стремление к подробному анализу оправдано важностью вопроса о спектральных смещениях с точки зрения астрономии. Чтобы придать методу бóльшую ясность, опишем краткую схему этого метода и затем применим его к случаю малых скоростей источника и наблюдателя. Основными пунктами являются следующие:

1) зададим поле, т. е. малые функции $\gamma_{ij}(x)$;

2) выберем точку приема $P_2(x^{i_2})$;

3) зададим Δx^{α}, фиксируя таким образом положение точки испускания (но не время испускания);

4) вычислим[1]) из (7.263) Δt, получая таким образом точку испускания P_1;

---

[1]) В этих расчетах интегралы вычисляются на прямой линии (фиг. 78) с учетом обоснованного допущения о линейности изменения t в случае нестационарных полей.

5) Вычислим[1]) из (7.250) Ω_{k_1} и Ω_{k_2} как функции семи величин (7.257);

6) зададим два единичных 4-вектора, определяющие 4-скорости V^{i_1}, V^{i_2} источника и наблюдателя;

7) вычислим спектральные смещения по формуле (7.230).

Допустим, что V^{α_1} и V^{α_2} малы (мы пренебрегаем их произведениями[2]). Тогда для любого из них

$$g_{44}(V^4)^2 = -1, \tag{7.265}$$

так что

$$V^4 = (1-\gamma_{44})^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\gamma_{44}. \tag{7.266}$$

Поэтому

$$\Omega_k V^k = \Omega_\alpha V^\alpha + \Omega_4\left(1 + \frac{1}{2}\gamma_{44}\right), \tag{7.267}$$

и, следовательно, в силу (7.250)

$$\begin{aligned} \Omega_{k_1}V^{k_1} &= \Omega_{4_1} + \frac{1}{2}\gamma_{4_14_1}\Delta t - V^{\alpha_1}\Delta x^\alpha, \\ \Omega_{k_2}V^{k_2} &= \Omega_{4_2} - \frac{1}{2}\gamma_{4_24_2}\Delta t + V^{\alpha_2}\Delta x^\alpha, \end{aligned} \tag{7.268}$$

где первые члены справа конечны, тогда как друг е — бесконечно малы. Складывая оба выражения (7.268) и учитывая (7.250), получаем

$$\Omega_{k_1}V^{k_1} + \Omega_{k_2}V^{k_2} = (V^{\alpha_2} - V^{\alpha_1})\Delta x^\alpha + \\ + \frac{1}{2}(\gamma_{4_14_1} - \gamma_{4_24_2})\Delta t + \frac{1}{2}\Delta x^i \Delta x^j \int_0^1 \gamma_{ij,4}\, dw, \tag{7.269}$$

$$\Omega'_{k_1}V^{k_1} = \Delta t + O_1.$$

Таким образом, для малого спектрального смещения (положительное красное смещение) из (7.230) получаем

$$\frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1} = (V^{\alpha_2} - V^{\alpha_1})\frac{\Delta x^\alpha}{\Delta t} + \frac{1}{2}(\gamma_{4_14_1} - \gamma_{4_24_2}) + \\ + \frac{1}{2}\frac{\Delta x^\alpha \Delta x^\beta}{\Delta t}\int_0^1 \gamma_{\alpha\beta,4}\, dw + \Delta x^\alpha \int_0^1 \gamma_{\alpha 4,4}\, dw + \frac{1}{2}\Delta t \int_0^1 \gamma_{44,4}\, dw, \tag{7.270}$$

где Δt, как и в (7.264), приблизительно равно «расстоянию» между источником и наблюдателем.

---

[1]) См. примечание 1 на стр. 261.

[2]) Фактически мы рассматриваем компоненты скорости как величины первого порядка малости (O_1), аналогично γ_{ij}, и опускаем члены O_2. Однако в случае солнечной системы скорости планет оказываются величинами порядка $(m/r)^{1/2}$, тогда как γ-члены — порядка m/r (где m = Масса Солнца; r — расстояние от его центра до поверхности; $m/r = 2\cdot 10^{-6}$). Это наводит на мысль о приближении, в котором V^{α_1} и V^{α_2} имеют порядок $O_{1/2}$, а γ-члены — порядок O_1. Такое приближение можно провести без больших добавочных вычислений; требуемый результат получается, если к правой части (7.270) добавить следующий член:

$$\frac{\Delta x^\alpha \Delta x^\beta}{dt^2}(V^{\alpha_2} - V^{\alpha_1})V^{\beta_1} + \frac{1}{2}(V^{\alpha_1}V^{\alpha_1} - V^{\alpha_2}V^{\alpha_2}). \tag{7.270a}$$

Первый член в формуле (7.270) соответствует эффекту Допплера, обусловленному относительным радиальным движением, второй член описывает гравитационный эффект (как и в случае солнечного спектра), тогда как другие члены — изменение поля во времени. Последние обращаются в нуль, если предположить, что поля меняются во времени очень медленно. Здесь, однако, надо соблюдать некоторую осторожность, связанную с наличием множителей, которые принимают большие значения при больших Δt. В наших приближениях Δt рассматривается как конечная величина, которая, однако, становится большой в случае удаленной звезды. В последнем случае исключение последних членов в (7.270) было бы необоснованным. Однако полное рассмотрение вопроса о приближениях для слабых полей, разумеется, слишком сложно, чтобы его можно было исчерпать здесь[1]). Настоящая глава посвящена рассмотрению пространств — времен со сферической симметрией, и здесь мы позволяли себе «блуждать» вдали от поля Солнца лишь для того, чтобы затем снова обратиться к проблеме спектрального смещения в этом поле, опираясь на более общие соображения.

Возвращаясь к формуле (7.256) для поля Солнца, мы замечаем, что

$$
\begin{gathered}
\Delta x^{\alpha}\,\Delta x^{\beta}\int_0^1 \frac{x^{\alpha}x^{\beta}}{r^3}\,dw = P_1P_2\left(\ln\frac{\operatorname{tg}{}^1/_2\,\theta_1}{\operatorname{tg}{}^1/_2\,\theta_2} + \cos\theta_1 - \cos\theta_2\right), \\
\int_0^1 \frac{dw}{r} = P_1P_2\ln\frac{\operatorname{tg}{}^1/_2\,\theta_1}{\operatorname{tg}{}^1/_2\,\theta_2},
\end{gathered}
\qquad (7.271)
$$

где P_1P_2 — евклидово расстояние (см. фиг. 78), а θ_1 и θ_2 — углы, образуемые линиями OP_1 и OP_2 с отрезком P_1P_2.

---

[1]) Относительно астрономических наблюдений и звездной аберрации см. гл. XI, § 5 и 6. В гл. XI, § 9 обсуждается спектральное смещение в приближении не малости кривизны пространства — времени, а близости источника и наблюдателя.

Глава VIII

НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА[1])

§ 1. Аксиальная симметрия

В рамках ньютоновской физики аксиальную симметрию гравитационного поля определить легко: если пользоваться цилиндрическими координатами (r, φ, z), такими, что на оси симметрии $r = 0$, то гравитационный потенциал не зависит от азимутального угла φ.

Пытаясь перенести это понятие на случай теории относительности, мы приходим к случаю физического пространства, для которого метрический тензор g_{ij} не зависит от одной из координат, причем эта координата (φ) является циклической в том смысле, что, увеличивая ее на 2π, мы возвращаемся в ту же точку, если другие координаты фиксированы. Фактически в этом случае пространство — время допускает группу движений вдоль φ-линий.

При такой общей ситуации, когда необходимо знать 10 функций трех координат, получить какие-либо результаты, представляющие интерес, почти невозможно. Если ввести условие стационарности, то тем самым тензор g_{ij} будет сделан независимым ни от φ, ни от t. Но и этого оказывается недостаточно, поскольку мы все еще имеем дело с десятью функциями.

Поэтому сделаем еще один шаг, предположив, что φ и t обратимы в том смысле, что метрика не меняется, если φ заменить на $-\varphi$, или t на $-t$. Физически это означает, что мы имеем дело с материей, не испытывающей вращений[2]). Математически это означает, что метрическая форма содержит лишь квадраты $d\varphi$ и dt, так что она имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi &= \Psi + g_{33}(dx^3)^2 + g_{44}(dx^4)^2, \\ \Psi &= g_{11}(dx^1)^2 + 2g_{12}\,dx^1\,dx^2 + g_{22}(dx^2)^2, \end{aligned} \tag{8.1}$$

где $g_{\alpha\beta}$ — функции x^1 и x^2; мы обозначили φ через x^3, а t — через x^4. Теперь остается лишь пять неизвестных функций. Но мы сразу же можем сократить это число до *трех*[3]). Основной момент применяемого ниже искусственного приема (Вейль [1350, 1355], Леви-Чивита [631—635], Бах [12],

---

[1]) В оригинале «universes» («вселенные»—*англ.*), но в данном случае вместо малоупотребляемых в русской литературе терминов «миры», «вселенные» здесь употребляется термин «пространство», под которым понимается физическое пространство — время.— *Прим. ред.*

[2]) Поле вращающегося тела изучали в линейном приближении Лэнс и Тирринг [630] и Тирринг [1233]. См. также Стокум [1130, 1131], Кларк [151, 153, 158—160], Дэс [190].

(Изучение этого вопроса с точки зрения теории групп см. в книге Петрова [903], § 50.— *Прим. ред.*)

[3]) Бергман ([38], стр. 206) утверждает, что, основываясь лишь на соображениях симметрии, можно получить форму, содержащую только *две* неизвестные функции. Однако это неверно. Сведение к двум неизвестным функциям предполагает использование некоторых из уравнений поля в вакууме.

Кази [136], Дармуа [188]) состоит в использовании координат (x^1, x^2), для которых Ψ имеет изотермическую форму:

$$\Psi = \alpha^2 [(dx^1)^2 + (dx^2)^2], \tag{8.2}$$

где α — функция координат x^1 и x^2. Таким образом, в несколько измененных обозначениях

$$\Phi = \alpha^2 [(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \beta^2 (dx^3)^2 - \gamma^2 (dx^4)^2, \tag{8.3}$$

где α, β и γ — функции переменных x^1 и x^2. После простых, но громоздких вычислений, использующих (1.106), мы получим для ненулевых компонент тензора Риччи следующие выражения:

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \left(\frac{\alpha_1}{\alpha}\right)_1 + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha}\right)_2 + \frac{\beta_{11}}{\beta} + \frac{\gamma_{11}}{\gamma} + \frac{\alpha_2}{\alpha}\left(\frac{\beta_2}{\beta} + \frac{\gamma_2}{\gamma}\right) - \frac{\alpha_1}{\alpha}\left(\frac{\beta_1}{\beta} + \frac{\gamma_1}{\gamma}\right), \\
R_{22} &= \left(\frac{\alpha_1}{\alpha}\right)_1 + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha}\right)_2 + \frac{\beta_{22}}{\beta} + \frac{\gamma_{22}}{\gamma} + \frac{\alpha_1}{\alpha}\left(\frac{\beta_1}{\beta} + \frac{\gamma_1}{\gamma}\right) - \frac{\alpha_2}{\alpha}\left(\frac{\beta_2}{\beta} + \frac{\gamma_2}{\gamma}\right), \\
R_{12} &= \frac{\beta_{12}}{\beta} + \frac{\gamma_{12}}{\gamma} - \frac{\alpha_2}{\alpha}\left(\frac{\beta_1}{\beta} + \frac{\gamma_1}{\gamma}\right) - \frac{\alpha_1}{\alpha}\left(\frac{\beta_2}{\beta} + \frac{\gamma_2}{\gamma}\right), \\
R_{33} &= \frac{\beta}{\alpha^2}\left\{\Delta\beta + \frac{1}{\gamma}(\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2)\right\}, \\
R_{44} &= -\frac{\gamma}{\alpha^2}\left\{\Delta\gamma + \frac{1}{\beta}(\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2)\right\},
\end{aligned} \tag{8.4}$$

где индексы в правой части означают частные производные по x^1 и x^2, а

$$\Delta\beta = \beta_{11} + \beta_{22}, \quad \Delta\gamma = \gamma_{11} + \gamma_{22}. \tag{8.5}$$

Заметим, что

$$R_3^3 + R_4^4 = \beta^{-2} R_{33} - \gamma^{-2} R_{44} = \frac{1}{\alpha^2\beta\gamma} \Delta(\beta\gamma). \tag{8.6}$$

Все эти соотношения справедливы независимо от того, присутствует материя или нет. Рассмотрим теперь область, в которой материя отсутствует, так что уравнения поля имеют вид

$$R_{ij} = 0. \tag{8.7}$$

Тогда из (8.6) следует замечательный результат:

$$\Delta(\beta\gamma) = 0. \tag{8.8}$$

Это означает, что $\beta\gamma$ есть гармоническая функция переменных x^1 и x^2. Введем обозначение

$$\beta\gamma = r(x^1, x^2); \tag{8.9}$$

тогда существует сопряженная гармоническая функция $z(x^1, x^2)$, такая, что

$$r + iz = f(x^1 + ix^2), \tag{8.10}$$

где f — аналитическая функция. Выполним теперь преобразование

$$(x^1, x^2) \to (r, z). \tag{8.11}$$

Поскольку это преобразование является конформным, изотермический характер квадратичной формы при этом сохраняется, и, следовательно,

$$\alpha^2 [(dx^1)^2 + (dx^2)^2] = A(dr^2 + dz^2), \tag{8.12}$$

где A — функция r и z. Далее, в силу (8.9) имеем

$$\beta = \frac{r}{\gamma}, \tag{8.13}$$

и, следовательно, Φ в (8.3) становится формой, содержащей только *две* произвольные функции.

Чтобы представить этот результат в компактном виде, забудем о прежнем смысле переменных x^1 и x^2 и положим

$$x^1 = r, \quad x^2 = z, \quad x^3 = \varphi, \quad x^4 = t. \tag{8.14}$$

Забудем также о прежнем смысле функций α, β и γ. Теперь мы утверждаем, что *в любой области, где выполняются условия аксиальной симметрии (в том смысле, как она понимается здесь) и в которой*[1])

$$R_3^3 + R_4^4 = 0, \tag{8.15}$$

метрическую форму можно привести к виду

$$\Phi = \alpha^2 (dr^2 + dz^2) + r^2\gamma^{-2} d\varphi^2 - \gamma^2 dt^2, \tag{8.16}$$

где α и γ — функции переменных r, z. Теперь (8.16) с точностью до соотношения (8.13) фактически совпадает с (8.3). Следовательно, для вычисления тензора Риччи можно воспользоваться выражениями (8.4), исключая отсюда с помощью (8.13) β.

Однако из формальных соображений удобно перейти от обозначений (α, γ) к (λ, ν), положив

$$\alpha = e^{\nu-\lambda}, \quad \beta = re^{-\lambda}, \quad \gamma = e^{\lambda}, \tag{8.17}$$

так что метрическая форма принимает следующий вид:

$$\Phi = e^{2(\nu-\lambda)} (dr^2 + dz^2) + r^2 e^{-2\lambda} d\varphi^2 - e^{2\lambda} dt^2. \tag{8.18}$$

Из (8.4) получим

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}(R_{11} + R_{22}) = \Delta\nu - \left(\Delta\lambda + \frac{\lambda_1}{r}\right) + \lambda_1^2 + \lambda_2^2,\\
&\tfrac{1}{2}(R_{11} - R_{22}) = \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \frac{\nu_1}{r},\\
&R_{12} = 2\lambda_1\lambda_2 - \frac{\nu_2}{r},\\
&R_3^3 - R_4^4 = -\frac{2}{\alpha^2}\left(\Delta\lambda + \frac{\lambda_1}{r}\right),\\
&R_3^3 + R_4^4 = 0.
\end{aligned} \tag{8.19}$$

Последнее из этих уравнений нам уже известно.

Потребовав, чтобы удовлетворялась полная система уравнений поля в вакууме (8.7), мы получим

$$\Delta\lambda + \frac{\lambda_1}{r} = 0, \tag{8.20}$$

$$\nu_1 = r(\lambda_1^2 - \lambda_2^2), \quad \nu_2 = 2r\lambda_1\lambda_2, \tag{8.21}$$

$$\Delta\nu + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 0. \tag{8.22}$$

Если уравнение (8.20) удовлетворяется, то уравнение (8.21) интегрируемо, а (8.22) представляет собой следствие двух первых уравнений. Итак, *в любой области E, в которой справедливы уравнения поля для вакуума, поле можно вычислить посредством следующих операций: выбираем в качестве λ любое решение уравнения (8.20), а ν определяем по формуле*

$$\nu = \int r\left[(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\, dr + 2\lambda_1\lambda_2\, dz\right], \tag{8.23}$$

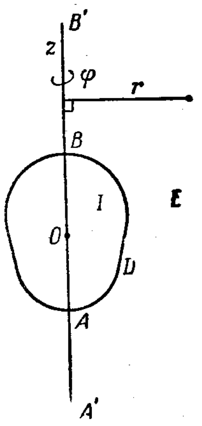
где путь интегрирования лежит в E.

[1]) Хотя мы и выписали все уравнения поля в (8.7), однако использована была лишь одна комбинация (8.15).

Теперь мы подходим к самому удивительному обстоятельству в этих рассуждениях. Мы замечаем, что уравнение (8.20), выписанное в явном виде

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\lambda}{\partial r}+\frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2}=0, \tag{8.24}$$

представляет собой не что иное, как уравнение Лапласа в цилиндрических координатах (r, φ, z) в евклидовом трехмерном пространстве для функции, не зависящей от φ. Это позволяет легко отыскать решение (8.20). Цель всего проведенного анализа в ее физическом аспекте состоит в изучении гравитационного поля невращающегося тела с аксиальной симметрией. Выберем переменные r, φ и z в качестве цилиндрических координат в трехмерном евклидовом пространстве и построим схематическое изображение (фиг. 79) некоторого тела; обозначим внутреннюю область через I, а внешнюю — через E. Можно ожидать, что метрическая форма в E имеет вид (8.18), где $\lambda(r, z)$ — некоторая гармоническая функция, а $\nu(r, z)$ определяется формулой (8.23).



Фиг. 79. Аксиально симметричное тело, изображенное в евклидовом трехмерном пространстве.

Метрика в I совершенно другого рода. Однако прежде чем думать об I, необходимо рассмотреть вопрос об *элементарной евклидовости* в E. Чтобы последняя имела место, для любой бесконечно малой пространственноподобной окружности отношение ее длины к радиусу должно быть равно 2π. Опасным местом является ось z; если взять малую окружность, на которой r, z и t постоянны, причем r — бесконечно малая величина, то, как легко видеть из (8.18), наше требование будет означать, что

$$\nu=0 \text{ для } r=0. \tag{8.25}$$

Теперь ν определяется из (8.23) лишь с точностью до аддитивной постоянной; потребуем, чтобы $\nu = 0$ в точке A. Тогда $\nu = 0$ на AA', но в точке B

$$\nu=\int\limits_{ADB} r\left\{\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial r}\right)^2-\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2\right]dr+2\frac{\partial\lambda}{\partial r}\frac{\partial\lambda}{\partial z}dz\right\}, \tag{8.26}$$

где интеграл (не зависящий от пути в E) берется вдоль границы ADB или вдоль произвольной кривой, которую можно перевести в нее посредством деформаций. Поскольку на BB' величина ν не имеет приращения, путь интегрирования ADB можно заменить полуокружностью бесконечного радиуса. Ясно, что условие элементарной евклидовости выполняется, если λ убывает на бесконечности, по крайней мере не медленнее, чем $(r^2+z^2)^{-1/2}$.

Обратимся теперь к фиг. 80, на которой изображены два тела. Если λ ведет себя указанным выше образом, и $\nu = 0$ в точке A, то $\nu = 0$ и в точке C. Однако нет оснований считать, что $\nu = 0$ на BB' и, следовательно, предлагаемый метод решения проблемы многих тел оказывается непригодным. В общей теории относительности этого и следовало ожидать, так как если бы применение этого метода оказалось успешным, то это означало бы, что существуют два массивных тела, покоящихся в начальный момент времени, несмотря на взаимное гравитационное притяжение.

В ньютоновской теории невозможна ситуация, когда система свободных частиц, в которой имеет место взаимное притяжение между частицами, находится в состоянии равновесия. Однако равновесные системы возможны, если допустить существование *положительной и отрицательной масс* (Бонди [69]), предполагая, что имеет место универсальный закон квадратов (свой для каждого из возможных знаков масс). Это наводит на мысль об

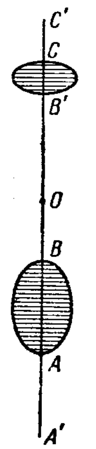
исследовании аксиально симметричных релятивистских полей, соответствующих распределению «частиц» с постоянными массами $m_1 m_2 \ldots$ (не обязательно положительных) на оси z в точках $z_1, z_2, \ldots$ Таким образом, мы берем

$$\lambda = -\frac{m_1}{\varrho_1} - \frac{m_2}{\varrho_2} - \ldots, \qquad (8.27)$$
$$\varrho_1^2 = r^2 + (z - z_1)^2, \quad \varrho_2^2 = r^2 + (z - z_2)^2, \ldots$$

Тогда ν можно вычислить из (8.26). Для двух частиц мы получаем (Курзон [178, 179])

$$\nu = -\frac{m_1^2 r^2}{2\varrho_1^4} - \frac{m_2^2 r^2}{2\varrho_2^4} + \frac{2m_1 m_2}{(z_1 - z_2)^2}\left[\frac{r^2 + (z - z_1)(z - z_2)}{\varrho_1 \varrho_2} - 1\right]. \qquad (8.28)$$

Для любого произвольного числа частиц величина ν задается аналогичной, но более громоздкой формулой. Легко убедиться, что, согласно (8.28), $\nu = 0$ при $r = 0$, коль скоро z лежит *вне* интервала (z_1, z_2), но $\nu \neq 0$ при $r = 0$, если z лежит внутри этого интервала. Следовательно, мы имеем случай, который можно назвать «двумя частицами, соединенными подпоркой». В общем случае можно подобным же образом говорить о подпорке, удерживающей частицы в заданных положениях, однако можно и обойти это сомнительное выражение, утверждая, что (8.27) задает аксиально симметричное поле в вакууме в области E, не включающей отрезок оси z, связывающий две крайние частицы. Область I, в которой этот отрезок лежит, мы не затрагиваем. Сведем I к системе малых сфер радиуса a с центрами в точках, где расположены частицы, и будем оперировать с предельным случаем, когда радиус a очень мал. Область E в этом случае включает отрезки оси z, лежащие между этими сферами, и мы имеем в E поле без особенностей *при условии, что на этих отрезках* $\nu = 0$. Критерием соблюдения этого условия может служить обращение в нуль интеграла (8.26), взятого для каждой из малых полуокружностей радиуса a с центрами в точках $z_1, z_2, \ldots$ Например, чтобы исследовать этот интеграл для полуокружности с центром, скажем, в точке z_1, мы записываем (8.27) в виде $\lambda = -m_1/\varrho_1 + \lambda_1'$, где при $r = 0$ и $z = z_1$ λ_1' — конечная величина. Тогда интеграл (8.26) распадается на три части. Первый интеграл имеет порядок a^{-2}, однако фактически он обращается в нуль. Второй интеграл, вообще говоря, конечен. Третий интеграл обращается в нуль вместе с a. Теперь осталось только обратить в нуль второй интеграл. Для этого, как можно установить, необходимо, чтобы выполнялось условие



Фиг. 80. Для двух тел не может существовать статистического решения!

$$\frac{\partial \lambda_1'}{\partial z} = 0 \text{ для } z = z_1. \qquad (8.29)$$

Таким образом, на оси $\nu = 0$, и поле в области E регулярно (т. е. во всей области E имеет место элементарная евклидовость), коль скоро выполняются условия типа (8.29) (для каждой частицы по одному условию). Примечательно, что, поскольку λ формально представляет собой сумму ньютоновских потенциалов частиц, эти условия тождественны ньютоновским условиям равновесия — результирующая сила, действующая на каждую частицу, должна обращаться в нуль. Можно утверждать, что когда постоянные, характеризующие массы (положительные и отрицательные) и положе-

ния частиц, удовлетворяют указанным условиям, «подпорок» для удерживания системы в равновесии не требуется[1]).

Несмотря на то, что изложенные выше рассуждения интересны и поучительны, они имеют два недостатка. Во-первых, в теории нежелательно иметь дело с сосредоточенными частицами (предел $a \to 0$ недостижим), и, во-вторых, понятие отрицательных масс представляется нефизичным. Лучше всего было бы построить набор моделей, каждая из которых представляла бы приемлемую физическую систему, окруженную пустым пространством — временем. Наиболее простой оказывается модель, где в качестве внутренней области I выбрана сфера $r^2+z^2 \leqslant a^2$, заполненная материей с постоянной «плотностью» σ, и λ определена как ньютоновский потенциал $\lambda = -\int \varrho^{-1}\sigma dI$, где ϱ — евклидово расстояние в пространстве (r, z, φ), а $dI = r dr dz d\varphi$. Тогда $\lambda = -m/\varrho$, где $m = \int \sigma dI$, а ϱ — теперь расстояние от начала отсчета. Отсюда с помощью (8.18) для метрики в области E получаем

$$\Phi = \exp\left(\frac{2m}{\varrho} - \frac{m^2 r^2}{\varrho^4}\right)(dr^2+dz^2) + r^2 \exp\left(\frac{2m}{\varrho}\right) d\varphi^2 - \exp\left(-\frac{2m}{\varrho}\right) dt^2, \quad (8.30)$$
$$\varrho^2 = r^2 + z^2.$$

Но каков вид метрики во внутренней области I? Здесь мы поднимаем весьма обширную проблему, ибо для I отсутствует хорошо поставленная задача. В гл. VII, § 7 был полностью исследован случай сферически симметричной жидкой сферы, и можно было бы подумать, что здесь также следует уделить внимание прежде всего жидким телам. Однако из ньютоновской физики известно, что условие *статичности* накладывает ограничения на равновесные сферически симметричные формы жидкости, и не следует надеяться найти в теории относительности статическое жидкое тело, которое обладало бы аксиальной симметрией, не будучи сферически симметричным.

Фактически мы должны отказаться от рассмотрения жидкостей и, безусловно, от идеи о том, что структура материи задается априори. Нас должен удовлетворять любой тензор энергии, в который входит вместо натяжений давление и (что еще важнее) плотность в котором положительна. Это означает, что мы требуем выполнения для I условий [см. (4.146а)]

$$T_1^1 \geqslant 0, \quad T_2^2 \geqslant 0, \quad T_3^3 \geqslant 0, \quad T_4^4 < 0, \quad (8.31)$$

или, что эквивалентно,

$$G_1^1 \leqslant 0, \quad G_2^2 \leqslant 0, \quad G_3^3 \leqslant 0, \quad G_4^4 > 0. \quad (8.32)$$

Итак, мы получаем тело, ограниченное поверхностью S, определяемой уравнением

$$f(r, z) = 0. \quad (8.33)$$

Эта поверхность отделяет внешнюю область E от внутренней I. На поверхности S тензор Эйнштейна области I должен удовлетворять двум условиям соединения[2]):

$$\begin{aligned} G_1^1 f_{,1} + G_1^2 f_{,2} &= 0, \\ G_2^1 f_{,1} + G_2^2 f_{,2} &= 0. \end{aligned} \quad (8.34)$$

Для построения аксиально симметричного поля в E и в I следует задать метрику (8.3), содержащую *три* функции (α, β и γ) координат x^1 и x^2 (или

[1]) Сферическая симметрия представляет собой частный случай аксиальной симметрии. Чтобы вывести метрическую форму Шварцшильда, берут для λ потенциал нити (Эрец и Розен [317]; в этой же работе рассмотрено поле квадрупольной частицы).

[2]) Мы *не* предполагаем, что (r, φ, z) — допустимые координаты, так как это было бы опрометчиво. Условия (8.34) отражают тот факт, что на S давление обращается в нуль.

эквивалентно r и z). В области E, согласно соотношению $\beta\gamma = r$ [см. (8.13)], число функций сводится к двум. Однако в области I это не так, поскольку здесь справедливо (8.15) и, следовательно,

$$G_1^1 + G_2^2 = 0. \qquad (8.35)$$

При отличных от нуля G_1^1 и G_2^2 (а противное нежелательно) равенство (8.35) противоречит (8.32). Как в E, так и в I элементарная евклидовость требует, чтобы $r\alpha/\beta \to 1$ при $r \to 0$. Поскольку в E задача полностью определена, а требования в I состоят лишь из граничных условий (8.34) и неравенства (8.32), представляется естественным начать рассмотрение с E и затем продвигаться внутрь. Но такой путь отнюдь не легок. Весь процесс можно разделить на следующие ступени:

1) выбор в E гармонической функции $\lambda(r, z)$, убывающей на бесконечности как $(r^2 + z^2)^{-1/2}$;

2) вычисление с помощью (8.23) $\nu(r, z)$ в E;

3) вычисление α, β и γ в E с помощью (8.17);

4) выбор в I функций α, β и γ, непрерывных на S и переходящих в α, β и γ в E;

5) вычисление с помощью (8.4) R_{ij} в I и, следовательно, S_j^i в I;

6) проверка с помощью (8.34) и исправление выбора (8.1) и (8.4), так чтобы удовлетворялось (8.34);

7) проверка с помощью (8.32) во всем I.

Если (8.32) удовлетворяются, то (8.3) — подходящая метрика для полностью аксиально симметричного физического пространства с материей в области I и вакуумом в области E.

§ 2. Конформно соответствующие и конформно плоские пространства[1]

Беда общей теории относительности — в большом числе неизвестных функций (десять компонент g_{ij}). Без решительного сокращения числа этих функций вряд ли можно получить результаты, физически заслуживающие интереса. В гл. VII благодаря предположениям о сферической симметрии это число свелось к двум, в § 1 при несколько более сильных допущениях аксиальной симметрии оно сократилось до трех (два в вакууме). Мы пойдем далее и сократим число неизвестных функций до одной, обращаясь к случаю конформно плоского пространства — времени.

Но прежде чем переходить к этому вопросу, желательно получить некоторые результаты для двух пространств, которые находятся в конформном соответствии. Это означает, что их метрические тензоры g_{ij} и g'_{ij} удовлетворяют соотношению

$$g_{ij} = e^{\psi(x)} g'_{ij}. \qquad (8.36)$$

Мы, очевидно, имеем

$$g^{ij} = e^{-\psi} g'^{ij} \qquad (8.37)$$

и для символов Кристоффеля находим

$$\Gamma_{jk}^i = \Gamma'^i_{jk} + A_{jk}^i, \qquad (8.38)$$

где

$$A_{jk}^i = \frac{1}{2}(\delta_j^i \psi_{,k} + \delta_k^i \psi_{,j} - g'_{jk} g'^{ia} \psi_{,a}). \qquad (8.39)$$

[1] Пространство понимается как четырехмерное пространство — время.— *Прим. ред.*

Подставляя это в (1.88), находим, что два тензора Римана связаны друг с другом следующим образом:

$$R^{i}_{\cdot jkm} = R'^{i}_{\cdot jkm} + A^{i}_{jm|k} - A^{i}_{jk|m} + A^{a}_{jm}A^{i}_{ak} - A^{a}_{jk}A^{i}_{am}, \tag{8.40}$$

где черточка означает ковариантную производную по g'_{ij} (но не по g_{ij}). (Очевидно, ψ есть инвариант, а A^{i}_{jk} — тензор.) Свертка (8.40) дает

$$R_{jk} = R'_{jk} + A^{a}_{aj|k} - A^{a}_{jk|a} + A^{a}_{jb}A^{b}_{ak} - A^{a}_{jk}A^{b}_{ab}. \tag{8.41}$$

Теперь в силу (8.39)

$$A^{a}_{aj} = 2\psi_{,j}, \quad A^{a}_{aj|k} = 2\psi_{|jk}, \quad A^{a}_{jk|a} = \psi_{|jk} = -\frac{1}{2}g'_{jk}\,\Box'\psi,$$

$$A^{a}_{jb}A^{b}_{ka} = \frac{3}{2}\psi_{,j}\psi_{,k} - \frac{1}{2}g'_{jk}\chi, \quad A^{a}_{jk}A^{b}_{ab} = 2\psi_{,j}\psi_{,k} - g'_{jk}\chi, \tag{8.42}$$

где

$$\chi = g'^{ab}\psi_{,a}\psi_{,b}, \quad \Box'\psi = g'^{ab}\psi_{|ab}. \tag{8.43}$$

Таким образом, связь между тензорами Риччи имеет вид

$$R_{jk} = R'_{jk} + \psi_{|jk} - \frac{1}{2}\psi_{,j}\psi_{,k} + \frac{1}{2}g'_{jk}(\Box'\psi + \chi). \tag{8.44}$$

Для скалярных кривизн имеем

$$R = g^{jk}R_{jk} = e^{-\psi}g'^{jk}R_{jk} = e^{-\psi}\left(R' + 3\Box'\psi + \frac{3}{2}\chi\right). \tag{8.45}$$

И, наконец, для тензоров Эйнштейна

$$G_{jk} = R_{jk} - \frac{1}{2}g_{jk}R = R_{jk} - \frac{1}{2}e^{\psi}g'_{jk}R =$$

$$= G'_{jk} + \psi_{|jk} - \frac{1}{2}\psi_{,j}\psi_{,k} - g'_{jk}\left(\Box'\psi + \frac{1}{4}\chi\right). \tag{8.46}$$

Эта формула позволяет свести одну гравитационную задачу к другой. Допустим, имеется поле g'_{ij} с материей, описываемой тензором G'_{ij}. Тогда, выбирая произвольно функцию ψ, получаем новое поле с g_{ij}, заданным по формуле (8.36), и G_{ij} — по формуле (8.47). Такое преобразование, разумеется, представляет собой нечто совершенно отличное от обычных преобразований координат, ибо последние показывают лишь, как изменяется математически способ описания одного и того же конкретного поля. Если g'_{ij} — метрика плоского пространства — времени, то говорят, что пространство — время с метрикой g_{ij}, определяемое формулой (8.36), является *конформно* плоским. В этом случае $R'^{l}_{\cdot jkm}$, R'_{jk} и G'_{jk} в приведенных уравнениях можно вычеркнуть. В частности,

$$G_{jk} = \psi_{,jk} - \frac{1}{2}\psi_{,j}\psi_{,k} - g'_{jk}\left(\Box'\psi + \frac{1}{4}\chi\right). \tag{8.47}$$

Можно при желании использовать координаты, в которых

$$g'_{ij} = \eta_{ij} = \text{giad}\,(1,\ 1,\ 1 - 1); \tag{8.48}$$

тогда

$$g_{ij} = e^{\psi}\eta_{ij},$$
$$\Phi = e^{\psi}[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - (dx^4)^2]. \tag{8.49}$$

Ковариантные производные в (8.47) можно заменить частными, так что мы имеем

$$G_{ij}=\psi_{,ij}-\frac{1}{2}\psi_{,i}\psi_{,j}-\eta_{ij}\left(\Box\psi+\frac{1}{4}\chi\right), \qquad (8.50)$$
$$\Box\psi=\eta^{ab}\psi_{,ab}, \qquad \chi=\eta^{ab}\psi_{,a}\psi_{,b}.$$

Метрика g_{ij} зависит лишь от одной функции ψ и, выбирая эту функцию подходящим образом, можно построить множество пространств, в которых тензор энергии T_{ij} задается формулой

$$\varkappa T_{ij}=-G_{ij}, \quad \varkappa=8\pi, \qquad (8.51)$$

где G_{ij} определяется соотношениями (8.50). Степень интересности этих пространств с точки зрения физики зависит от того, присущи ли им давление (а не растяжения) и положительная плотность энергии; фактически мы хотим удовлетворить неравенствам (8.32).

Рассмотрим случай, когда функция ψ зависит только от x^4. Обозначая ее производные штрихами, получаем

$$\psi_{,\alpha}=0, \quad \psi_{,4}=\psi', \quad \psi_{,44}=\psi'',$$
$$\Box\psi=-\psi'', \quad \chi=-\psi'^2. \qquad (8.52)$$

Тогда, используя (8.50), для тензора Эйнштейна находим[1])

$$G_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}\left(\psi''+\frac{1}{4}\psi'^2\right),$$
$$G_{\alpha 4}=0, \qquad (8.53)$$
$$G_{44}=-\frac{3}{4}\psi'^2.$$

Неравенства (8.32) удовлетворяются при условии

$$\psi''+\frac{1}{4}\psi'^2\leqslant 0. \qquad (8.54)$$

Действительно, выражения (8.53) дают положительную плотность энергии, но коль скоро имеет место (8.54), то (8.53) дают не давление, а растяжение.

Удовлетворить (8.54) во всем интервале x^4 невозможно. Однако если (обозначив $x^4=t$) ограничиться лишь $t>0$ или $t<0$, то получится интересное пространство при

$$e^{\psi}=\left(\frac{t}{a}\right)^4, \qquad (8.55)$$

где a — произвольная постоянная. Метрическую форму теперь можно записать в виде

$$\Phi=\left(\frac{t}{a}\right)^4(dx^2+dy^2+dz^2-dt^2). \qquad (8.56)$$

Имеем

$$\psi'=\frac{4}{t}, \quad \psi''=-\frac{4}{t^2}, \quad \psi''+\frac{1}{4}\psi'^2=0,$$
$$G_{\alpha\beta}=0, \quad G_{44}=-\frac{12}{t^2}. \qquad (8.57)$$

---

[1])Когда ψ—функция только x^4, мы имеем пространство со сферической симметрией в смысле гл. VII, § 3, и формулы этого параграфа, разумеется, могут быть использованы. Значения G_{ij} в (8.33) можно проверить, подставляя в (7.78) $\alpha=\gamma=\psi$, $\beta=\psi+2\ln r$ и требуя, чтобы ψ была функцией только x^4.

В этом пространстве отсутствуют давление и поток энергии, а кроме того, положительная плотность энергии,

$$\mu = -T_4^4 = \varkappa^{-1} G_4^4 = \frac{12a^4}{\varkappa t^6}, \tag{8.58}$$

которая при $t \to 0$ стремится к бесконечности. Это пространство представляет собой вселенную Эйнштейна—де Ситтера [304].

Другой интересный случай можно получить, положив

$$e^{\psi} = \left(\frac{a}{t}\right)^2, \qquad \Phi = \left(\frac{a}{t}\right)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2), \tag{8.59}$$

когда

$$\begin{aligned} &\psi' = -\frac{2}{t}, \qquad \psi'' = \frac{2}{t^2}, \qquad \psi'' + \frac{1}{4}\psi'^2 = \frac{3}{t^2}, \\ &G_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}\frac{3}{t^2}, \qquad G_{\alpha 4} = 0, \qquad G_{44} = -\frac{3}{t^2}, \end{aligned} \tag{8.60}$$

и, следовательно,

$$G_{ij} = \Lambda g_{ij}, \quad \Lambda = 3a^{-2}. \tag{8.61}$$

Неравенство (8.54) нарушается, однако здесь это неважно, так как в (8.32) [и, следовательно, в (8.54)] предполагалось, что космологическая константа Λ равна нулю. Восстанавливая Λ и возвращаясь к (7.4), мы видим, что (8.59) определяет сокращающуюся[1]) вселенную де Ситтера с постоянной кривизной a^{-2}. Вывод таков: одно и то же пространство может появляться в различных обликах, в зависимости от используемых координат, и поэтому следует сосредоточить внимание на инвариантных свойствах. Полагая

$$\frac{\tau}{a} = \ln\left(\frac{t}{a}\right), \tag{8.62}$$

можно преобразовать метрическую форму пространства де Ситтера к виду[2])

$$\Phi = e^{-2\tau/a}(dx^2 + dy^2 + dz^2) - d\tau^2. \tag{8.63}$$

Можно заметить, что любую форму

$$\Phi = e^{h(\tau)}(dx^2 + dy^2 + dz^2) - d\tau^2 \tag{8.64}$$

можно преобразовать в конформно плоскую[3]), ибо после преобразования

$$t = \int e^{-1/2 h(\tau)}\, d\tau \tag{8.65}$$

мы имеем

$$d\tau^2 = e^{h(\tau)}\, dt^2, \tag{8.66}$$

и (8.64) принимает вид

$$\Phi = e^{\psi(t)}(dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2), \tag{8.67}$$

где

$$\psi(t) = h(\tau). \tag{8.68}$$

---

[1]) Исходя из существа вопроса, используемый автором термин «*recreated*» (возрождающаяся—*англ.*) удобнее переводить как «сокращающаяся». —*Прим. ред.*

[2]) Об истории этой и других форм см. работу Робертсона [989].

[3]) Дополнительные сведения о конформных полях см. в работах Схоутена [1061], § 5—7 и Петрова [903], § 34—37, 46.—*Прим. ред.*

§ 3. Космологическое красное смещение

Наблюдения показывают, что спектр галактик смещен в сторону красной линии, причем смещение приблизительно пропорционально расстоянию[1]). Ньютоновские концепции так прочно укоренились в умах, что многие астрономы готовы принять абсолютное пространство — время, а красное смещение спектра галактик отнести за счет скорости удаления в обычном ньютоновском смысле.

Релятивист, разумеется, не может смотреть на явление красного смещения таким образом. Если он чувствует, что материя во Вселенной распределена со слишком малой плотностью, для того чтобы вызвать значительную кривизну пространства — времени, то он прибегнет к специальной теории относительности (плоское пространство — время) (Кермак и Мак-Кри [541], Милн [745], Синг [1175]). Если же гравитационное поле, порождаемое материей, оказывается значительным, то и его следует принимать в расчет. Не стремясь к максимальной общности [даже при обычно принимаемых допущениях симметрии[2])], мы предположим, что метрическая форма пространства — времени является конформно плоской [т. е. имеет вид (8.49)]. Запишем ее в виде

$$\Phi = [\omega(t)]^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2). \tag{8.69}$$

Относительно функции $\omega(t)$ мы не делаем никаких специальных допущений (за исключением требования, чтобы она убывала во времени), хотя позднее, как и в (8.56), мы положим $\omega = t^2/a^2$, ибо это соответствует отсутствию давления. Как это всегда делается в подобного рода рассуждениях, мы будем предполагать (несмотря на наличие материи, поскольку $G_{ij} \neq 0$), что мировая линия фотона есть изотропная геодезическая, причем 4-импульс фотона касателен к этой геодезической и претерпевает вдоль нее параллельный перенос, так что можно использовать методы гл. III, § 7 и гл. VII, § 9.

Так как в (8.53) $G_{\alpha 4} = 0$, то временноподобный собственный вектор G_{ij} направлен вдоль t-линий, которые, таким образом, оказываются мировыми линиями материи. Когда будет выбираться источник (галактика) и наблюдатель, мы примем, что мировые линии того и другого представляют собой t-линии (ниже мы увидим, что они оказываются геодезическими).

Прежде чем перейти к рассмотрению красного смещения, отметим, что (8.69) описывает расширяющуюся вселенную в реальном смысле. В самом деле, как и в гл. III, § 5, можно оптическим способом измерить «расстояние» между двумя соседними t-линиями; оно возрастает вместе с t как

$$D = \omega(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{1/2}. \tag{7.70}$$

«Расстояние» между t-линиями, которые смежны одна с другой, будет служить предметом обсуждения в дальнейшем. С геодезическими для (8.69) оперировать легко. Записывая лагранжиан в виде

$$F = \frac{1}{2}[\omega(t)]^2 (x'^2 + y'^2 + z'^2 - t'^2), \tag{8.71}$$

где штрих означает d/dw, а w — канонический параметр, для первых трех уравнений Лагранжа получаем

$$\omega^2 x' = A, \quad \omega^2 y' = B, \quad \omega^2 z' = C, \tag{8.72}$$

[1]) По этому вопросу см.: С. И. Вавилов, Экспериментальные основания теории относительности, М., 1928, гл. 8.— *Прим. ред.*

[2]) О релятивистской космологии см. работы Робертсона [989], Толмана [1270], Бонди [67], Мак-Витти [732] и Гекмана и Шюкинга [439].

где A, B и C — постоянные. Следовательно, геодезические являются прямыми линиями во вспомогательном евклидовом пространстве E_3, в котором x, y, z — прямоугольные декартовы координаты. Мы видим также, что t-линии представляют собой временноподобные геодезические, причем собственное время на них задается формулой

$$ds = \omega dt. \tag{8.73}$$

Вследствие простоты метрической формы (8.69) в координатах (x, y, z) можно адекватным образом исследовать все временноподобные и изотропные геодезические, выделяя из них те, которые проходят через начало координат (x, y, z). Положим

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \tag{8.74}$$

и назовем r *псевдорасстоянием* от точки (x, y, z) до начала координат. Его нужно рассматривать как чисто математическое построение, пока еще не связанное с физическими измерениями. Для такой радиальной геодезической из (8.72) получаем

$$\omega^2 dr = -k dw, \tag{8.75}$$

где k — положительная постоянная, зависящая от выбора геодезической. Мы имеем далее

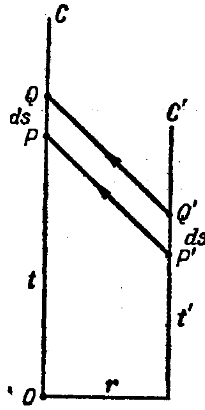
$$\omega^2 (dr^2 - dt^2) = -\eta dw^2, \tag{8.76}$$

где для временноподобной геодезической $\eta = 1$ и $dw = ds$, а для изотропной — $\eta = 0$. Следовательно,

$$dw = \frac{\omega^2 dt}{\sqrt{\eta\omega^2 + k^2}}, \qquad dr = -k\frac{dw}{\omega^2} = -\frac{k dt}{\sqrt{\eta\omega^2 + k^2}}, \tag{8.77}$$

и, в частности, для изотропной геодезической

$$dw = k^{-1}\omega^2 dt, \quad dr = -dt. \tag{8.78}$$



Фиг. 81. Космологическое красное смещение, изображенное в E_4.

Для обсуждения вопроса о красном смещении полезно изобразить точки в E_4, т. е. в евклидовом четырехмерном пространстве с декартовыми прямоугольными координатами (x, y, z, t). На фиг. 81 показаны две мировые линии C и C', представляющие соответственно траектории движения наблюдателя и источника; C образует t-ось, а C' — соответственно t-линию с псевдорасстоянием r. При физической интерпретации мы поместим наблюдателя на Солнце[1]), а источник — в удаленной галактике. Фиг. 76 была очень сходна с фиг. 81, однако в то время как первая играла лишь вспомогательную роль, помогающую геометрически мыслить, вторая представляет собой шкалу, снабженную изотропными линиями, наклоненными к C и C' под углом 45°.

На фиг. 82 линии $P'P$ и $Q'Q$ — соседние траектории двух фотонов. Если t и t' — значения в точках P и P' соответственно, то в силу (8.78) имеем

$$r = t - t' \tag{8.79}$$

[1]) Гравитационное поле Солнца не учитывается. Принимая (8.69), мы «размазали» материю равномерно по всему пространству. Этот прием при рассмотрении такого рода космологических проблем широко используется.

и, переходя к $Q'Q$,

$$dt = dt', \tag{8.80}$$

где dt относится к PQ, а dt' — к $P'Q'$. В силу (8.73) соответствующие приращения собственного времени даются как

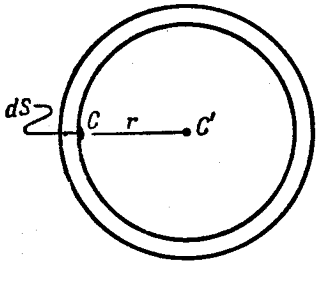
$$ds = \omega(t)\,dt, \quad ds' = \omega(t')\,dt', \tag{8.81}$$

и из формулы (3.52) для спектрального смещения получаем

$$\frac{\nu' - \nu}{\nu'} = \frac{ds - ds'}{ds} = 1 - \frac{\omega(t')}{\omega(t)}. \tag{8.82}$$

Таким образом, метрическая форма (8.69) приводит к красному смещению в предположении, что $\omega(t)$ — возрастающая функция.

Теперь следует выяснить, как зависит красное смещение от удаленности источника. Для этого необходимо определить понятие «расстояния», так как вряд ли мы можем приписывать физический смысл псевдорасстоянию r.



Фиг. 82. Сферический слой излучения из точки C'.

На фиг. 82, относящейся к подпространству E_3, показаны источник (в точке C), излучающий однородно во всех направлениях с интенсивностью I'. Последнее означает, что общая энергия, излученная за собственное время ds', равна $I'ds'$. В точке C имеется приемник или наблюдатель. Точки C и C' на фиг. 82 представляют собой проекции на E_3 линий C и C', изображенных на фиг. 81. Энергия $I'ds'$, разумеется, вычисляется относительно мировой линии C'.

Энергия фотона с 4-импульсом p^i относительно мировой линии наблюдателя, имеющего 4-скорость V^i, равна $E = -p^iV_i$. Нам понадобятся лишь t-линии, так что V^4 — единственная компонента V^i, отличная от нуля, причем

$$V^4 = \omega^{-1}, \quad V_4 = -\omega. \tag{8.83}$$

В общем случае 4-импульс фотона можно записать в виде

$$p^i = \alpha \frac{dx^i}{dw}, \tag{8.84}$$

где w — канонический параметр на мировой линии фотона, а α — постоянная, зависящая от выбора w и характера рассматриваемых фотонов. В нашей задаче в силу (8.78)

$$p^4 = \alpha \frac{dt}{dw} = \frac{\alpha k}{\omega^2} \tag{8.85}$$

и, следовательно, энергия фотона определяется как

$$E = \frac{\alpha k}{\omega}. \tag{8.86}$$

Но по предположению $\omega(t)$ — функция возрастающая, следовательно, фотон непрерывно теряет энергию относительно локальной t-линии. По мере того как он проходит расстояние от точки испускания C' до точки поглощения C, его энергия уменьшается в соответствии с формулой

$$\frac{E}{E'} = \frac{\omega(t')}{\omega(t)}. \tag{8.87}$$

Это служит подтверждением уже найденного в (8.82) красного смещения, которое получено здесь другим методом. Так как только поток энергии $I'ds'$, излученный в момент t' в точке C', достигает C в момент времени t, он распределяется (см. фиг. 82) в бесконечно тонком сферическом слое

и, согласно (8.87), полная энергия слоя равна

$$I' \, ds' \frac{\omega(t')}{\omega(t)}, \tag{8.88}$$

т. е. сумме локальных значений энергии, взятой по всей сфере.

В точке C наблюдатель устанавливает мишень (в действительности объектив телескопа) для улавливания радиации. Если dS — площадь мишени (инвариантная), а ds — приращение собственного времени наблюдателя от начала и до конца вспышки, то для полученной им полной энергии можно записать

$$J \, dS \, ds, \tag{8.89}$$

где J — интенсивность приходящей радиации.

Теперь псевдорадиус сферы и ее инвариантная площадь определяются формулами

$$r = t - t', \quad dS = 4\pi r^2 [\omega(t)]^2 \tag{8.90}$$

и, следовательно, C улавливает своей мишенью часть полной энергии сферического слоя:

$$\frac{dS}{4\pi r^2 [\omega(t)]^2}. \tag{8.91}$$

Таким образом,

$$J dS ds = I' ds' \frac{dS}{4\pi r^2} \frac{\omega(t')}{[\omega(t)]^3}. \tag{8.92}$$

Но, согласно (8.82),

$$ds' = ds \frac{\omega(t')}{\omega(t)} \tag{8.93}$$

и, значит, принятая интенсивность

$$J = \frac{I'}{4\pi r^2} \frac{[\omega(t')]^2}{[\omega(t)]^4}, \quad r = t - t'. \tag{8.94}$$

Отношение J/I', следовательно, одинаково для всех источников различной яркости на одинаковом псевдорасстоянии r, и мы можем определить *астрономическое расстояние*[1]) r_0 с помощью формулы

$$J = \frac{I'}{4\pi r_0^2}, \tag{8.95}$$

в которой для плоского пространства — времени $r_0 = r$. Если мы, как это делают астрономы, предположим, что во всей Вселенной звезды имеют одинаковую собственную светимость I', то измерение интенсивности J, принятой от такой звезды, определяет астрономическое расстояние r_0 до этой звезды и до каких-либо других звезд, если известно, что последние близки к данной. В терминах r_0 формула (8.94) гласит:

$$r_0 = (t - t') \frac{[\omega(t)]^2}{\omega(t')}. \tag{8.96}$$

Обозначая, как и в (8.82), красное смещение через ϱ, имеем

$$\varrho = \frac{\nu' - \nu}{\nu'} = 1 - \frac{\omega(t')}{\omega(t)}. \tag{8.97}$$

Это уравнение и уравнение (8.96) являются основными. В них слева стоят наблюдаемые, а справа — теоретические конструкции. Если наблюдение дает связь между ϱ и r_0, то эти уравнения приводят к функциональному

[1]) Его называют еще *световым расстоянием*. Наш случай — частный пример приложения определения *пространственного расстояния*, данного Уиттекером [1386].

уравнению для функции ω. С другой стороны, если задаться функцией ω, то исключение переменной t' приводит к связи между ϱ и r_0.

Если (чтобы исследовать этот случай) мы предположим, что разность $(t - t')$ мала, то можно приближенно записать

$$\omega(t') = \omega(t) - (t - t')\,\omega'(t); \tag{8.98}$$

тогда получим

$$r_0 = (t - t')\,\omega(t), \quad \varrho = (t - t')\,\omega'(t),$$
$$\varrho = r_0 \frac{\omega'(t)}{\omega(t)}, \tag{8.99}$$

т. е. красное смещение пропорционально оптическому расстоянию для наблюдений, сделанных в момент t.

Если, не пользуясь приближениями, взять метрическую форму Эйнштейна — де Ситтера (8.56):

$$\Phi = \left(\frac{t}{a}\right)^4 (dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2), \tag{8.100}$$

так что

$$\omega(t) = \left(\frac{t}{a}\right)^2, \tag{8.101}$$

а плотность, согласно (8.58),

$$\mu = \frac{12a^4}{\varkappa t^6}, \tag{8.102}$$

то из (8.96) и (8.97) следует, что

$$r_0 = (t - t')\frac{t^4}{a^2 t'^2}, \quad \varrho = 1 - \frac{t'^2}{t^2}. \tag{8.103}$$

Исключая t', получим следующий закон изменения расстояния для наблюдений, сделанных в момент t:

$$r_0 = \frac{t^3}{a^2}\,\frac{1 - \sqrt{1 - \varrho}}{1 - \varrho}. \tag{8.104}$$

До сих пор не было сделано никаких приближений. Разложим теперь (8.104) в ряд по степеням ϱ

$$r_0 = \frac{1}{2}\frac{t^3}{a^2}\left(\varrho + \frac{5}{4}\varrho^2 + \dots\right) \tag{8.105}$$

и оборвем его на первом члене. При этом получается линейный закон

$$\frac{\varrho}{r_0} = \frac{2a^2}{t^3}. \tag{8.106}$$

Наблюдаемую величину

$$\sigma = \frac{\varrho}{r_0} \tag{8.107}$$

называют *постоянной* (*или параметром*) *Хабла*. Ее приближенное значение[1]) равно примерно

$$\sigma = 4 \cdot 10^{-18}\,сек^{-1}. \tag{8.108}$$

Тогда из (8.106) следует, что

$$\frac{t^3}{a^2} = 5 \cdot 10^{17}\,сек. \tag{8.109}$$

[1]) Ср. книгу Мак-Витти [732], где этот параметр обозначен через h_1. Вследствие трудности оценки r_0 для значений этой постоянной интервал неопределенности довольно велик. Значение, ранее указанное Сингом [1175], почти в 2 раза превышает приведенное в (8.108).

Если положить в формуле (8.100) $t=0$, то метрика вырождается в нуль. Это можно интерпретировать как зарождение Вселенной[1]). Таким образом, возраст Вселенной к моменту t определяется формулой

$$\int_{t=0}^{t} ds = \int_{t=0}^{t} \omega(t)dt = \int_{t=0}^{t} \frac{t^2}{a^2}dt = \frac{1}{3}\frac{t^3}{a^2}. \tag{8.110}$$

Подставляя значение (8.109) и учитывая, что 1 *год* $= 3{,}1558\cdot 10^7$ *сек*, для возраста[2]) Вселенной, измеренного по собственному времени, получаем

$$1{,}7\cdot 10^{17}\ сек = 5{,}3\cdot 10^9\ лет. \tag{8.111}$$

Обратимся теперь к (8.102) и оценим плотность, которая становится бесконечной при $t=0$, а для произвольного значения t равна

$$\mu = \frac{3}{2\pi}\frac{a^4}{t^6} = \frac{3\sigma^2}{8\pi}. \tag{8.112}$$

Выбирая значения σ согласно (8.108), получаем[3])

$$\mu = 1{,}910\cdot 10^{-36}\ сек^{-2}. \tag{8.113}$$

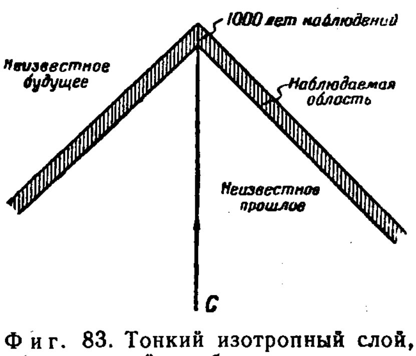
Пользуясь обращенными формулами

$$\left.\begin{aligned} 1\ г &= 2{,}476\cdot 10^{-39}\ сек, \\ 1\ см^{-1} &= 2{,}998\cdot 10^{10}\ сек^{-1}, \\ 1\ г\cdot см^{-3} &= 6{,}668\cdot 10^{-8}\ сек^{-2}, \\ 1\ сек^{-2} &= 1{,}500\cdot 10^{7}\ г/см^3, \end{aligned}\right\} \tag{8.114}$$

мы получаем плотность[4])

$$\mu = 2{,}865\cdot 10^{-29}\ г\cdot см^{-3}. \tag{8.115}$$

Среди всех отраслей современной физики космологическая теория менее всего упорядочена в смысле наблюдений. Оптические наблюдения, проделанные в какой-либо момент на мировой линии C (фиг. 83), так или иначе связаны с событиями (точками), лежащими на изотропном конусе, обращенном в прошлое, и все человеческие наблюдения за период, скажем, в тысячу лет должны рассматриваться как мгновенные. Из этого маленького кусочка Вселенной и из геологической истории на самой мировой линии C человек пытается восстановить целое, прибегая к смелой экстраполяции. Поскольку мы не можем дискутировать непознавае-



Фиг. 83. Тонкий изотропный слой, образованный наблюдаемыми точками.

[1]) Вырождение метрики может означать неприменимость исходной гипотезы при $t=0$, но из нее никак не следуют выводы о зарождении Вселенной.— *Прим. ред.*

[2]) Заметнм, что здесь возраст Вселенной не равен велнчине, обратно пропорциональной постоянной Хабла, а равен $^2/_3\,\sigma$.

[3]) Выполняя арифметические вычнсления, было бы неразумно округлять числа, даже если это касается значений физическн не достоверных.

[4]) Это значение приблизительно в 6 раз превышает верхнюю границу, данную Мак-Витти [732], который допускает в этом интервале множитель 100. Бонди ([67], стр. 46, 48) прнвел гораздо более высокое значенне: $10^{-27}\ г\cdot см^{-3}$

мое, теорию следует признавать удачной, если она достигает успеха в узкой области известного. Но, к сожалению, интерпретация наблюдений в этой области крайне трудна, и многое приходится предоставить интуитивным догадкам астрономов, которые меняют свои приговоры из года в год. Все сказанное выше не должно, разумеется, удерживать от создания космологических моделей; однако из него можно понять, что спорные достоинства различных моделей вряд ли заслуживают защиты с особым полемическим жаром.

Простота — великая вещь, и мы предпочтем простейшую модель Вселенной. В качестве первого упражнения с конформно плоскими пространствами мы выделили среди них такое, в котором коэффициент конформности являлся функцией только t, а затем конкретизировали его с помощью формулы (8.100), откуда, если не учитывать космологическую константу, получается нулевое давление. Эта модель, построенная Эйнштейном и де Ситтером [304] [1]), представляется самой простой из всех возможных и заслуживает внимания [здесь не имеется в виду, что она обязательно описывает физическую реальность так же хорошо или лучше, чем более сложные модели].

§ 4. Пространства типа Геделя

При построении модели Вселенной мы выбираем метрическую форму $g_{ij}dx^i dx^j$ и подвергаем ее некоторой проверке. Во-первых, она должна иметь сигнатуру[2]) $+2$. Во-вторых, следует исследовать знаки напряжений и плотности, ибо мы требуем, чтобы напряжение было давлением, а не натяжением, а плотность была положительной[3]). Поскольку здесь все определяется только знаками и легко допустить ошибку, проделаем вновь (применив несколько иной метод) опыт, описанный в гл. IV, § 6.

Чтобы получить давление, а не натяжение[4]) и положительную плотность μ, мы потребуем, чтобы характеристическое уравнение

$$\det(G_{ij} - \theta g_{ij}) = 0 \qquad (8.116)$$

имело *три отрицательных корня и один положительный.* Этот положительный корень равен $\varkappa\mu\,(=8\pi\mu)$. Далее, необходимо, чтобы единичный вектор V^i (4-скорость), удовлетворяющий уравнению

$$G_{ij}V^j = \varkappa\mu g_{ij}V^j, \qquad (8.117)$$

был *временноподобным*

$$(V_i V^i = -1).$$

---

[1]) См. также книгу Толмана ([1270], стр. 415), где изложены результаты для многих моделей Вселенной, в большинстве которых учитывается космологическая константа.

[2]) Сигнатура квадратичной формы есть разность двух чисел, одно из которых представляет собой число положительных членов, а второе — число отрицательных, когда с помощью локального преобразования координат матрица g_{ij} приведена к диагональному виду. В этой книге используется сигнатура $+2$, но многие авторы предпочитают -2. В каждом частном случае от одной сигнатуры к другой можно перейти с помощью замены знака на обратный у всех компонент g_{ij}; это не приводит ни к каким физическим различиям, о каких бы величинах в этих пространствах ни шла речь, но зато возникает путаница в знаках в некоторых формулах (см. дополнение А). Другой источник недоразумений при сравнении формул состоит в следующем: в то время как большинство авторов определяют R_{ij} аналогично (1.105), другие берут этот тензор с обратным знаком.

[3]) Космологическая константа влияет как на натяжение, так и на плотность; здесь мы будем полагать $\Lambda = 0$.

[4]) Можно условно говорить о нем, как о *положительном давлении*, не предполагая, что давление *изотропно*.

В качестве простой проверки запишем формулы для идеальной жидкости:

$$\begin{aligned} T_{ij} &= (\mu + p) V_i V_j + p g_{ij}, \\ G_{ij} &= -\varkappa (\mu + p) V_i V_j - \varkappa g p_{ij}, \\ G_{ij} W^j &= -\varkappa p g_{ij} W^j, \\ G_{ij} V^j &= \varkappa \mu g_{ij} V^j, \end{aligned} \tag{8.118}$$

где W^i — некоторый вектор, ортогональный 4-скорости V^i. Интересная и необычайная модель вселенной была предложена Геделем [399, 400]. Мы исследуем здесь тип метрики, содержащей геделевскую как частный случай. На протяжении всего этого параграфа греческие индексы принимают значения 1, 2, а индексы, обозначенные заглавными буквами, — значения 3, 4.

Рассмотрим метрическую форму

$$\Phi = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + g_{AB} dx^A dx^B, \tag{8.119}$$

где $g_{\alpha\beta}$ — функция переменных x^3 и x^4, а g_{AB} — постоянные. Хотя эта форма и является значительно более общей, чем геделевская, все же будем называть ее формой типа Геделя. Правильная сигнатура для пространства — времени будет обеспечена, если взять одну из квадратичных форм в (8.119) в любом порядке с сигнатурой 0, а другую — с сигнатурой $+2$.

Для (8.119) имеем

$$g_{\alpha B} = 0, \quad g^{\alpha B} = 0, \quad g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta^\gamma_\alpha, \quad g_{AB} g^{BC} = \delta^C_A. \tag{8.120}$$

Чтобы отличаться от нуля, символ Кристоффеля должен иметь два греческих индекса; таким образом, отличными от нуля символами Кристоффеля окажутся следующие:

$$[\alpha\beta, C] = -\frac{1}{2} g_{\alpha\beta,C}, \qquad [\alpha C, \beta] = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,C} \tag{8.121}$$

и из (1.85) получаем отличные от нуля компоненты тензора Римана:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \frac{1}{4} g^{EF} (g_{\alpha\delta,E} g_{\beta\gamma,F} - g_{\alpha\gamma,E} g_{\beta\delta,F}), \\ R_{\alpha\beta CD} &= \frac{1}{4} g^{\gamma\delta} (g_{\alpha\gamma,D} g_{\beta\delta,C} - g_{\alpha\gamma,C} g_{\beta\delta,D}), \\ R_{\alpha B\gamma D} &= -\frac{1}{2} g_{\alpha\gamma,BD} + \frac{1}{4} g^{\varrho\sigma} g_{\alpha\varrho,D} g_{\gamma\sigma,B}. \end{aligned} \tag{8.122}$$

Теперь уже следует конкретизировать вид компонент $g_{\alpha\beta}$, предполагая, что последние зависят только от x^4. Тогда $R_{\alpha\beta CD}$ обращаются в нуль, и отличные от нуля независимые компоненты в (8.122) можно выписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} R_{1212} &= \frac{1}{4} g^{44} [(g_{12,4})^2 - g_{11,4} g_{22,4}], \\ R_{1414} &= -\frac{1}{2} g_{11,44} + \frac{1}{4} g^{\varrho\sigma} g_{\varrho 1,4} g_{\sigma 1,4}, \\ R_{1424} &= -\frac{1}{2} g_{12,44} + \frac{1}{4} g^{\varrho\sigma} g_{\varrho 1,4} g_{\sigma 2,4}, \\ R_{2424} &= -\frac{1}{2} g_{22,44} + \frac{1}{4} g^{\varrho\sigma} g_{\varrho 2,4} g_{\sigma 2,4}. \end{aligned} \tag{8.123}$$

В качестве следующего существенного ограничения, соответствующего работе Геделя, мы выберем

$$g_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix} a & be^{\psi} \\ be^{\psi} & ce^{2\psi}\end{pmatrix}, \tag{8.124}$$

где a, b, c — постоянные, ψ — некоторая функция x^4 (ее производные будут обозначены штрихами), тогда как для g_{AB} мы выберем любую из трех следующих матриц:

$$g_{AB}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{8.125}$$

Конкретный выбор должен быть связан с выбором a , b и c, чтобы обеспечить правильную сигнатуру. Положим

$$\sigma=b^2-ac\,,\qquad \varepsilon=\det g_{AB}=\pm 1\,. \tag{8.126}$$

Тогда

$$\begin{gathered} g=-\varepsilon\sigma e^{2\psi},\\ g^{\alpha\beta}=\sigma^{-1}\begin{pmatrix}-c & be^{-\psi}\\ be^{-\psi} & -ae^{-2\psi}\end{pmatrix},\\ g^{AB}=g_{AB}. \end{gathered} \tag{8.127}$$

Сигнатура требует, чтобы либо

$$\sigma>0,\quad \varepsilon=1, \tag{8.128}$$

либо

$$\sigma<0,\quad \varepsilon=-1,\quad a>0. \tag{8.129}$$

Первое условие приводит к неопределенности $g_{\alpha\beta}\,dx^{\alpha}\,dx^{\beta}$, а $g_{AB}\,dx^{A}\,dx^{B}$ становится положительно определенной; при выполнении второго условия имеет место обратное.

Из (8.123) получаем следующие простые формулы:

$$\begin{aligned} R_{1212}&=\frac{1}{4}g^{44}b^2\psi'^2e^{2\psi},\\ R_{1414}&=-\frac{1}{4}\frac{ab^2}{\sigma}\psi'^2,\\ R_{1424}&=-\frac{1}{2}b\left[\psi''+\frac{b^2}{2\sigma}\psi'^2\right]e^{\psi},\\ R_{2424}&=-c\left[\psi''+\left(1+\frac{b^2}{4\sigma}\right)\psi'^2\right]e^{2\psi}. \end{aligned} \tag{8.130}$$

Следовательно, отличные от нуля компоненты тензора Риччи и скалярная кривизна имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} R_{11}&=g^{\alpha\beta}R_{\alpha11\beta}+g^{44}R_{4114}=\frac{1}{2}g^{44}\frac{ab^2}{\sigma}\psi'^2,\\ R_{12}&=g^{\alpha\beta}R_{\alpha12\beta}+g^{44}R_{4124}=\frac{1}{2}g^{44}b\left(\psi''+\frac{b^2}{\sigma}\psi'^2\right)e^{\psi},\\ R_{22}&=g^{\alpha\beta}R_{\alpha22\beta}+g^{44}R_{4224}=g^{44}c\left[\psi''+\left(1+\frac{b^2}{2\sigma}\right)\psi'^2\right]e^{2\psi},\\ R_{44}&=g^{\alpha\beta}R_{\alpha44\beta}=\psi''+\left(1-\frac{b^2}{2\sigma}\right)\psi'^2,\\ R&=2g^{44}\left[\psi''+\left(1-\frac{b^2}{4\sigma}\right)\psi'^2\right]. \end{aligned} \tag{8.131}$$

Вычисляя тензор Эйнштейна с помощью соотношения

$$G_{ij}=R_{ij}-\frac{1}{2}g_{ij}R\,, \tag{8.132}$$

получаем следующие отличные от нуля компоненты:

$$\begin{aligned} G_{11}&=-ag^{44}\left[\psi''+\left(1-\frac{3b^2}{4\sigma}\right)\psi'^2\right],\\ G_{12}&=-bg^{44}\left[\frac{1}{2}\psi''+\left(1-\frac{3b^2}{4\sigma}\right)\psi'^2\right]e^{\psi},\\ G_{22}&=cg^{44}\,\frac{3b^2}{4\sigma}\,\psi'^2e^{2\psi},\\ G_{33}&=-g_{33}g^{44}\left[\psi''+\left(1-\frac{b^2}{4\sigma}\right)\psi'^2\right],\\ G_{44}&=-\frac{b^2}{4\sigma}\psi'^2\,. \end{aligned} \tag{8.133}$$

Здесь приведен тензор Эйнштейна для метрической формы

$$\Phi=a(dx^1)^2+2be^{\psi}dx^1dx^2+ce^{2\psi}(dx^2)^2+g_{33}(dx^3)^2+g_{44}(dx^4)^2, \tag{8.134}$$

где до сих пор ни на функцию $\psi(x^4)$, ни на постоянные a, b, c, g_{33} и g_{34} не накладывалось никаких ограничений, кроме (8.125). В вычислениях условия (8.128) или (8.129) фактически не использовались.

Так как $G_{\alpha A}=0$, $g_{\alpha A}=0$, то два собственных вектора $G_{ij}(\lambda^i)$ и соответствующие собственные значения θ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} &(G_{11}-\theta g_{11})\lambda^1+(G_{12}-\theta g_{12})\lambda^2=0,\\ &(G_{21}-\theta g_{21})\lambda^1+(G_{22}-\theta g_{22})\lambda^2=0,\\ &\lambda^3=\lambda^4=0. \end{aligned} \tag{8.135}$$

Эти собственные векторы лежат в двумерном элементе, содержащем параметрические линии x^1 и x^2. Третий собственный вектор ориентирован в направлении x^3, а соответствующее собственное значение равно

$$\theta_3=-g^{44}\left[\psi''+\left(1-\frac{b^2}{4\sigma}\right)\varphi'^2\right]; \tag{8.136}$$

направление четвертого собственного вектора совпадает с x^4-направлением, а собственное значение

$$\theta_4=-g^{44}\frac{b^2}{4\sigma}\psi'^2\,. \tag{8.137}$$

Если выбрать функцию $\psi(x^4)$ и фигурирующие здесь постоянные наугад, то может случиться, что при этом нарушатся условие для сигнатуры и условия, связанные с (8.116) для положительной плотности и давления. Ситуация достаточно сложна и, чтобы выполнить систематическое исследование, необходимо выбрать какой-нибудь конкретный вид $\psi(x^4)$. Один из возможных выборов следующий:

$$e^{\psi}=\left(\frac{x^4}{k}\right)^n\quad (k,\,n=\text{const}). \tag{8.138}$$

Однако мы, следуя Геделю, сделаем еще более простой выбор:

$$\psi=kx^4\quad (k=\text{const}). \tag{8.139}$$

Тогда $\psi' = k$, $\psi'' = 0$, и (8.133) несколько упрощается:

$$\begin{aligned} G_{11} &= -k^2 a g^{44}\left(1 - \frac{3b^2}{4\sigma}\right), \\ G_{12} &= -k^2 b g^{44}\left(1 - \frac{3b^2}{4\sigma}\right) e^{\psi}, \\ G_{22} &= k^2 c g^{44}\frac{3b^2}{4\sigma} e^{2\psi}, \\ G_{33} &= -k^2 g_{33} g^{44}\left(1 - \frac{b^2}{4\sigma}\right), \\ G_{44} &= -k^2\frac{b^2}{4\sigma}. \end{aligned} \tag{8.140}$$

Теперь мы имеем

$$\frac{G_{11}}{g_{11}} = \frac{G_{12}}{g_{12}} \tag{8.141}$$

и, следовательно, в силу (8.135) первый собственный вектор направлен вдоль x^1, а соответствующее собственное значение

$$\theta_1 = -k^2 g^{44}\left(1 - \frac{3b^2}{4\sigma}\right). \tag{8.142}$$

Направление второго собственного вектора не совпадает с x^2, но мы все же будем обозначать соответствующее ему собственное значение через θ_2. Вследствие (8.135) второй собственный вектор удовлетворяет вековому уравнению

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b\left[-k^2 g^{44}\left(1 - \frac{3b^2}{4\sigma}\right) - \theta_2\right] & c\left(k^2 g^{44}\frac{3b^2}{4\sigma} - \theta_2\right) \end{vmatrix} = 0, \tag{8.143}$$

откуда следует, что

$$\theta_2 = -k^2 g^{44}\frac{b^2}{4\sigma}. \tag{8.144}$$

В силу (8.136) и (8.137) два других собственных значения имеют вид

$$\theta_3 = -k^2 g^{44}\left(1 - \frac{b^2}{4\sigma}\right), \tag{8.145}$$

$$\theta_4 = -k^2 g^{44}\frac{b^2}{4\sigma}. \tag{8.146}$$

Чтобы давление и плотность получились положительными, три собственных значения должны быть отрицательными (с пространственноподобными собственными векторами) и одно собственное значение — положительным (с временноподобным собственным вектором). Так как $\theta_2 = \theta_4$, то их общее собственное значение должно быть отрицательным, а собственные векторы пространственноподобными. Таким образом, направление x^4 должно быть пространственноподобным и, следовательно,

$$g^{44} = g_{44} = 1, \qquad \sigma > 0. \tag{8.147}$$

Тогда из условия для сигнатуры (8.128) следует, что $\varepsilon = 1$, а, следовательно,

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{8.148}$$

т. е. возможен только первый вариант в (8.125). Теперь $g_{33} = +1$ и это означает, что x^3-направление пространственноподобно. Следовательно, в этом случае собственное значение соответствует давлению, и использо-

вание условия положительной определенности давления в (8.145) дает

$$1-\frac{b^2}{4\sigma}>0. \tag{8.149}$$

Теперь мы имеем три пространственноподобных собственных вектора, соответствующих θ_2, θ_3 и θ_4, тогда как оставшийся собственный вектор должен быть временноподобен и ортогонален к этим трем. Однако он ориентирован в направлении x^1 и, следовательно,

$$a<0. \tag{8.150}$$

Добавляя затем к (8.142) требование, чтобы плотность была положительной, мы получаем

$$1-\frac{3b^2}{4\sigma}<0. \tag{8.151}$$

Но так как $\sigma=b^2-ac$, то приведенные выше неравенства эквивалентны следующим:

$$a<0, \quad c<0, \quad \frac{4}{3}ac<b^2<4ac. \tag{8.152}$$

Подводя на данной ступени итог для случая $\psi=kx^4$, мы можем утверждать, что единственной допустимой формой типа (8.134) является следующая:

$$\Phi=a(dx^1)^2+2be^{kx^4}dx^1dx^2+ce^{2kx^4}(dx^2)^2+(dx^3)^2+(dx^4)^2, \tag{8.153}$$

где a, b и c — произвольные постоянные, подчиняющиеся лишь неравенствам (8.152); главные напряжения и плотность определяются формулами

$$\begin{gathered} S_2=S_4=-k^2\frac{b^2}{4\sigma}, \qquad S_3=-k^2\left(1-\frac{b^2}{4\sigma}\right), \\ \mu=k^2\left(\frac{3b^2}{4\sigma}-1\right), \end{gathered} \tag{8.154}$$

причем напряжения отрицательны (положительное давление), а плотность — положительна.

Метрическая форма (8.153) допускает 4-параметрическую группу движений[1]), ибо она не меняется при преобразованиях

$$\begin{aligned} x^1&=\bar{x}^1+A_1, & x^2&=\bar{x}^2e^{-kB}+A_2, \\ x^3&=\bar{x}^3+A_3, & x^4&=\bar{x}^4+B, \end{aligned} \tag{8.155}$$

где A и B — произвольные постоянные.

Чтобы давление получилось изотропным ($S_2=S_3=S_4=-p$), следует на постоянные, входящие в (8.153), наложить ограничение следующего вида:

$$b^2=2ac, \tag{8.156}$$

откуда следует, что

$$p=\mu=\frac{1}{2}k^2. \tag{8.157}$$

Этот результат с физической точки зрения представляется несколько разочаровывающим, поскольку хотелось бы получить для p/μ малую величину[2]).

[1]) Пространства, допускающие 3-параметрическую группу движений, исследовал Тауб [1217] (ср. с книгой Мак-Витти [732]); он построил несколько замечательных вселенных, в которых тензор Римана R_{ijkm} не равен нулю, хотя они и пусты ($R_{ij}=0$).

[2]) Для нахождения тензора энергии, соответствующего какой-либо заданной метрике, мы обычно пользовались формулой $\varkappa T_{ij}=-G_{ij}$. Однако если мы предпочитаем

Если не накладывать ограничения (8.156), то в (8.153) будут входить четыре постоянные, однако существенными окажутся лишь две из них, ибо если выполнить преобразование

$$\sqrt{-a}\,x^1 = k^{-1}\bar{x}^1, \qquad \sqrt{-c}\,x^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}k^{-1}\bar{x}^2,$$
$$x^3 = k^{-1}\bar{x}^3, \qquad x^4 = k^{-1}\bar{x}^4, \tag{8.158}$$

то метрическая форма приобретает вид

$$\Phi = k^{-2}\left[-(d\bar{x}^1)^2 - 2\lambda e^{\bar{x}^4} d\bar{x}^1 d\bar{x}^2 - \frac{1}{2}e^{2\bar{x}^4}(d\bar{x}^2)^2 + (d\bar{x}^3)^2 + (d\bar{x}^4)^2\right], \tag{8.159}$$

где

$$\frac{2}{3} < \lambda^2 = \frac{b^2}{2ac} < 2. \tag{8.160}$$

Если теперь учесть (8.156), то получим $\lambda^2 = 1$, и (8.159) (за исключением тривиального различия в обозначениях) переходит в метрику Геделя [399] [1]).

Мы сочли целесообразным проделать постепенный спуск от формы (8.119) (допускающей 2-параметрическую группу движений) к форме Геделя, поскольку в процессе этого спуска обнаруживаются такие формулы, как (8.133), которые достаточно компактны, чтобы их можно было использовать при построении моделей пространства — времени.

§ 5. Статические пространства [2])

По определению статическое пространство — время имеет метрическую форму

$$\Phi = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta + g_{44}(dx^4)^2 \qquad (g_{44} < 0), \tag{8.161}$$

коэффициенты которой не зависят от x^4. Геометрия пространства — времени в этом случае складывается из геометрии трехмерного пространства с метрическим тензором $\bar{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$ и функции g_{44} пространственных координат x^α. Мы будем обозначать черточкой субтензоры и другие величины, относящиеся к трехмерному пространству. Итак, вводя для удобства функцию V, мы имеем

$$\begin{gathered} g_{\alpha\beta} = \bar{g}_{\alpha\beta}, \qquad g_{\alpha 4} = 0, \qquad g_{44} = -V^2, \\ g^{\alpha\beta} = \bar{g}^{\alpha\beta}, \qquad g^{\alpha 4} = 0, \qquad g^{44} = -V^{-2}, \\ [\alpha\beta, \gamma] = \overline{[\alpha\beta, \gamma]}, \qquad [4\alpha, 4] = -[44, \alpha] = -VV_{,\alpha}, \\ \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \bar{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}, \qquad \Gamma^4_{\alpha 4} = V^{-1}V_{,\alpha}, \qquad \Gamma^\alpha_{44} = \bar{g}^{\alpha\beta}VV_{,\beta}. \end{gathered} \tag{8.162}$$

В процессе вычислений выясняется, что при наличии одного индекса «4» или трех таковых соответствующий член обращается в нуль. С помощью (1.85) мы находим вид тензора Римана

$$\begin{gathered} R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}, \qquad R_{\alpha\beta\gamma 4} = 0, \\ R_{\alpha 4 4\delta} = \frac{1}{2}g_{44\|\alpha\delta} - \frac{1}{4}g^{44}g_{44,\alpha}g_{44,\delta} = -VV_{\|\alpha\delta}, \end{gathered} \tag{8.163}$$

использовать космологическую константу Λ, мы записываем $\varkappa T_{ij} = \Lambda g_{ij} - G_{ij}$ и, следовательно, получаем другой тензор энергии. Если в предыдущей модели мы выберем $\Lambda = {}^1/_2 k^2$, то из (8.157) получим жидкость с плотностью $\mu = k^2$ и давлением $p = 0$.

[1]) В этой статье перечислено и доказано большое число интересных свойств этой метрики.

[2]) Изучение такого рода пространств с новой точки зрения см. в книге Петрова [903], § 48.—*Прим. ред.*

где две вертикальные черты означают ковариантное дифференцирование в пространстве относительно $\overline{g}_{\alpha\beta}$. Для тензора Риччи имеем

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} &= \overline{R}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} g^{44}\left(g_{44\|\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{44} g_{44,\alpha} g_{44,\beta} \right) = \overline{R}_{\alpha\beta} + V^{-1} V_{\|\alpha\beta}, \\ R_{\alpha 4} &= 0, \quad R_{44} = \frac{1}{2}\Delta_2 g_{44} - \frac{1}{4} g^{44} \Delta_1 g_{44} = -V\Delta_2 V, \end{aligned} \tag{8.164}$$

где операторы Δ_1 и Δ_2 определяются соотношениями

$$\Delta_1\varphi = \overline{g}^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta}, \quad \Delta_2\varphi = \overline{g}^{\alpha\beta}\varphi_{\|\alpha\beta}. \tag{8.165}$$

Таким образом, Δ_2 оказывается оператором Лапласа в искривленном пространстве. Следовательно,

$$\begin{aligned} R^{\alpha}_{\alpha} &= \overline{R} + V^{-1}\Delta_2 V, \quad R^4_4 = V^{-1}\Delta_2 V, \\ R &= \overline{R} + 2V^{-1}\Delta_2 V. \end{aligned} \tag{8.166}$$

Для тензора Эйнштейна получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &= R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\overline{g}_{\alpha\beta} R, \quad G_{\alpha 4} = 0, \quad G_{44} = \frac{1}{2} V^2 \overline{R}, \\ G^{\alpha}_{\alpha} &= R^{\alpha}_{\alpha} - \frac{3}{2} R = -\frac{1}{2}\overline{R} - 2V^{-1}\Delta_2 V, \\ G^4_4 &= R^4_4 - \frac{1}{2} R = -\frac{1}{2}\overline{R}, \\ G^4_4 - G^{\alpha}_{\alpha} &= 2V^{-1}\Delta_2 V. \end{aligned} \tag{8.167}$$

Наибольший интерес здесь представляет оператор Δ_2, поскольку он позволяет связать поверхностный интеграл и интеграл по объему. Пусть v_3 — область пространства, ограниченная замкнутой поверхностью v_2, а dv_3 и dv_2 означают соответственно объем и площадь. Тогда в силу теоремы Грина

$$\oint\limits_{v_2} V_{,\alpha} n^{\alpha} dv_2 = \int\limits_{v_3} \Delta_2 V\, dv_3 = \frac{1}{2}\int\limits_{v_3} (G^4_4 - G^{\alpha}_{\alpha}) V\, dv_3, \tag{8.168}$$

где n^{α} — выходящая единичная нормаль к v_2.

До сих пор мы занимались лишь вычислениями для метрической формы (8. 161). Уравнения поля не использовались. Введем теперь в рассмотрение уравнения поля, полагая $G_{ij} = -\varkappa T_{ij}$, $\varkappa = 8\pi$. Из (8.168) сразу же следует, что если v_2 целиком расположена в вакууме и может быть стянута в точку, не встречаясь с материей, то

$$\oint\limits_{v_2} V_{,\alpha} n^{\alpha} dv_2 = 0. \tag{8.169}$$

Следовательно, этот интеграл имеет одно и то же значение для любых двух поверхностей, которые можно совместить одну с другой посредством соответствующих деформаций, не приводящих к пересечению с материей. Статичность пространства предполагает наличие лишь одного тела (см. § 1) и в этом случае снова можно выделить внутреннюю область I и внешнюю

область E. Тогда (8.168) приводит к *теореме Гаусса для статического пространства*[1]) (Уиттекер [1387]):

$$\oint\limits_{v_2} V_{,\alpha} n^\alpha \, dv_2 = 4\pi m, \tag{8.170}$$

где v_2 — некоторая поверхность, ограничивающая тело, а m — константа, характеризующая тело, а именно,

$$m = -\int\limits_{v_3} (T_4^4 - T_\alpha^\alpha) V \, dv_3, \tag{8.171}$$

где интеграл берется по объему тела.

В вакуумной части статического поля уравнения поля гласят:

$$\overline{R}_{\alpha\beta} + V^{-1} V_{||\alpha\beta} = 0, \quad \Delta_2 V = 0. \tag{8.172}$$

Отметим, что пространство имеет нулевую скалярную кривизну $\overline{R}$.

В § 1 было показано, как обращаться со статическим аксиально симметричным полем в вакууме, представляющим собой частный случай (8.161). Сделаем теперь другое упрощение метрики (8.161), полагая

$$\Phi = U^2 dx^\alpha dx^\alpha - V^2 dt^2, \tag{8.173}$$

где U и V не зависят от t $(= x^4)$. Поскольку пространственная метрика конформно плоска, ее можно назвать *конформно статической* метрикой. С помощью непосредственного вычисления мы получаем (для простоты обозначим частные производные индексами без запятой)

$$\begin{gathered}
R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \overline{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = U(\delta_{\alpha\delta} U_{\beta\gamma} + \delta_{\beta\gamma} U_{\alpha\delta} - \delta_{\alpha\gamma} U_{\beta\delta} - \delta_{\beta\delta} U_{\alpha\gamma}) - \\
- 2(\delta_{\alpha\delta} U_\beta U_\gamma + \delta_{\beta\gamma} U_\alpha V_\delta - \delta_{\alpha\gamma} U_\beta U_\delta - \delta_{\beta\delta} U_\alpha U_\gamma) + (\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma} - \delta_{\beta\delta}\delta_{\alpha\gamma}) U_\sigma U_\sigma, \\
R_{\alpha\beta\gamma 4} = 0, \\
R_{4\alpha\beta 4} = R_{\alpha 44\beta} = -V V_{\alpha\beta} + V U^{-1}(U_\alpha V_\beta + U_\beta V_\alpha) - V U^{-1} \delta_{\alpha\beta} U_\sigma V_\sigma,
\end{gathered} \tag{8.174}$$

и

$$\begin{gathered}
R_{\alpha\beta} = U^{-1}(U_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta} U_{\sigma\sigma}) - 2U^{-2} U_\alpha U_\beta + V^{-1} V_{\alpha\beta} - \\
- (UV)^{-1}(U_\alpha V_\beta + U_\beta V_\alpha) + (UV)^{-1} \delta_{\alpha\beta} U_\sigma V_\sigma, \\
R_{\alpha 4} = 0, \\
R_{44} = -U^{-2} V (V_{\sigma\sigma} + U^{-1} U_\sigma V_\sigma), \\
R = 4U^{-3}\left(U_{\sigma\sigma} - \frac{1}{2} U^{-1} U_\sigma U_\sigma\right) + 2U^{-2} V^{-1}(V_{\sigma\sigma} + U^{-1} U_\sigma V_\sigma).
\end{gathered} \tag{8.175}$$

Проделанные выше вычисления справедливы для любой комформно статической метрики. Попытаемся удовлетворить уравнениям поля в вакууме $R_{ij} = 0$. Уравнения $R_{44} = 0$ и $R = 0$ требуют, чтобы U и V удовлетворяли двум уравнениям:

$$V_{\sigma\sigma} + U^{-1} U_\sigma V_\sigma = 0, \quad U_{\sigma\sigma} - \frac{1}{2} U^{-1} U_\sigma U_\sigma = 0, \tag{8.176}$$

последнее из которых эквивалентно уравнению

$$(\sqrt{U})_{\sigma\sigma} = 0, \tag{8.177}$$

---

[1]) В гл. VII, § 6, мы уже сталкивались с теоремой Гаусса в специальном случае сферической симметрии. Константа m, фигурирующая в метрике Шварцшильда (7.145), совпадает с величиной, определяемой формулой (8.170); это легче всего видеть из формулы (8.179), приведенной ниже.

так что величина $\sqrt{U}$ должна быть гармонической функцией относительно плоской метрики $dx^\alpha dx^\alpha$. Как только гармоническая функция выбрана, первое уравнение в (8.176) определяет V; но отыскание конформно статического поля в вакууме представляется в известной мере безнадежным, поскольку требуется удовлетворить еще пяти уравнениям поля. Однако по крайней мере одно решение все-таки существует, а именно внешнее поле Шварцшильда, имеющее вид (7.145), поскольку с помощью преобразования

$$r = \varrho\left(1 + \frac{m}{2\varrho}\right)^2 \tag{8.178}$$

эту метрическую форму можно привести к так называемому *изотропному* виду:

$$\begin{gathered}\Phi = U^2 dx^\alpha dx^\alpha - V^2 dt^2,\\ U = (1+\xi)^2, \quad V = \frac{1-\xi}{1+\xi}, \quad \xi = \frac{m}{2\varrho}, \quad \varrho^2 = x^\alpha x^\alpha.\end{gathered} \tag{8.179}$$

Легко проверить, что $\sqrt{U}$ есть гармоническая функция, как и в формуле (8.177). Заметим, что $(V-1)/(V+1)$ — также гармоническая функция.

Обращаясь к формуле (8.175) и полагая $UV = 1$, видим, что для формы

$$\Phi = U^2 dx^\alpha dx^\alpha - U^{-2} dt^2 \tag{8.180}$$

имеем компоненты

$$\begin{gathered}R_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} U^{-1}(U_{\sigma\sigma} - U^{-1} U_\sigma U_\sigma) + 2U^{-2} U_\alpha U_\beta,\\ R_{\alpha 4} = 0,\\ R_{44} = U^{-5}(U_{\sigma\sigma} - U^{-1} U_\sigma U_\sigma),\\ R = 2U^{-3} U_{\sigma\sigma}.\end{gathered} \tag{8.181}$$

Напомним, что в гл. V, § 3 тензоры Римана, Риччи и Эйнштейна вычислены для другой конформно статической метрики специального вида, а именно для

$$\Phi = (1+\varphi)\, dx^\alpha dx^\alpha - (1-\varphi)\, dt^2. \tag{8.182}$$

Вопросы геометрической оптики в статическом пространстве — времени, заполненном прозрачной средой, рассмотрены в гл. XI, § 4.

Глава IX

ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ

§ 1. Плоские гравитационные волны

Прежде чем перейти к конкретному изучению вопроса о гравитационных волнах, желательно уточнить смысл, который вкладывается в это понятие, а для этого лучше начать не с формального определения, а с рассмотрения одного занимательного примера.

Допустим, человек, стоящий на Земле, держит в руке тяжелую дубинку. Сначала дубинка свисает в его руке вниз, так что ее свободный конец обращен к Земле, но затем в какой-то момент времени человек быстро поднимает ее над головой. Согласно любой теории гравитации, дубинка создает гравитационное поле, каким бы незначительным оно ни было, и описанное выше действие человека меняет это поле не только вблизи него самого, но и во всей Вселенной. Согласно ньютоновской теории, этот эффект мгновенно воспринимается на Луне, Солнце и в любой далекой туманности. Поскольку мы ньютоновской теорией не занимаемся, незачем дискутировать и абсурдность этого утверждения. Как релятивисты, хорошо знакомые с идеей о том, что ни один каузальный эффект не может распространяться быстрее, чем свет, и знающие (см. гл. V, § 7), что геометрическое место точек, в которых существуют разрывы $g_{ij,km}$, представляет собой изотропную гиперповерхность, мы должны предполагать, что изменение гравитационного поля движущейся дубинки распространяется в пространстве со скоростью света. Мы можем назвать это движущееся возмущение *гравитационной волной*. Итак, исходя из самых общих соображений, следует рассматривать реальное существование гравитационных волн, таким образом понимаемых, как нечто самоочевидное.

Однако в одних случаях понятие *волна*[1]) связано с представлением о периодическом процессе, а в других случаях нет, и это вносит известную путаницу. В физике это недоразумение усугубляется в процессе применения фурье-преобразований, позволяющих любое неповторяющееся возмущение (единичную волну) разлагать в ряды периодических волновых функций с полным спектром частот[2]).

Говоря о волнах, мы не будем настаивать на том, чтобы они были обязательно периодическими. В гл. V, § 7 рассмотрены гравитационные ударные волны. Можно было бы назвать эти ударные волны *необъемными*, чтобы

---

[1]) Например, в Оксфордском толковом словаре существительному *wave* (*волна*) посвящено около двух страниц и почти столько же соответствующему глаголу.

[2]) Поскольку техника фурье-преобразований по существу удобна для рассмотрения лишь *линейных* дифференциальных уравнений, мы вряд ли будем использовать ее в применении к анализу *нелинейных* уравнений общей теории относительности

отличить их от *объемных* (Бонди [68], Бонди, Пирани и Робинсон [70]) [1]) гравитационных волн[2]), к обсуждению которых мы переходим.

На фиг. 84 показана объемная гравитационная волна в пространстве — времени. Две трехмерные гиперповерхности Σ_1 и Σ_2 делят пространство — время на три области: *I*, *II* и *III*. Материя отсутствует во всем пространстве (человек, размахивающий дубинкой, был абстракцией!), и повсюду мы имеем

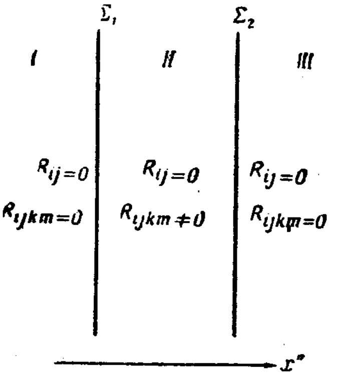
$$R_{ij} = 0. \tag{9.1}$$

Гравитационное поле в областях *I* и *III* отсутствует и, следовательно, здесь

$$R_{ijkm} = 0. \tag{9.2}$$

Область *II* представляет собой объемную гравитационную волну. Здесь по крайней мере одна из компонент тензора Римана не равна нулю, что мы отметим, записав

$$R_{ijkm} \neq 0. \tag{9.3}$$



Фиг. 84. Объемная гравитационная волна, в пространстве — времени.

Напомним, что для допустимых координат g_{ij} и $g_{ij,k}$ непрерывны, а $g_{ij,km}$ могут терпеть разрыв. По соображениям, изложенным ниже, необходимо иметь *три* системы допустимых координат[3]). Одна покрывает область *II* и прилегающие к ней части областей *I* и *III*. Другая покрывает область *I*, не обязательно включая границу Σ_1. Третья покрывает область *III*, не обязательно включая Σ_2. Как это требовалось в гл. I, § 1, в областях перекрытия (они лежат в областях *I* и *III*) все преобразования относятся к классу C^3 в соответствии с гл. I, § 1.

На Σ_1 и Σ_2 могут существовать необъемные (ударные) гравитационные волны с разрывами $g_{ij,km}$ (хотя это не обязательно). Существенная особенность объемной гравитационной волны состоит в существовании неплоской области, «втиснутой» между двумя плоскими. Гравитационное поле присутствует во внутренней области и отсутствует вне ее.

Отправной точкой при обсуждении объемных гравитационных волн будет метрическая форма (8.119):

$$\Phi = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta + g_{AB}\, dx^A\, dx^B. \tag{9.4}$$

Как и в гл. VIII, § 4, греческие индексы принимают значения 1, 2, а заглавные — 3, 4. Коэффициенты $g_{\alpha\beta}$ есть функции (x^3, x^4), а g_{AB} постоянные. Однако мы сразу же конкретизируем вид метрики, требуя, чтобы $g_{\alpha\beta}$ были функциями только x^4, и полагая

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = g^{AB}, \tag{9.5}$$

так что (9.4) принимает вид

$$\Phi = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + 2dx^3 dx^4. \tag{9.6}$$

[1]) Во второй из этих статей имеются ссылки на более ранние работы.

[2]) Вместо терминов «тонкие» (thin) и толстые (thick) волны мы будем употреблять соответственно «необъемные» и «объемные».— *Прим. ред.*

[3]) Если это смутит формалистов, которые предпочли бы покрыть все пространство — время единой метрикой, предлагаем им поразмыслить над случаем сферической поверхности, которая не может быть адекватно покрыта единственной системой координат.

Так как

$$2dx^3dx^4 = d\zeta^2 - d\tau^2.$$

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^3 + x^4), \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^3 - x^4), \tag{9.7}$$

то форма (9.6) имеет сигнатуру $+2$ при условии, что величина $g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ положительно определена.

Здесь применимы формулы (8.123). В этом случае, поскольку $g^{44}=0$, отличными от нуля компонентами тензора Римана окажутся

$$\begin{aligned} R_{1414} &= -\frac{1}{2} g_{11,44} + \frac{1}{4} g^{\varrho\sigma} g_{\varrho 1,4} g_{\sigma 1,4}, \\ R_{1424} &= -\frac{1}{2} g_{12,44} + \frac{1}{4} g^{\varrho\sigma} g_{\varrho 1,4} g_{\sigma 2,4}, \\ R_{2424} &= -\frac{1}{2} g_{22,44} + \frac{1}{4} g^{\varrho\sigma} g_{\varrho 2,4} g_{\sigma 2,4}. \end{aligned} \tag{9.8}$$

Вычисляя тензор Риччи, находим (и это самое важное), что только *одна* его компонента отлична от нуля:

$$R_{44} = -g^{11}R_{1414} - 2g^{12}R_{1424} - g^{22}R_{2424}. \tag{9.9}$$

Рассмотрим теперь структуру объемной плоской гравитационной волны при $x^4 = \text{const}$[1]) на Σ_1 и Σ_2 (фиг. 85). Задача состоит в том, чтобы найти g_{11}, g_{12} и g_{22} как функции переменной x^4 класса C^1 в области *II* и прилегающих частях областей *I* и *III*, такие, чтобы в *I* и *III* выполнялись равенства

$$R_{1414} = 0, \quad R_{1424} = 0, \quad R_{2424} = 0 \tag{9.10}$$

и чтобы в области *II* удовлетворялось уравнение

$$R_{44} = 0, \tag{9.11}$$

причем хотя бы одно из равенств (9.10) должно в области *II* нарушаться[2]).

Прежде чем строить конкретный вид объемной гравитационной волны (§ 3), рассмотрим подробнее ситуацию. Три функции связаны в области *II* всего лишь одним уравнением, откуда вытекает возможность подбора большого числа разнообразных функций $g_{\alpha\beta}$, для которых не выполняется хотя бы одно из условий (9.10). Подобрав такие функции, мы имеем определенные значения $g_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta,4}$ на Σ_1 и Σ_2. По этим данным Коши уравнения (9.10) определяют $g_{\alpha\beta}$ в тех частях областей *I* и *III*, которые прилегают к Σ_1 и Σ_2. Эти части должны быть плоскими, и мы завершаем построение, выполняя *I* и *III* преобразования координат с целью устранения формальных сингулярностей, появляющихся в решениях Коши. Не говоря уже о таких, например, возможностях, которые могли бы возникнуть для положительно определенного характера метрики, приведенные выше соображения указывают на существование широкого многообразия объемных гравитационных волн.

Упростим теперь метрику (9.6), положив

$$g_{11} = e^{2P}, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = e^{2Q}, \tag{9.12}$$

где P и Q — произвольные функции x^4. Тогда $R_{1424} \equiv 0$, а две оставшиеся компоненты в (9.8) имеют вид

$$R_{1414} = -(P'' + P'^2)e^{2P}, \quad R_{2424} = -(Q'' + Q'^2)e^{2Q}, \tag{9.13}$$

---

[1]) Поскольку $g^{44}=0$, Σ_1 и Σ_2 представляют собой изотропные трехмерные гиперповерхности. На языке физики такая гравитационная волна есть плоская волна, распространяющаяся в ζ-направлении [см. (9.7)] со скоростью света ($d\zeta/d\tau = 1$).

[2]) Если выполняются все равенства (9.10), то пространство — время становится полностью плоским и волны отсутствуют.

где штрихи означают производные. Аналогично для (9.9)

$$R_{44} = P'' + P'^2 + Q'' + Q'^2. \tag{9.14}$$

Таким образом, чтобы построить гравитационную волну с метрической формой

$$\Phi = e^{2P}(dx^1)^2 + e^{2Q}(dx^2)^2 + 2dx^3dx^4 \tag{9.15}$$

в областях I и III, необходимо удовлетворить уравнениям

$$P'' + P'^2 = 0, \quad Q'' + Q'^2 = 0, \tag{9.16}$$

так что

$$P = \ln m(x^4 + \alpha), \quad Q = \ln n(x^4 + \beta), \tag{9.17}$$

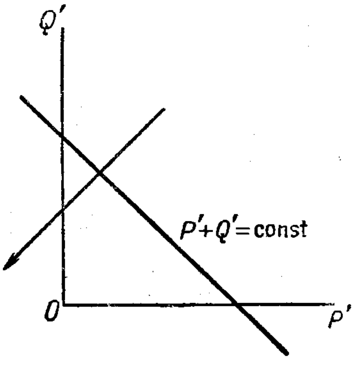
где α, β, m и n — постоянные (различные в областях I и III), а в области II нужно удовлетворить уравнению

$$P'' + P'^2 + Q'' + Q'^2 = 0, \tag{9.18}$$

не заботясь о том, чтобы удовлетворялись оба уравнения (9.16). Поскольку последнее уравнение можно представить в виде

$$P'' + Q'' = -P'^2 - Q'^2 < 0, \tag{9.19}$$

появляется интересное обстоятельство. Если изобразить (P', Q') как некоторую точку на плоскости (фиг. 85) и провести линии $P' + Q' = \text{const}$, то точка (P', Q') движется так, что траектория ее движения пересекает упомянутые выше линии в указанном на фиг. 85 направлении. Таким образом, ни одно из решений (9.18) не может образовать замкнутой кривой на плоскости. Это означает, что периодическое поле не может иметь места. Конкретный пример гравитационной волны будет рассмотрен в § 3.



Фиг. 85. Направление внутрь гравитационной волны.

§ 2. Мировая функция для плоской гравитационной волны и квазидекартовы координаты

Приведенные ниже рассуждения будут полезны при приведении метрики плоской гравитационной волны в областях I и III к регулярной форме, но они имеют и более широкую область применения. Мы вычислим мировую функцию Ω для метрики вида (9.15), не накладывая вначале никаких ограничений на функции $P(x^4)$ и $Q(x^4)$.

Для нахождения геодезических, соответствующих метрическому тензору (9.15), запишем лагранжиан

$$F = \frac{1}{2}\left[e^{2P}(Dx^1)^2 + e^{2Q}(Dx^2)^2 + 2Dx^3Dx^4\right], \tag{9.20}$$

где $D = d/ds$. Поскольку P и Q есть функции только x^4, то три первых интеграла имеют вид

$$e^{2P}dx^1 = \alpha_1 ds, \quad e^{2Q}dx^2 = \alpha_2 ds, \quad dx^4 = \beta^{-1}ds, \tag{9.21}$$

где α_1, α_2 и β — постоянные. Кроме того,

$$e^{2P}(dx^1)^2 + e^{2Q}(dx^2)^2 + 2dx^3dx^4 = \varepsilon ds^2, \tag{9.22}$$

где ε $(= \pm 1)$ — индикатор геодезической, по предположению временно-

подобной или пространственноподобной. Следовательно,

$$dx^1 = \beta\alpha_1 e^{-2P} dx^4, \quad dx^2 = \beta\alpha_2 e^{-2Q} dx^4, \quad ds = \beta dx^4,$$
$$dx^3 = \frac{1}{2}\beta^2 dx^4 (\varepsilon - \alpha_1^2 e^{-2P} - \alpha_2^2 e^{-2Q}). \tag{9.23}$$

Рассмотрим геодезическую, соединяющую точки $A(x^i)$ и $A'(x^{i'})$. Полагая

$$\xi^i = x^i - x^{i'}, \quad l_1 = \int_{x^{4'}}^{x^4} e^{-2P} dx^4, \quad l_2 = \int_{x^{4'}}^{x^4} e^{-2Q} dx^4, \tag{9.24}$$

получаем

$$\xi^1 = \beta\alpha_1 l_1, \quad \xi^2 = \beta\alpha_2 l_2,$$
$$\xi^3 = \frac{1}{2}\beta^2\varepsilon\xi^4 - \frac{1}{2}\beta^2\alpha_1^2 l_1 - \frac{1}{2}\beta^2\alpha_2^2 l_2, \quad s = \beta\xi^4. \tag{9.25}$$

Следовательно,

$$\xi^3 = \frac{1}{2}\varepsilon\beta^2\xi^4 - \frac{1}{2}\frac{(\xi^1)^2}{l_1} - \frac{1}{2}\frac{(\xi^2)^2}{l_2} \tag{9.26}$$

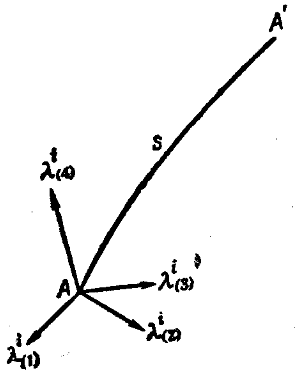
и поэтому

$$\frac{1}{2}\varepsilon\beta^2 = \frac{1}{\xi^4}\left[\xi^3 + \frac{1}{2}\frac{(\xi^1)^2}{l_1} + \frac{1}{2}\frac{(\xi^2)^2}{l_2}\right]. \tag{9.27}$$

Таким образом, мировая функция имеет вид

$$\Omega(AA') = \frac{1}{2}\varepsilon s^2 = \frac{1}{2}\varepsilon\beta^2(\xi^4)^2 = \xi^4\left[\xi^3 + \frac{1}{2}\frac{(\xi^1)^2}{l_1} + \frac{1}{2}\frac{(\xi^2)^2}{l_2}\right]. \tag{9.28}$$

Перейдем теперь от координат x^i к квазидекартовым координатам (КД) $X_{(a)}$, определенным соотношениями (2.150). Выберем в точке A (фиг. 86) ортонормированный 4-репер $\lambda^i_{(a)}$ с временноподобной компонентой $\lambda^i_{(4)}$. Тогда КД точки A' по отношению к A в данном векторном базисе будут:



Фиг. 86. Схема построения квазидекартовых координат точки A' относительно векторного базиса в точке A.

$$X_{(a)} = -\Omega_i(AA')\lambda^i_{(a)}, \tag{9.29}$$

где Ω_i — частная производная от Ω по x^i в точке A. Вследствие (9.28) имеем[1])

$$\Omega_1 = \frac{\xi^1\xi^4}{l_1}, \quad \Omega_2 = \frac{\xi^2\xi^4}{l_2}, \quad \Omega_3 = \xi^4,$$
$$\Omega_4 = \xi^3 + \frac{1}{2}\frac{(\xi^1)^2}{l_1} + \frac{1}{2}\frac{(\xi^2)^2}{l_2} - \frac{1}{2}\frac{\xi^4(\xi^1)^2 e^{-2P}}{l_1^2} - \frac{1}{2}\frac{\xi^4(\xi^2)^2 e^{-2Q}}{l_2^2}, \tag{9.30}$$

где P и Q взяты в точке A. Возьмем в качестве ортонормированного 4-репера

$$\lambda^i_{(1)}: \quad (e^{-P}, 0, 0, 0),$$
$$\lambda^i_{(2)}: \quad (0, e^{-Q}, 0, 0),$$
$$\lambda^i_{(3)}: \quad \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$
$$\lambda^i_{(4)}: \quad \left(0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \tag{9.31}$$

---

[1]) Помня, что $g^{34} = 1$, легко проверить, что основное уравнение $2\Omega = g^{ij}\Omega_i\Omega_j$ удовлетворяется [см. (2.20)].

В таком случае с помощью формулы (9.29) для КД точки A' (координаты $x^{i'}$ точки A' содержатся в ξ^i и I_1, I_2) получим

$$
\begin{gathered}
X_{(1)} = -e^{-P}\frac{\xi^1\xi^4}{I_1}, \quad X_{(2)} = -e^{-Q}\frac{\xi^2\xi^4}{I_2}, \\
X_{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[-\xi^4 - \xi^3 - \frac{1}{2}\frac{(\xi^1)^2}{I_1} - \frac{1}{2}\frac{(\xi^2)^2}{I_2} + \\
+ \frac{1}{2}\frac{\xi^4(\xi^1)^2e^{-2P}}{I_1^2} + \frac{1}{2}\frac{\xi^4(\xi^2)^2e^{-2Q}}{I_2^2}\Big], \\
X_{(4)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\xi^4 - \xi^3 - \frac{1}{2}\frac{(\xi^1)^2}{I_1} - \frac{1}{2}\frac{(\xi^2)^2}{I_2} + \\
+ \frac{1}{2}\frac{\xi^4(\xi^1)^2e^{-2P}}{I_1^2} + \frac{1}{2}\frac{\xi^4(\xi^2)^2e^{-2Q}}{I_2^2}\Big].
\end{gathered} \tag{9.32}
$$

Чтобы убедиться в правильности этих формул, легко проверить, что

$$
X_{(1)}^2 + X_{(2)}^2 + X_{(3)}^2 - X_{(4)}^2 = 2\Omega(AA'). \tag{9.33}
$$

Вспомним, что все предшествующие формулы в этом параграфе справедливы для метрической формы

$$
\Phi = e^{2P}(dx^1)^2 + e^{2Q}(dx^2)^2 + 2dx^3dx^4, \tag{9.34}
$$

где на функции P (x^4) и Q (x^4) не наложено никаких ограничений. Для гравитационных волн функции P и Q конечны в области II (см. фиг. 84) и в примыкающих к ней частях областей I и III, но имеют формальные сингулярности в других частях I и III. Однако области I и III плоски, и их метрики можно по отдельности привести к форме Минковского, подставляя (9.17) в (9.32). При этом получаем

$$
\begin{gathered}
X_{(1)} = -m\xi^1(x^{4'} + \alpha), \qquad X_{(2)} = -n\xi^2(x^{4'} + \beta), \\
X_{(3)} - X_{(4)} = -\sqrt{2}\,\xi^4, \\
X_{(3)} + X_{(4)} = -\sqrt{2}\Big[\xi^3 + \frac{1}{2}m^2(\xi^1)^2(x^{4'} + \alpha) + \frac{1}{2}n^2(\xi^2)^2(x^{4'} + \beta)\Big].
\end{gathered} \tag{9.35}
$$

В этих формулах ξ^i имеет тот же смысл, что и в (9.24). Точка x^i — произвольная точка в регулярной области (9.17), а (9.35) определяет преобразование $(x^{i'}) \rightarrow (X_{(a)})$. Легко проверить, что

$$
\begin{aligned}
dX_{(1)}^2 + dX_{(2)}^2 + dX_{(3)}^2 - dX_{(4)}^2 &= \\
&= e^{2P'}(dx^{1'})^2 + e^{2Q'}(dx^{2'})^2 + 2dx^{3'}dx^{4'},
\end{aligned} \tag{9.36}
$$

где штрихи над P и Q означают, что значения последних взяты в точке $x^{i'}$.

§ 3. Плоская гравитационная волна специального вида и замечания о цилиндрических и сферических волнах

Построим теперь объемную гравитационную волну частного вида, показав таким образом, что программа, описанная в § 1, действительно вполне осуществима. В основе анализа этого примера не лежат никакие специальные соображения, кроме простоты.

Пусть Σ_1 и Σ_2 задаются соответственно уравнениями $x=-a$ и $x=a$ (мы будем писать x вместо x^4). Тогда область II определяется неравенством $-a<x<a$, и в ней мы удовлетворим (9.18), требуя, чтобы P и Q удовлетворяли уравнениям

$$P''+P'^2=-k^{-2}, \quad Q''+Q'^2=k^{-2}, \quad k=\frac{4a}{\pi}. \tag{9.37}$$

В качестве частного решения выбираем

$$P=\ln\cos\frac{x}{k}, \quad Q=\frac{x}{k}, \tag{9.38}$$

так что

$$\begin{aligned} P' &= -k^{-1}\operatorname{tg}\frac{x}{k}, & Q' &= k^{-1}, \\ P'' &= -k^{-2}\sec^2\frac{x}{k}, & Q'' &= 0. \end{aligned} \tag{9.39}$$

Отсюда для значений на концах получим

$$\Sigma_1(x=-a): \quad \begin{aligned} P &= \ln\frac{1}{\sqrt{2}}, & Q &= -\frac{a}{k}, \\ P' &= k^{-1}, & Q' &= k^{-1}, \\ P'' &= -2k^{-2}, & Q'' &= 0; \end{aligned} \tag{9.40}$$

$$\Sigma_2(x=a): \quad \begin{aligned} P &= \ln\frac{1}{\sqrt{2}}, & Q &= \frac{a}{k}, \\ P' &= -k^{-1}, & Q' &= k^{-1}, \\ P'' &= -2k^{-2}, & Q'' &= 0. \end{aligned} \tag{9.41}$$

Теперь необходимо определить в областях I и III функции P и Q в форме (9.17), требуя непрерывности этих функций и их первых производных на Σ_1 и Σ_2. Получаем:

В области I:

$$e^P=\frac{1}{k\sqrt{2}}(x+a+k), \qquad e^Q=e^{-1/4\pi}\cdot k^{-1}(x+a+k),$$

В области III: (9.42)

$$e^P=\frac{1}{k\sqrt{2}}(a+k-x), \qquad e^Q=e^{1/4\pi}\cdot k^{-1}(x-a+k).$$

Итак, мы видим, что формальные сингулярности появляются в точках

$$x=-a-k \text{ в области } I, \quad x=a+k \text{ в области } III. \tag{9.43}$$

Таким образом, восстанавливая символ x^4, мы получили гравитационную волну со следующей метрикой:

В области I $(-a-k<x^4\leqslant -a)$:

$$k^{-2}(x^4+a+k)^2\left[\frac{1}{2}(dx^1)^2+e^{-1/2\pi}(dx^2)^2\right]+2dx^3dx^4.$$

В области II $(-a\leqslant x^4\leqslant a)$:

$$\cos^2\left(\frac{x^4}{k}\right)(dx^1)^2+e^{2x^4/k}(dx^2)^2+2dx^3dx^4. \tag{9.44}$$

В области III $(a\leqslant x^4<a+k)$:

$$\frac{1}{2}k^{-2}(x^4-a-k)^2(dx^1)^2+e^{1/2\pi}k^{-2}(x^4-a+k)^2(dx^2)^2+2dx^3dx^4.$$

Что касается оставшихся бесконечно протяженных частей плоских областей I и III, то здесь, как и в (9.35), можно ввести новые координаты, для которых метрика имеет форму Минковского. Применяя (9.35), следует брать в областях I и III ту точку x^i, которая фигурирует в (9.44).

Хотя рассмотренные нами гравитационные волны в математическом отношении и безупречны, в физическом смысле они нереальны. В электромагнетизме распространяющаяся область («слой») возмущения, ограниченная двумя невозмущенными областями, представляет собой разумную идеализацию действительности, так как в этом случае возможно испускание импульсов в невозмущенное пространство, которое после прохождения этого импульса снова становится невозмущенным. Однако же человек, который может размахивать дубинкой, не может создавать в ней материю. Он может изменять гравитационные поля, но не создавать их из ничего. В наших моделях нужно предпочитать случаи, когда волны возмущения распространяются в уже существующих полях.

Это осложнение преодолено в случае цилиндрических волн[1]) (Эйнштейн и Розен [303], Розен [1001], Мардер [695, 696], Боннор [76]). Для метрической формы

$$\Phi = e^{2\gamma-2\psi}(dr^2 - dt^2) + r^2 e^{-2\psi} d\varphi^2 + e^{2\psi} dz^2, \qquad (9.45)$$

где γ и ψ — функции переменных r и t; уравнения для $R_{ij} = 0$ сводятся к следующим:

$$\psi_{rr} + \frac{1}{r}\psi_r - \psi_{tt} = 0, \qquad (9.46)$$

$$\gamma_r = r(\psi_r^2 + \psi_t^2), \quad \gamma_t = 2r\psi_r\psi_t. \qquad (9.47)$$

Здесь (9.46) — обычное волновое уравнение в плоскости. Оно дает условие интегрируемости (9.47). Вследствие линейности уравнения (9.46) можно взять суперпозицию его решений (основное статическое поле и возмущение, зависящее от времени) и затем получить γ из (9.47) в виде квадратуры.

Однако цилиндрическая волна все же еще недостаточно реалистична. Интуиция подсказывает, что поле раскачивающейся дубинки на больших расстояниях от нее должно становиться сферически симметричным. Тем не менее некоторое нарушение симметрии (своего рода поляризация) должно иметь место, поскольку поле с идеальной сферической симметрией должно, согласно теореме Биркгоффа (см. гл. VII, § 4), быть статическим в том смысле, что оно должно допускать группу движений вдоль временноподобных линий.

Пытаясь составить общее представление о гравитационных волнах, обусловленных взмахами дубинки или колоссальной катастрофой астрономического масштаба, следует иметь в виду, что здесь речь может идти не о решении хорошо сформулированных математических проблем, а скорее о классах полей, удовлетворяющих некоторым условиям. Чтобы более четко сформулировать эти соображения, будем мыслить пространство — время как евклидово четырехмерное пространство с координатами r, θ, φ и t и с заданным на нем метрическим тензором g_{ij}. Разделим пространство — время на внутреннюю область I ($r < a$) и внешнюю E ($r > a$). В области I имеются некоторые движущиеся массы, а область E пуста, так что здесь должны удовлетворяться уравнения $R_{ij} = 0$. Необходимо еще добавить условие галилеевости на бесконечности, означающее, что $R_{ijkm} \to 0$ при $r \to \infty$.

Изучение гравитационных волн по существу не включает исследования I. Поскольку в физике мы чаще всего имеем дело с линейными теориями, то,

[1]) Имеется тесная формальная связь между статическими полями с аксиальной симметрией и цилиндрическими волнами. Формулы (8.18) и (8.24) переходят в формулы (9.45) и (9.46), если в первых произвести подстановку $(z, t) \to (it, iz)$.

естественно, привлекает идея по аналогии с последними рассматривать поле в области E как «обусловленное источниками», находящимися в области I. Однако в нелинейной теории эта идея оказывается ложной. Сосредоточим лучше внимание на E. Любое решение уравнения $R_{ij} = 0$ должно заслуживать внимания, если оно как-либо отвечает нашему интуитивному представлению о том, что такое гравитационные волны. Но с помощью одних только догадок вряд ли можно преуспеть в столь сложной задаче.

При отсутствии точных решений в E можно прибегнуть к приближенному анализу. При этом следует быть предусмотрительными. Математика не гарантирует, что существует какое-то подходящее решение. С физической же точки зрения мы в этом уверены. Итак, мы устанавливаем некоторую определенную систему приближений, основанную, скажем, на разложении в ряд по малому параметру. Обрывая этот ряд на каком-нибудь порядке, можно претендовать на то, чтобы получить хорошее приближение к некоторому точному решению, верить в существование которого у нас есть причины (не математические, а физические).

Но, так или иначе, подобного рода требование слишком неопределенно, чтобы на него опираться. Одно несомненно: приближенная метрика g_{ij} не удовлетворяет уравнению $R_{ij} = 0$ в E. Поэтому можно вернуться к исходному положению о том, что любому g_{ij} соответствует некоторое распределение материи, возможно аномальное, но это распределение можно исследовать, рассматривая, как и в (8.116), собственные значения тензора G_{ij}.

В таком случае можно утверждать, что приближенная метрика g_{ij} приводит к некоторому пространству, и практичный физик примет в качестве вакуума пространство — время, в котором давление и плотность достаточно малы по сравнению с их естественными значениями в тех же объемах. Эти значения можно назвать *затравочными* (*исходными*) значениями натяжения и плотности.

Вряд ли какое-либо линейное приближение удовлетворит такому критерию. Приближения высших порядков оказываются более обнадеживающими. Так, например, обстоит дело в работе Бонора [78], где он исходит из формул для запаздывающего потенциала пары осциллирующих масс. Однако в такого рода вычислениях формулы становятся настолько громоздкими, что применение указанного выше метода оказывается весьма затруднительным.

Глава X

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

§ 1. Уравнения Максвелла и тензор электромагнитной энергии

Хорошо известно, что в атомных масштабах электромагнитное притяжение и отталкивание значительно превосходят гравитационное притяжение. В астрономических же масштабах дело обстоит иначе, поскольку небесные тела электрически нейтральны или почти нейтральны, так что электрические эффекты выпадают из рассмотрения. Таким образом, существуют основания строить теории гравитации и электромагнетизма независимо.

Однако так поступить нельзя. Все электромагнитные явления не ограничены малыми масштабами, а нам как раз и нужна такая теория, которая позволяла бы проследить за излучением, распространяющимся от звезды к Земле в искривленном пространстве — времени. Из этих соображений электромагнитные поля вводятся в пространство — время, свойства которого определяются распределенными в нем массами, причем такими, что гравитационные поля, вызванные присутствием электромагнитной энергии (если таковые имеются), пренебрежимо малы (Уиттекер [1382—1385]). С другой стороны, существует мнение, что гравитацию и электромагнетизм следовало бы теснейшим образом связать друг с другом в рамках единой общей теории, позволяющей описать все физические явления, от внутриатомных до космических масштабов (Вейль [1351, 1356, 1362], Эйнштейн [278, 286], Шредингер [1073, 1074], а также ряд других работ, в частности Тоннела [1282] и Главатый [449]).

Но надежды на построение такой единой теории не оправдались, и представляется разумным рассматривать электромагнетизм в рамках общей теории относительности, беря ее в том виде, как она уже изложена в данной книге. Однако даже если гравитационные поля, вызываемые электромагнитными свойствами материи, в действительности очень малы, мы попытаемся объединить электромагнетизм и гравитацию, хотя бы в мере, достаточной для того, чтобы электромагнитные поля смогли оказывать влияние на геометрию пространства — времени.

Мы будем рассматривать только электромагнитные поля в вакууме или в какой-нибудь некогерентной жидкости, все частицы которой несут электрический заряд одинакового знака[1]). Тогда существуют следующие функции пространственно-временных координат x^i:

g_{ij} — симметричный метрический тензор;
F_{ij} — кососимметричный электромагнитный тензор ($F_{ij} = -F_{ji}$);
J^i — 4-ток;
u^i — 4-скорость заряда, представленная единичным вектором ($u_i u^i = -1$);
ϱ — собственная плотность электрического заряда;
μ — плотность массы.

---

[1]) Относительно более общих случаев см. работы Фам Мау Кана [912, 913, 915, 916, 918—921].

Эти величины не независимы, поскольку

$$J^i = \varrho u^i. \tag{10.1}$$

Другие дифференциальные соотношения будут введены ниже. Мы можем перейти от заряженной жидкости к незаряженной, полагая $J^i = 0$, $\varrho = 0$ и, наконец, к вакууму, полагая $\mu = 0$.

Пусть $\lambda^i_{(a)}$ — ортонормированный 4-репер, вектор которого $\lambda^i_{(4)}$ временноподобен и направлен в будущее. Из F_{ij} можно построить следующие инварианты:

$$F_{(ab)} = F_{ij}\lambda^i_{(a)}\lambda^j_{(b)} = -F_{(ba)}. \tag{10.2}$$

Полагая

$$\begin{aligned} F_{(14)} &= E_1, \quad & F_{(24)} &= E_2, \quad & F_{(34)} &= E_3, \\ F_{(23)} &= H_1, \quad & F_{(31)} &= H_2, \quad & F_{(12)} &= H_3, \end{aligned} \tag{10.3}$$

мы переходим к обычным физическим понятиям, называя F_α *электрическим 3-вектором*, а H_α — *магнитным 3-вектором*[1]. Аналогично образуются инварианты

$$J_{(a)} = J_i\lambda^i_{(a)}. \tag{10.4}$$

Назовем $J_{(\alpha)}$ *3-током*, а $J_{(4)}$ — *относительной электрической плотностью* (не следует смешивать последнюю с собственной плотностью ϱ, которая также является инвариантом, но более фундаментальным, поскольку она не зависит от выбора 4-репера).

Тензор перестановок (1.114) также используется и в электромагнитной теории. Полагая

$$q = \sqrt{-g}, \tag{10.5}$$

получаем следующие формулы (обратить внимание на знаки «минус»!):

$$\begin{gathered} \eta^{ijkm} = q^{-1}\varepsilon_{ijkm}, \qquad \eta_{ijkm} = -q\varepsilon_{ijkm}, \\ \eta^{ijkm}\eta_{iabc} = -\varepsilon_{ijkm}\varepsilon_{iabc} = -\delta^{jkm}_{abc}, \\ \eta^{ijkm}\eta_{ijbc} = -2(\delta^k_b\delta^m_c - \delta^k_c\delta^m_b) = -2\delta^{km}_{bc}, \\ \eta^{ijkm}\eta_{ijkc} = -6\delta^m_c. \end{gathered} \tag{10.6}$$

Мы уже встречались с шестииндексным обобщенным δ-символом Кронекера в (1.122); четырехиндексный δ-символ определяется аналогичным образом. Важно помнить, что ковариантная производная тензора перестановок равна нулю.

Дуальный электромагнитный тензор определяется одной из следующих эквивалентных формул[2]:

$$F^{*ij} = \frac{1}{2}\eta^{ijkm}F_{km}, \qquad F^*_{ij} = \frac{1}{2}\eta_{ijkm}F^{km}. \tag{10.7}$$

Умножая первое и второе выражения соответственно на η_{ijab} и η^{ijab}, используя (10.6) и меняя местами индексы, получаем

$$F^{ij} = -\frac{1}{2}\eta^{ijkm}F^*_{km}, \qquad F_{ij} = -\frac{1}{2}\eta_{ijkm}F^{*km}. \tag{10.8}$$

[1] Мы возвращаемся к обычному соглашению, принятому в книге: греческие индексы принимают значения 1, 2, 3.

[2] В (5.63) звездочка используется в другом смысле; однако это не должно приводить к недоразумениям.

Примем теперь *уравнения Максвелла*, записав их в виде[1])

$$F^{ij}_{|j}=J^i, \quad F_{ij,k}+F_{jk,i}+F_{ki,j}=0. \tag{10.9}$$

Интересно отметить, что второе из этих уравнений носит тензорный характер, хотя входящие в него производные и являются частными. Однако последние можно заменить ковариантными, и, как легко видеть, уравнения Максвелла можно представить также и в виде[2])

$$F^{ij}_{|j}=J^i, \quad F^{*ij}_{|j}=0. \tag{10.10}$$

Для любого кососимметричного тензора X^{ij} и произвольного вектора Y^i в силу (1.8), (1.10), (1.12) имеем

$$\begin{gathered} X^{ij}_{|j}=q^{-1}(qX^{ij})_{,j}, \quad Y^i_{|i}=q^{-1}(qY^i)_{,i}, \\ X^{ij}_{|ij}=(X^{ij}_{|i})_{|j}=q^{-1}(qX^{ij}_{|i})_{,j}=q^{-1}(qX^{ij})_{,ij}=0. \end{gathered} \tag{10.11}$$

Таким образом, уравнения Максвелла можно представить еще и в следующей форме:

$$(qF^{ij})_{,j}=qJ^i, \quad (qF^{*ij})_{,j}=0, \tag{10.12}$$

а 4-ток удовлетворяет *уравнениям сохранения*, которые можно записать в одной из следующих форм[3]):

$$J^i_{|i}=0, \quad (qJ^i)_{,i}=0. \tag{10.13}$$

В силу второго из уравнений (10.9) существует вектор φ_i, называемый *4-потенциалом*, такой, что

$$F_{ij}=\varphi_{j,i}-\varphi_{i,j}=\varphi_{j|i}-\varphi_{i|j}. \tag{10.14}$$

После подстановки в первое уравнение (10.9) получаем

$$\square\,\varphi_i-g^{ab}\varphi_{a|ib}+J_i=0, \tag{10.15}$$

где $\square$ — *обобщенный даламбертиан*,

$$\square\,\varphi_i=g^{ab}\varphi_{i|ab}. \tag{10.16}$$

В силу (1.94) имеем тождества

$$\begin{gathered} \varphi_{a|ib}-\varphi_{a|bi}=R^j_{.aib}\varphi_j, \\ g^{ab}\varphi_{a|ib}-(g^{ab}\varphi_{a|b})_{|i}=-R_{ij}\varphi^j. \end{gathered} \tag{10.17}$$

Если наложить на φ_i условие нормировки[4])

$$g^{ab}\varphi_{a|b}=0, \tag{10.18}$$

то (10.17) даст

$$g^{ab}\varphi_{a|ib}=-R_{ij}\varphi^j, \tag{10.19}$$

и уравнение (10.15) примет вид

$$\square\,\varphi_i+R_{ij}\varphi^j+J_i=0. \tag{10.20}$$

Таким образом, уравнения Максвелла свелись к пяти уравнениям (10.18), (10.20), но независимы из них лишь четыре.

---

[1]) Если использовать рациональные единицы заряда, то множитель 4π перед J^i не появится.

[2]) Относительно деталей преобразования см. § 3 этой главы.

[3]) Величины qF^{ij}, qF^{*ij} и qJ^i представляют собой *тензорные плотности* или *относительные тензоры веса* 1 (Синг и Шилд [1190], стр. 240).

[4]) Определение φ_i с учетом (10.14) и (10.18) можно рассматривать как проблему Коши.

В вакууме $J_i = 0$, и, если пренебречь гравитационным эффектом электромагнитного поля, $R_{ij} = 0$. В этом случае (10.20) сводится к обобщенному волновому уравнению:

$$\Box \varphi_i = 0. \tag{10.21}$$

Чтобы связать электромагнетизм и гравитацию, зададим тензор энергии заряженной жидкости в следующем виде[1]):

$$T^{ij} = \mu u^i u^j + E^{ij}, \tag{10.22}$$

где

$$E^{ij} = g_{ab} F^{ai} F^{bj} - \frac{1}{4} g^{ij} F_{ab} F^{ab}. \tag{10.23}$$

Этот тензор состоит из двух слагаемых: первое обязано материи, несущей заряд, второе — только полю. Забегая вперед, заметим, что

$$g_{ij} E^{ij} = g_{ij} g_{ab} F^{ai} F^{bj} - F_{ab} F^{ab} = g_{ij} g_{ab} F^{ai} F^{bj} - g_{ia} g_{jb} F^{ij} F^{ab}. \tag{10.24}$$

Меняя местами a и j в последнем члене, мы видим, что он взаимно уничтожается с первым членом. Таким образом,

$$E^i_i = 0, \tag{10.25}$$

т. е. след смешанного тензора энергии электромагнитного поля равен нулю.

Запишем теперь обычные уравнения поля:

$$G_{ij} = -\varkappa T_{ij}, \quad \varkappa = 8\pi, \tag{10.26}$$

Последние (с точностью до координатных условий) образуют полную систему уравнений для заряженной жидкости. Мы рассмотрим несколько ниже проблему Коши для этой системы. Найдем прежде всего *уравнения движения*, получающиеся из (10.26) с учетом тождества

$$G^{ij}{}_{|j} = 0. \tag{10.27}$$

Из (10.23) следует, что

$$E^{ij}{}_{|j} = g_{ab} F^{ai}{}_{|j} F^{bj} + g_{ab} F^{ai} F^{bj}{}_{|j} - \frac{1}{2} g^{ij} F_{ab|j} F^{ab}. \tag{10.28}$$

Отсюда, выполнив серию перестановок индексов с учетом первого уравнения (10.9), получим

$$E^{ij}{}_{|j} + F^{ij} J_j = g_{ab} F^{ai}{}_{|j} F^{bj} - \frac{1}{2} g^{ij} F_{ab|j} F^{ab} = g^{ij} F_{bj|a} F^{ba} - \frac{1}{2} g^{ij} F_{ab|j} F^{ab} =$$
$$= \frac{1}{2} g^{ij} F^{ab} (F_{aj|b} - F_{bj|a} - F_{ab|j}) = \frac{1}{2} g^{ij} F^{ab} (F_{aj|b} + F_{jb|a} + F_{ba|j}). \tag{10.29}$$

В силу второго уравнения (10.9) это выражение обращается в нуль. Таким образом, использовав все уравнения Максвелла, имеем

$$E^{ij}{}_{|j} = -F^{ij} J_j. \tag{10.30}$$

Причина того, что (10.23) оказывается подходящим выражением для тензора энергии поля, состоит в следующем: в вакууме дивергенция тензора (10.23) равна нулю. Теперь из (10.27) получаем

$$(\mu u^i u^j)_{|j} = F^{ij} J_j, \tag{10.31}$$

или

$$u^i (\mu u^j)_{|j} + \mu u^i_{|j} u^j = F^{ij} J_j. \tag{10.32}$$

---

[1]) 4-скорость V^i, которую определяют [см. (4.75)] как единичный времениподобный собственный вектор тензора энергии, обеспечивает в данном случае связь заряда с полем, и ее не следует смешивать с u^i, которая относится только к заряду и не является собственным вектором тензора энергии (10.22).

Умножим (10.32) на u_i. Второй член при этом обратится в нуль, так как $u_i u^i = -1$, а правая часть обратится в нуль вследствие кососимметричности F^{ij} и того обстоятельства, что, согласно (10.1), направление u^i совпадает с направлением J^i. Таким образом,

$$(\mu u^j)_{|j} = 0, \tag{10.33}$$

т. е. мы приходим к уравнению *сохранения массы*. Теперь (10.32) сводится к уравнению

$$\mu u^i_{|j} u^j = F^{ij} J_j, \tag{10.34}$$

или, через абсолютные производные вдоль u-линии, —

$$\mu \frac{\delta u^i}{\delta s} = F^{ij} J_j; \tag{10.35}$$

иначе говоря,

$$\mu \frac{\delta u^i}{\delta s} = \varrho F^{ij} u_j. \tag{10.36}$$

Запишем (10.13) в виде

$$(\varrho u^i)_{|i} = 0. \tag{10.37}$$

Это — уравнение *сохранения заряда*. Уравнение (10.33) вместе с (10.37) означает, что, если мы возьмем тонкую трубку из u-линий, поперечное сечение которой равно σ, то полная масса $m = \mu\sigma$ и полный заряд $e = \varrho\sigma$ в процессе перемещения вдоль этой трубки сохраняются. Таким образом, учитывая постоянство m и e для трубки, мы запишем (10.36) в следующем виде:

$$m \frac{\delta u^i}{\delta s} = e F^{ij} u_j. \tag{10.38}$$

Мы имеем дело с теорией непрерывного поля, в которой заряженная точечная частица не имеет смысла. Однако коль скоро мы приняли гипотезы о геодезических для незаряженной пробной частицы, можно рассматривать (10.38) как уравнение движения заряженной пробной частицы с массой m, зарядом e и 4-скоростью u^i, движущейся в данном гравитационном поле g_{ij} и электромагнитном поле F_{ij} в предположении, что сама частица на поле не влияет. Фактически имеем здесь естественное обобщение закона Хэвисайда — Лоренца для пондермоторной силы (Синг [1175], стр. 394) на случай искривленного пространства — времени.

§ 2. Проблема Коши для некогерентной заряженной жидкости

Введем обозначения

$$Z_{ij} = G_{ij} + \varkappa T_{ij}, \quad \nu = \frac{\mu}{\varrho^2}, \tag{10.39}$$

где

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \nu J_i J_j + E_{ij}, \\ E_{ij} &= g^{ab} F_{ai} F_{bj} - \frac{1}{4} g_{ij} F_{ab} F^{ab}. \end{aligned} \tag{10.40}$$

Здесь тензор энергии (10.22) записан в несколько иной форме. Таким образом, систему уравнений поля для некогерентной заряженной жидкости можно представить в виде

$$Z_{ij} = 0, \quad F^{ij}_{\ \ |j} = J^i, \quad F^{*ij}_{\ \ \ |j} = 0, \quad C_i(g) = 0, \tag{10.41}$$

где последнее соотношение представляет собой четыре координатных условия.

Число неизвестных, как видим, равно 21:

$$g_{ij}, \quad F_{ij}, \quad J_i, \quad \nu. \tag{10.42}$$

Число уравнений в (10.41) равно $10+4+4+4=22$, однако из них только 21 независимы, если учесть тождество [см. (10.11)]

$$F^{*ij}{}_{|i/} = 0. \tag{10.43}$$

Таким образом, с помощью простого подсчета мы убеждаемся, что (10.41) является полной системой. Когда величины (10.42) найдены, другие величины определяются по формулам:

$$\varrho = (-J_i J^i)^{1/2}, \quad u_i = \varrho^{-1} J_i, \quad \mu = \nu \varrho^2. \tag{10.44}$$

Рассмотрим теперь проблему Коши (Лишнеровиц [671], стр. 55)[1]) для системы (10.41). Выбирая в трехмерном пространстве $x^4 = 0$ косоугольные гауссовы координаты x^i, мы имеем следующие координатные условия:

$$g_{\alpha 4,\,4} = 0, \quad g_{44} = \pm 1. \tag{10.45}$$

Определим на гиперповерхности $x^4 = 0$ в качестве данных Коши величины

$$g_{\alpha\beta}, \quad g_{\alpha\beta,4}, \quad g_{\alpha 4}, \quad F_{ij}, \quad J_i, \quad \nu \tag{10.46}$$

(определенные условия, которым они должны удовлетворять, мы приведем несколько позже) и исследуем алгебраическую проблему разрешимости уравнений (10.41) относительно

$$g_{\alpha\beta,44}, \quad F_{ij,4}, \quad J_{i,4}, \quad \nu_{,4}. \tag{10.47}$$

Уравнения $Z_{ij} = 0$ эквивалентны тому, что

$$R_{ij} = -\varkappa \left(T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} T^k_k \right), \tag{10.48}$$

где справа стоят величины, являющиеся данными Коши. Теперь величины $g_{\alpha\beta,44}$ входят только в эти уравнения, и, как и в (5.171), решение неоднозначно, если $g^{44} = 0$. Таким образом, изотропные поверхности представляют собой ударные волны (характеристики). Это справедливо для вакуума ($J_i = 0$), и, следовательно, *электромагнитные ударные волны в вакууме есть изотропные поверхности*. В частности, до тех пор пока световые волны можно рассматривать как ударные, они будут изотропными поверхностями. Поскольку, далее, бихарактеристики представляют собой изотропные геодезические (см. гл. V, § 7), это оправдывает предположения, касающиеся геодезических для фотонов (фотоны, как точечные частицы, лежат вне рамок теории поля).

Если допустить далее, что гиперповерхность $x^4 = 0$ не является изотропной ($g^{44} \neq 0$), то лемма 2 (см. гл. V, § 4) утверждает, что уравнения $Z_{ij} = 0$ эквивалентны уравнениям

$$Z_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} Z^k_k = 0, \tag{10.49}$$

$$Z^j_{i|j} = 0 \tag{10.50}$$

при начальном условии

$$Z^4_i = 0 \quad \text{на} \quad x^4 = 0. \tag{10.51}$$

---

[1]) О других исследованиях проблемы Коши см. работы Фуре-Брюа [355—359] и Фам Мау Кана [910, 913].

Теперь (10.49) совпадает с уравнением

$$R_{\alpha\beta} = -\varkappa\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T^k_k\right), \tag{10.52}$$

а (10,50) — с условием

$$T^{ij}_{\ |j} = 0. \tag{10.53}$$

Подставляя (10.40) в (10.53) и используя уравнения Максвелла в виде (10.41), получаем, согласно (10.30),

$$(\nu J^i)_{|j}J^j - F^{ij}J_j = 0. \tag{10.54}$$

Начальное условие (10.51) принимает вид [из гл. I, § 9 мы знаем, что G^4_i есть данные Коши (сокращенно ДК)]

$$G^4_i + \varkappa\nu J^4 J_i + \varkappa E^4_i = 0 \quad \text{на} \quad x^4 = 0. \tag{10.55}$$

Теперь мы имеем в своем распоряжении начальные условия, уравнения (10.52) и (10.54) и уравнения Максвелла

$$F^{ij}_{\ |j} = J^i, \quad F^{*ij}_{\ \ |j} = 0. \tag{10.56}$$

Независимо от основного хода наших рассуждений, представляет интерес тот факт, что (10.56) эквивалентны уравнениям

$$F^{\alpha j}_{\ |j} = J^\alpha, \quad J^i_{|i} = 0, \quad F^{*\alpha j}_{\ \ |j} = 0 \tag{10.57}$$

при начальных условиях

$$F^{4j}_{\ |j} = J^4, \quad F^{*4j}_{\ \ |j} = 0 \quad \text{на} \quad x^4 = 0. \tag{10.58}$$

(Легко видеть, что эти условия включают только данные Коши.) Очевидно, (10.56) содержат в себе (10.57) и (10.58). Для доказательства этого утверждения необходимо показать лишь, что условия (10.58) имеют место не только в начальный, но и в любой момент времени. Тогда в силу тождества

$$F^{ij}_{\ |ij} = 0 \tag{10.59}$$

уравнения (10.57) означают, что

$$(F^{ij}_{\ |j} - J^i)_{|i} = 0, \tag{10.60}$$

и, таким образом,

$$(F^{4j}_{\ |j} - J^4)_{,4} = -(F^{\alpha j}_{\ |j} - J^\alpha)_{,\alpha} - \\ - \Gamma^i_{ki}(F^{kj}_{\ |j} - J^k) = -\Gamma^i_{4i}(F^{4j}_{\ |j} - J^4). \tag{10.61}$$

При начальных условиях (10.58) существует единственное решение

$$F^{4j}_{\ |j} - J^4 = 0. \tag{10.62}$$

Тем самым установлено, что первое условие (10.58) выполняется во все моменты времени. Аналогичным образом можно показать справедливость подобного утверждения и для второго условия (10.58). Итак, (10.56) эквивалентны (10.57) и (10.58).

Выберем данные Коши так, чтобы удовлетворить (10.55) и (10.58) на гиперповерхности $x^4 = 0$, и попытаемся разрешить уравнения (10.52), (10.54) и (10.57) относительно величин (10.47). Теперь $g_{\alpha\beta,44}$, найденные из (10.52), однозначным образом выражаются через данные Коши, а с помощью (10.57) можно определить

$$F^{\alpha 4}_{,4}, \quad J^4_{,4}, \quad F^{*\alpha 4}_{,4}. \tag{10.63}$$

Поскольку $F_{\alpha 4}$ и $F^*_{\alpha 4}$ включают все F_{ij}, нам остается лишь решить (10.54) относительно $\nu_{,4}$ и $J^\alpha_{,4}$. Получаем

$$\nu_{,4}(J^4)^2 = \text{ДК}, \qquad \nu J^\alpha_{,4} J^4 = -\nu_{,4} J^\alpha J^4 + \text{ДК}. \tag{10.64}$$

Если $J^4=0$, то решение для $\nu_{,4}$ неоднозначно, и, следовательно, ударной волной (характеристикой) окажется любое трехмерное пространство, построенное из мировых линий тока. Однако если трехмерное пространство $x^4=0$ таковым не является, то $J^4 \neq 0$. и[1]) уравнения (10.64) дают единственное решение для $\nu_{,4}$ и $J^\alpha_{,4}$, так что проблема Коши оказывается регулярной и выбранные нами данные Коши, подчиняющиеся указанным условиям, дают единственное решение в окрестности $x^4=0$.

Для вакуума ($J_i=0$) приведенное выше доказательство видоизменяется и упрощается, но мы не будем на нем останавливаться; проблема Коши регулярна, если гиперповерхность $x^4=0$ не является изотропной.

Случай вакуума в некоторых отношениях представляет бóльший интерес, чем случай заряженной жидкости. Заметим, что уравнения поля в этом случае имеют вид

$$G_{ij} = -\varkappa E_{ij}, \quad F^{ij}{}_{|j}=0, \quad F^{*ij}{}_{|j}=0, \quad C_i(g)=0, \tag{10.65}$$

где E_{ij} определены в (10.40). Поскольку теперь

$$E^{ij}{}_{|j}=0, \tag{10.66}$$

число независимых уравнений в (10.65) равно $6+3+3+4=16$, что соответствует числу неизвестных (g_{ij}, F_{ij}).

Так как $E^i_i=0$, первое уравнение в (10.65) можно записать также в виде

$$R_{ij} = -\varkappa E_{ij}, \tag{10.67}$$

и, следовательно,

$$R=0, \tag{10.68}$$

так что для электромагнитного поля в вакууме инвариант кривизны равен нулю.

§ 3. Интегральные теоремы электромагнетизма

Пусть X_{ij} — некоторый кососимметричный тензор, а X^*_{ij} — дуальный к нему, так что, согласно (10.7) и (10.8),

$$\begin{aligned} X^{*ij} &= \frac{1}{2}\eta^{ijkm}X_{km}, & X^*_{ij} &= \frac{1}{2}\eta_{ijkm}X^{km}, \\ X^{ij} &= -\frac{1}{2}\eta^{ijkm}X^*_{km}, & X_{ij} &= -\frac{1}{2}\eta_{ijkm}X^{*km}. \end{aligned} \tag{10.69}$$

Следует помнить, что ковариантный тензор η_{ijkm} получен из контрвариантного η^{ijkm} посредством опускания индексов обычным образом, т. е. с помощью g_{ij}. Заметим, что дважды дуальный тензор равен начальному тензору с *обратным* знаком:

$$X^{**ij} = \frac{1}{2}\eta^{ijkm}X^*_{km} = \frac{1}{4}\eta^{ijkm}\eta_{kmab}X^{ab} = -X^{ij}. \tag{10.70}$$

Общее правило, касающееся изменений знака, состоит в следующем[2]): заменяя величину со звездочками на величину (ту же) без звездочек,

---

[1]) Здесь предполагается, что $\nu \neq 0$.

[2]) Это правило предполагает, что индексы имеют одну природу и, следовательно, требуется операция «две звездочки». — *Прим. ред.*

необходимо изменить знак. Из первого равенства (10.69) следует, что

$$X^{*ij}{}_{|j}=\frac{1}{2}\eta^{ijkm}X_{km|j}. \tag{10.71}$$

Умножая на η_{iabc} и используя (10.6), получаем

$$\eta_{iabc}X^{*ij}{}_{|j}=-\frac{1}{2}\delta^{jkm}_{abc}X_{km|j}=-(X_{ab|c}+X_{bc|a}+X_{ca|b}). \tag{10.72}$$

Вводя символ циклической перестановки [ ], который определяется в общем случае соотношением

$$Y_{[abc]}=Y_{abc}+Y_{bca}+Y_{cab}, \tag{10.73}$$

для (10.72) имеем

$$\eta_{iabc}X^{*ij}{}_{|j}=-X_{[ab|c]}=-X_{[ab,\,c]}. \tag{10.74}$$

Согласно установленному выше правилу, имеем также дуальную формулу

$$\eta_{iabc}X^{ij}{}_{|j}=X^{*}_{[ab|c]}=X^{*}_{[ab,\,c]}. \tag{10.75}$$

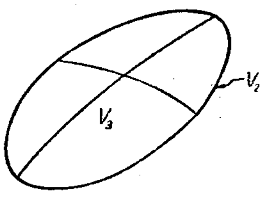
В силу этих тождеств ясно, что первую группу уравнений Максвелла (10.9) можно записать в следующем эквивалентном виде:

$$F^{ij}{}_{|j}=J^{i},\qquad F^{*}_{[ab,\,c]}=\eta_{iabc}J^{i}, \tag{10.76}$$

а вторая группа уравнений Максвелла (10.9) эквивалентна уравнению

$$F_{[ij,\,k]}=0,\qquad F^{*ij}{}_{|j}=0. \tag{10.77}$$

Таким образом, справедливость (10.10) установлена.



Фиг. 87. Интегральные теоремы электромагнетизма.

Пусть V_2 — замкнутое двумерное пространство в пространстве — времени, ограничивающее некоторое открытое V_3 (фиг. 87). По теореме Стокса (1.241)

$$\begin{aligned}\oint_{V_2} F_{ij}\,d\tau^{ij}&=\int_{V_3} F_{ij,\,k}\,d\tau^{ijk},\\ \oint_{V_2} F^{*}_{ij}\,d\tau^{ij}&=\int_{V_3} F^{*}_{ij,\,k}\,d\tau^{ijk}.\end{aligned} \tag{10.78}$$

Вследствие кососимметричности F_{ij}, F^{*}_{ij} и $d\tau^{ijk}$ эти соотношения можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\oint_{V_2} F_{ij}\,d\tau^{ij}&=\frac{1}{3}\int_{V_3}(F_{ij,\,k}+F_{jk,\,i}+F_{ki,\,j})\,d\tau^{ijk},\\ \oint_{V_2} F^{*}_{ij}\,d\tau^{ij}&=\frac{1}{3}\int_{V_3}(F^{*}_{ij,\,k}+F^{*}_{jk,\,i}+F^{*}_{ki,\,j})\,d\tau^{ijk}.\end{aligned} \tag{10.79}$$

В этих интегралах F_{ij} произвольны. Если мы теперь подставим сюда уравнения Максвелла, то получим две интегральные теоремы электромагнетизма:

$$\oint_{V_2} F_{ij}\,d\tau^{ij}=0, \tag{10.80}$$

$$\oint_{V_2} F^{*}_{ij}\,d\tau^{ij}=\frac{1}{3}\int_{V_3}\eta_{aijk}J^{a}\,d\tau^{ijk}. \tag{10.81}$$

Возможно, такая форма записи точнее всего выражает полученные здесь результаты. Однако чтобы привести их к виду, более близкому к обычным понятиям, можно, как и в (1.247) и (1.249), положить

$$d\tau^{ij} = \varepsilon(M)\,\varepsilon(N)\,\eta^{ijkm} M_k N_m\, d_2 v,$$
$$d\tau^{ijk} = \varepsilon(L)\,\eta^{ijkm} L_m\, d_3 v. \tag{10.82}$$

Здесь M^i и N^i — единичные векторы, ортогональные к V_2 и ортогональные друг к другу, а L^i — единичный вектор, ортогональный к V_3; $d_2 v$ и $d_3 v$ — инвариантные элементы площади и объема соответственно. Тогда

$$F_{ij}\, d\tau^{ij} = 2\varepsilon(M)\,\varepsilon(N)\, F^{*km} M_k N_m\, d_2 v,$$
$$F^*_{ij}\, d\tau^{ij} = -2\varepsilon(M)\,\varepsilon(N)\, F^{km} M_k N_m\, d_2 v. \tag{10.83}$$

Замечая, что в силу (10.6)

$$\eta_{aijk}\eta^{ijkm} = 6\delta^m_a, \tag{10.84}$$

имеем

$$\frac{1}{3}\eta_{aijk} J^a\, d\tau^{ijk} = 2\varepsilon(L)\, L_i J^i\, d_3 v. \tag{10.85}$$

Таким образом, формулы (10.80) и (10.81) можно записать в виде

$$\oint\limits_{V_2} \varepsilon(M)\,\varepsilon(N)\, F^*_{km} M^k N^m\, d_2 v = 0, \tag{10.86}$$

$$\oint\limits_{V_2} \varepsilon(M)\,\varepsilon(N)\, F_{km} M^k N^m\, d_2 v = -\int\limits_{V_3} \varepsilon(L)\, L_i J^i\, d_3 v. \tag{10.87}$$

Заметим, что при переходе от (10.80) и (10.81) к (10.86) и (10.87) F и F^* поменялись местами. Разумеется, векторы L^i, M^i, N^i должны быть соответственным образом ориентированы (см. гл. I, § 10).

Аналогично тому, как мы определили инвариантные компоненты в (10.2), мы можем определить инвариантные компоненты дуального тензора

$$F^*_{(ab)} = F^*_{ij}\lambda^i_{(a)}\lambda^j_{(b)} = -F^*_{(ba)}. \tag{10.88}$$

Чтобы выразить их через инварианты E_α и H_α, выписанные в (10.3), заметим, что (10.69) $(q = \sqrt{-g})$ дает

$$F^{*23} = q^{-1} F_{14}, \quad F^{*14} = q^{-1} F_{23},$$
$$F^*_{23} = -qF^{14}, \quad F^*_{14} = -qF^{23}, \tag{10.89}$$

и восемь других уравнений, получающихся из написанных при помощи циклической перестановки индексов 1, 2, 3. Если в качестве специальных координат выбрать такие, в которых локально

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \quad g_{44} = -1, \quad \lambda^i_{(a)} = \delta^i_a,$$

то в них

$$F^*_{(23)} = F^*_{23} = -F^{14} = F_{14} = F_{(14)} = E_1,$$
$$F^*_{(14)} = F^*_{14} = -F^{23} = -F_{23} = -F_{(23)} = -H_1. \tag{10.90}$$

Таким образом, в системах координат общего вида инвариантными компонентами являются

$$F^*_{(14)} = -H_1, \quad F^*_{(24)} = -H_2, \quad F^*_{(34)} = -H_3,$$
$$F^*_{(23)} = E_1, \quad F^*_{(31)} = E_2, \quad F^*_{(12)} = E_3. \tag{10.91}$$

Формулы (10.80), (10.81), (10.86), (10.87) носят весьма общий характер: они справедливы как для временноподобного, так и для пространственноподобного V_3. Допустим, в качестве простого примера, что V_3 — пространственноподобен, так что L^i — временноподобный вектор, и выберем в V_3 систему ортонормированных 4-реперов с $\lambda^i_{(4)} = L^i$. Положим $\lambda^i_{(4)} = M^i$, $\lambda^i_{(1)} = N^i$ на границе V_2, так чтобы вектор $\lambda^i_{(1)}$ представлял собой единичную нормаль к V_2 в V_3. Тогда из (10.86) и (10.87) следует, что

$$\oint_{V_2} H_1 \, d_2 v = 0, \tag{10.92}$$

$$\oint_{V_2} E_1 \, d_2 v = \int_{V_3} J_{(4)} \, d_3 v. \tag{10.93}$$

Здесь E_1 и H_1 — нормальные компоненты электрического и магнитного векторов. Мы имеем *теорему Гаусса*: соотношение (10.92) означает, что нормальная составляющая потока магнитного вектора через замкнутую поверхность равна нулю, а (10.93) означает равенство нормальной составляющей потока электрического вектора через замкнутую поверхность полному заряду, содержащемуся в объеме, ограниченном данной поверхностью (множитель 4π не появляется вследствие того, что здесь используются рациональные единицы).

Чтобы пояснить понятие «замкнутого двумерного пространства» в обычных терминах, можно привести простейший пример — мгновенное существование сферической поверхности в некоторый момент времени. Более сложным примером может служить двумерное пространство, образованное «историей» замкнутой проволочной петли, находящейся в покое в течение конечного интервала времени. Замкнутое V_2 образовано «историей» петли (эта часть временноподобна) и мгновенным положением воображаемой мембраны, натягивающейся на петлю, в начальный и конечный моменты времени (эта часть пространственноподобна).

Кроме приведенных выше интегральных теорем электромагнетизма, имеет место еще одна, значительно более простая, а именно

$$\oint_{V_3} \varepsilon(N) J_i N^i \, d_3 v = 0, \tag{10.94}$$

где интеграл взят по произвольному замкнутому трехмерному пространству, а N^i — единичный вектор нормали. Можно говорить, что это соотношение описывает сохранение электрического заряда. Оно является прямым следствием того, что $J^i_{|i} = 0$.

§ 4. Пространства электровакуума

Рассмотрим пространство, состоящее из внутренней области I (она может состоять из нескольких мировых трубок) и внешней области E. Область E свободна от материи, но содержит электромагнитное поле. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, мы можем говорить о пространстве *электровакуума*. В области E мы имеем только симметричный метрический тензор g_{ij} и кососимметричный электромагнитный тензор F_{ij}, удовлетворяющие уравнениям поля

$$G_{ij} = -\varkappa E_{ij}, \quad \varkappa = 8\pi, \tag{10.95}$$

и уравнениям Максвелла

$$F^{ij}{}_{|j} = 0, \quad F^{*ij}{}_{|j} = 0, \tag{10.96}$$

где

$$E_{ij}=g^{ab}F_{ai}F_{bj}-\frac{1}{4}g_{ij}F_{ab}F^{ab}. \qquad (10.97)$$

Поскольку $E^i_i=0$, уравнения поля (10.95) эквивалентны уравнениям

$$R_{ij}=-\varkappa E_{ij}. \qquad (10.98)$$

Вопрос относительно I мы оставляем открытым.

Обратимся теперь к рассмотрению статического пространства, потребовав, чтобы, как и в (8.161), метрическая форма имела вид

$$\Phi=g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta-V^2\,(dx^4)^2, \qquad (10.99)$$

где $g_{\alpha\beta}$ и V не зависят от x_4. Мы удовлетворим второму уравнению (10.96), положив

$$F_{ij}=\varphi_{j,i}-\varphi_{i,j}. \qquad (10.100)$$

Выберем $\varphi_\alpha=0$ и примем, что φ_4 не зависит от x^4. Тогда, полагая для простоты $\varphi_4=\varphi$, получаем

$$F_{\alpha4}=\varphi_{,\alpha},\quad F_{\alpha\beta}=0. \qquad (10.101)$$

Физическая интерпретация такой ситуации оказывается довольно реалистичной. Можно представить себе единственное тяжелое тело, несущее на себе электрический заряд, или (что менее реально) несколько таких тел, допуская, что их гравитационное притяжение уравновешено электростатическим отталкиванием. Поменяв ролями F_{ij} и F^*_{ij}, мы придем к случаю намагниченного тяжелого тела.

Чтобы исследовать $\bar{E}$, можно воспользоваться вычислениями, проделанными в гл. VIII, § 5. Из (10.101) получаем (черта означает, что соответствующие величины относятся к пространству)

$$F^{\alpha4}=-V^{-2}\bar{g}^{\alpha\beta}\varphi_{,\beta},\quad F^{\alpha\beta}=0; \qquad (10.102)$$

с помощью (10.97) находим

$$\begin{aligned}E_{\alpha\beta}&=V^{-2}\left(\frac{1}{2}\bar{g}_{\alpha\beta}\Delta_1\varphi-\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta}\right),\\ E_{\alpha4}&=0,\quad E_{44}=\frac{1}{2}\Delta_1\varphi.\end{aligned} \qquad (10.103)$$

Тогда в силу [8.164] уравнения поля гласят:

$$R_{\alpha\beta}\equiv\bar{R}_{\alpha\beta}+V^{-1}V_{\|\alpha\beta}=\varkappa V^{-2}\left(\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta}-\frac{1}{2}\bar{g}_{\alpha\beta}\Delta_1\varphi\right), \qquad (10.104)$$

$$-R_{44}\equiv V\Delta_2V=\frac{1}{2}\varkappa\Delta_1\varphi, \qquad (10.105)$$

где две вертикальные черты означают ковариантное дифференцирование по $\bar{g}_{\alpha\beta}\,(=g_{\alpha\beta})$. В силу (10.11) имеем

$$F^{ij}{}_{|j}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sqrt{-g}F^{ij}\right)=\frac{1}{V\sqrt{\bar{g}}}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(V\sqrt{\bar{g}}F^{i\beta}\right), \qquad (10.106)$$

и, следовательно, удовлетворяются тождественно все уравнения Максвелла (10.96), за исключением одного, которое имеет вид

$$V\Delta_2\varphi-\bar{g}^{\alpha\beta}V_{,\alpha}\varphi_{,\beta}=0. \qquad (10.107)$$

Наша главная задача теперь состоит в том, чтобы найти восемь величин $\bar{g}_{\alpha\beta}$, V, φ, удовлетворяющих восьми уравнениям в (10.104), (10.105) и (10.107).

Начиная с этого момента мы ограничим наше внимание только решениями, в которых V есть функция φ, т. е. поверхности уровней V и φ

совпадают (Вейль [1350], Мажумдар [686—689], Папапетру [854], Боннор [71, 72])[1]). Тогда, полагая $dV/d\varphi = V'$ и $d^2V/d\varphi^2 = V''$, имеем

$$V_{,\alpha} = V'\varphi_{,\alpha}, \quad V_{\|\alpha\beta} = V'\varphi_{\|\alpha\beta} + V''\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta} \qquad (10.108)$$
$$\Delta_1 V = V'^2\Delta_1\varphi, \quad \Delta_2 V = V'\Delta_2\varphi + V''\Delta_1\varphi,$$

и уравнения (10.105) и (10.107) принимают вид

$$VV'\Delta_2\varphi + \left(VV'' - \frac{1}{2}\varkappa\right)\Delta_1\varphi = 0, \qquad (10.109)$$

$$V\Delta_2\varphi - V'\Delta_1\varphi = 0. \qquad (10.110)$$

Исключая из этих уравнений первые члены и замечая, что $\Delta_1\varphi \neq 0$ (в противном случае электромагнитное поле было бы равно нулю), получаем для $V(\varphi)$ дифференциальное уравнение

$$VV'' + V'^2 = \frac{1}{2}\varkappa. \qquad (10.111)$$

Его общее решение имеет вид

$$V^2 = A + B\varphi + \frac{1}{2}\varkappa\varphi^2, \qquad (10.112)$$

где A и B — произвольные постоянные. При таком выборе $V(\varphi)$ мы имеем в (10.104) и (10.110) семь уравнений для семи величин $\bar{g}_{\alpha\beta}$, φ.

Теория становится более интересной, если перейти от статической формы общего вида (10.99) к частному конформно-статическому виду

$$\Phi = U^2\,dx^\alpha\,dx^\alpha - U^{-2}(dx^4)^2, \qquad (10.113)$$

так что

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = U^2\delta_{\alpha\beta}, \quad V = U^{-1}, \quad \bar{g} = U^6. \qquad (10.114)$$

Вместо того, чтобы сразу же предположить, что U — функция φ, проще непосредственно применить к (10.113) уравнения поля (10.104) и (10.105) и уравнение Максвелла (10.107). Но прежде, чем это сделать, вспомним, что уравнения поля (10.98) записаны с учетом $R=0$. Обращаясь к (8.181), мы видим, что это означает

$$U_{\sigma\sigma} = 0. \qquad (10.115)$$

(Здесь частные производные обозначены индексами без запятой.) Эта формула дает ключ к решению задачи: функция U *является гармонической по отношению к плоской метрике* $dx^\alpha dx^\alpha$. [Ср. этот результат для электровакуума с результатом для случая вакуума, когда не U, а $\sqrt{U}$ является гармонической, как это видно из (8.177).]

Помня, что операторы Δ_1 и Δ_2 вычислены относительно $\bar{g}_{\alpha\beta}$, получаем

$$\Delta_1\varphi = U^{-2}\varphi_\sigma\varphi_\sigma, \quad \bar{g}_{\alpha\beta}\Delta_1\varphi = \delta_{\alpha\beta}\varphi_\sigma\varphi_\sigma, \qquad (10.116)$$

и так как $\sqrt{\bar{g}} = U^3$, то

$$\Delta_2\varphi = U^{-3}(U^3\bar{g}^{\alpha\beta}\varphi_\beta)_\alpha = U^{-3}(U\varphi_\alpha)_\alpha = U^{-2}\varphi_{\alpha\alpha} + U^{-3}U_\alpha\varphi_\alpha, \qquad (10.117)$$
$$\bar{g}^{\alpha\beta}V_\alpha\varphi_\beta = -U^{-4}U_\alpha\varphi_\alpha, \quad V\Delta_2 V = U^{-6}U_\sigma U_\sigma - U^{-5}U_{\sigma\sigma}.$$

Таким образом, с учетом (8.181) уравнения поля (10.104) и (10.105) записываются в виде

$$U_\alpha U_\beta - \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}U_\sigma U_\sigma = \frac{1}{2}\varkappa U^4\left(\varphi_\alpha\varphi_\beta - \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\varphi_\sigma\varphi_\sigma\right), \qquad (10.118)$$

$$U_\sigma U_\sigma - UU_{\sigma\sigma} = \frac{1}{2}\varkappa U^4\varphi_\sigma\varphi_\sigma, \qquad (10.119)$$

[1]) Я многим обязан А. Дэсу за информацию и обсуждение этих работ.

а уравнение Максвелла (10.107) будет иметь вид

$$U\varphi_{\sigma\sigma}+2U_{\sigma}\varphi_{\sigma}=0. \qquad (10.120)$$

При этом неожиданно обнаруживается замечательный факт: все *восемь* уравнений в (10.118)—(10.120) будут удовлетворены, если положить[1])

$$\varphi=\sqrt{\frac{2}{\varkappa}}\frac{1}{U}=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\frac{1}{U}, \quad U_{\sigma\sigma}=0. \qquad (10.121)$$

Таким образом, существует очень простой способ строить поле электровакуума: *выбираем произвольную гармоническую функцию* U, *не имеющую нулей во внешней области* E, *и определяем* φ *по формуле* (10.121). Чтобы получить на бесконечности обычную плоскую метрику, следует так выбрать U, чтобы на бесконечности U^2 стремилось к нулю.

Допустим теперь, что внутренняя область I состоит из некоторого числа отдельных частей: I_1, I_2, ... Вокруг какой-нибудь одной из них, скажем I_1, представим себе замкнутую поверхность S_1. Поскольку в E 4-ток $J^i=0$, то в силу (10.93) существует некоторый интеграл по S_1, не меняющийся при деформировании S_1 в E. Не заботясь о внутренней структуре I_1, мы даем [в обозначениях (10.93)] естественное определение *полного заряда* e_1, сосредоточенного внутри или на поверхности области I_1:

$$e_1=\int_{S_1} E_1\,d_2v. \qquad (10.122)$$

Оперируя с этим интегралом, мы должны быть осторожными и отличать физическую метрику

$$d\sigma^2=U^2\,dx^\alpha\,dx^\alpha \qquad (10.123)$$

от плоской метрики

$$d\sigma_0^2=dx^\alpha\,dx^\alpha. \qquad (10.124)$$

Рассмотрим интеграл (10.122). В силу (10.3)

$$E_1=F_{(14)}=F_{ij}\lambda^i_{(1)}\lambda^j_{(4)}, \qquad (10.125)$$

где $\lambda^i_{(1)}$ — внешняя единичная нормаль к S_1, а $\lambda^i_{(4)}$ — единичный вектор, ориентированный в направлении времени. Вследствие (10.101) выражение для E_1 сводится к следующему:

$$E_1=\varphi_\alpha\lambda^\alpha_{(1)}\lambda^4_{(4)}. \qquad (10.126)$$

Здесь единичные векторы, разумеется, являются единичными по отношению к $d\sigma$. Таким образом, если n^α — внешняя нормаль к S_1, являющаяся единичной по отношению к $d\sigma_0$, то

$$\lambda^\alpha_{(1)}=\frac{dx^\alpha}{d\sigma}=\frac{dx^\alpha}{d\sigma_0}\frac{d\sigma_0}{d\sigma}=n^\alpha U^{-1}, \quad \lambda^4_{(4)}=U. \qquad (10.127)$$

Если dS — элемент площади относительно $d\sigma_0$, то мы имеем $d_2v=U^2\,dS$, и формула (10.122) приводит к следующему выражению для заряда, связанного с I_1:

$$e_1=\int_{S_1} U^2\varphi_\alpha n^\alpha\,dS=-\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_{S_1} U_\alpha n^\alpha\,dS. \qquad (10.128)$$

Так как функция U по отношению к $d\sigma_0$ является гармонической, последний интеграл при деформации S_1, очевидно, не меняется. Этот факт можно было бы установить сразу, но нам нужно было связать этот интеграл с зарядом.

---

[1]) Заметим, что, поскольку $UV=1$, это выражение для φ эквивалентно (10.112) при $A=B=0$.

Чтобы завершить обсуждение модели электровакуума, нужно I снабдить метрикой. Однако здесь этот вопрос мы обсуждать не будем.

Возьмем набор точек P_1, P_2, ... и предположим, что I состоит из внутренних частей шаров, радиусы которых равны соответственно $a_1, a_2, \ldots$, а центры расположены в упомянутых точках. Пусть $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ — расстояния (измеренные через $d\sigma_0$) от некоторой произвольной точки P до этих центров. Положим

$$U(P) = \varepsilon + \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\left(\frac{e_1}{\varrho_1} + \frac{e_2}{\varrho_2} + \ldots\right), \quad \varepsilon = \pm 1. \tag{10.129}$$

Если отношения e_1/a_1, e_2/a_2, ... достаточно малы, то U будет гармонической функцией, не обращающейся в нуль в E. Потенциал будет иметь вид

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{4\pi} + \frac{e_1}{\varrho_1} + \frac{e_2}{\varrho_2} + \ldots}, \tag{10.130}$$

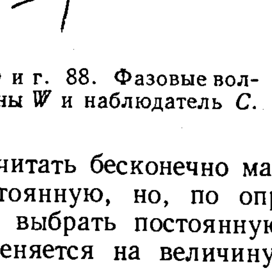
а e_1, e_2, ... будут зарядами, связанными с упомянутыми шарами. Если в I можно подходящим образом ввести метрику, то будем иметь набор заряженных тел, находящихся в равновесии при взаимодействии друг с другом. Интересно отметить, что вследствие неопределенности ε оказывается, что таким зарядам соответствуют два различных поля. Если переменить знаки у ε и у всех зарядов, то метрика при этом не изменится, тогда как у электрического поля переменится знак. Как отмечалось ранее, переход от электричества к магнетизму не представляет никакой трудности, и мы могли бы заменить (10.129) соответствующей формулой для системы магнитных диполей. Настоящая теория покоится на том факте, что для специальной конформно статической метрики (10.113) условие $R = 0$ приводит к тому, что U оказывается гармонической функцией относительно плоской метрики $d\sigma_0$.

Глава XI

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

§ 1. Кинематика волн в пространстве—времени

Рассмотрим ∞^1 трехмерных поверхностей в пространстве — времени (фиг. 88). Они могут быть пространственноподобными, изотропными или временноподобными. Мы понимаем под этим тот факт, что их нормали временноподобны, изотропны или пространственноподобны соответственно. Эти трехмерные поверхности мы будем называть *трехмерными волнами*, или, кратко, *волнами*. Каждой волне сопоставим *фазовый угол* φ, монотонно возрастающий при переходе от волны к волне, так что сами волны можно назвать *фазовыми волнами*. Те из них, для которых $\varphi = 2n\pi$, будут называться *гребнями*. Волны, изображенные на фиг. 88, можно считать гребнями.



Фиг. 88. Фазовые волны W и наблюдатель C.

Поскольку φ является функцией положения в пространстве — времени, можно записать

$$f(x) = -\frac{h}{2\pi}\varphi, \tag{11.1}$$

так что уравнения волн будут иметь вид $f(x) = \text{const}$; h — малая универсальная постоянная, которую с математической точки зрения мы будем считать бесконечно малой. Здесь можно было бы взять любую малую постоянную, но, по определенным соображениям, желательно в качестве h выбрать постоянную Планка. При переходе от гребня к гребню $f(x)$ меняется на величину

$$df = -h. \tag{11.2}$$

Пусть C — временноподобная мировая линия наблюдателя, 4-скорость которого равна V^i. Будем искать выражения для частоты волн и для их скорости, причем и то и другое — относительно C.

Положим

$$p_i = f_{,i}. \tag{11.3}$$

Переход вдоль C от одного гребня к другому соответствует смещению на dx^i, или, иначе говоря, на временной интервал ds на C. При этом в силу (11.2)

$$p_i\,dx^i = p_i V^i\,ds = -h \tag{11.4}$$

и, следовательно, период $\tau\,(=ds)$ и частота $\nu\,(=1/\tau)$ равны

$$\tau = -\frac{h}{p_i V^i}, \quad \nu = -\frac{p_i V^i}{h}. \tag{11.5}$$

Эти величины инвариантны, но их значения зависят от выбора C. Заметим, что

$$h\nu = -p_i V^i, \tag{11.6}$$

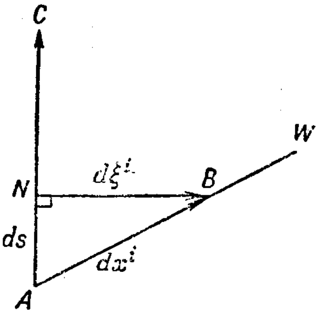
и, если ввести ортонормированный 4-репер $\lambda^i_{(a)}$, вектор $\lambda^i_{(4)}$ которого ориентирован по V^i, то

$$h\nu = -p_{(4)} = p^{(4)}. \tag{11.7}$$

Назовем p^i *4-вектором частоты* волн. В формуле (11.1) был взят знак «минус», чтобы получить $p^{(4)}$ в формуле (11.7) со знаком «плюс».

В формулах (11.5) выражение для ν может показаться бессмысленным: конечная величина делится на бесконечно малую. Но фактически мы имеем дело с волнами высокой частоты, так как это и есть обычное условие, при котором геометрическая оптика имеет физический смысл.

Следует, однако, заметить, что кинематика, изложенная в настоящем параграфе, не содержит чего-либо, присущего исключительно *оптике*. Все приведенные здесь рассуждения в равной степени применимы и к упругим, и к любым другим волнам высокой частоты.



Фиг. 89. Скорость волны W относительно наблюдателя C.

Мы рассмотрели вопрос о частоте в первую очередь ввиду его простоты. Однако в действительности более важным является вопрос о скорости, так как в этом случае рассматривается одна единичная волна, и вопрос о фазе отпадает. Пусть A (фиг. 89) будет точкой пересечения C с волной W. Представим себе фиктивную частицу, движущуюся вместе с волной, так что ее мировая линия лежит на W, которую мы определим с помощью уравнения $f(x) = \text{const}$, как это было сделано выше. Пусть AB (dx^i) — бесконечно малое смещение на мировой линии этой частицы; NB $(d\xi^i)$ ортогонален к C и $AN = ds$. Тогда естественно определить скорость u' фиктивной частицы относительно C с помощью соотношений

$$u' = \frac{NB}{AN}, \qquad u'^2 = \frac{d\xi_i d\xi^i}{ds^2}. \tag{11.8}$$

(Мы полагаем $dx_i = g_{ij}dx^j$ и $d\xi_i = g_{ij}d\xi^j$.)

По построению из фиг. 89 имеем (здесь, как и раньше, $p_i = f_{,i}$)

$$p_i dx^i = 0, \tag{11.9}$$

$$V^i d\xi^i = 0 \tag{11.10}$$

$$d\xi^i = dx^i - V^i ds. \tag{11.11}$$

Поскольку $V_i V^i = -1$, из (11.10) и (11.11) следует, что

$$ds = -V_i dx^i, \tag{11.12}$$

и, следовательно, (11.11) принимает вид

$$d\xi^i = dx^i + V^i V_j dx^j. \tag{11.13}$$

Таким образом,

$$d\xi_i d\xi^i = dx_i dx^i + (V_i dx^i)^2. \tag{11.14}$$

Это соотношение представляет собой теорему Пифагора, сформулированную с учетом неопределенного характера метрики. В силу (11.8), (11.12)

и (11.14) скорость фиктивной частицы определяется формулой

$$u'^2 = 1 + \frac{dx_i dx^i}{(V_j dx^j)^2}. \qquad (11.15)$$

Анализ вопроса о том, что подразумевается под скоростью волны в классической физике, наводит на мысль, что скорость волны (u) следует определить как *минимальное* значение u' для всех фиктивных частиц, движущихся вместе с волной. Таким образом, мы должны найти минимум выражения (11.15) при дополнительном условии (11.9). В результате получаем

$$dx^i = \alpha V^i + p^i, \qquad (11.16)$$

где α — множитель Лагранжа (перед p_i множитель опущен, поскольку в (11.15) dx^i входят только в виде отношений). С помощью (11.9) получаем

$$\alpha = -\frac{p_i p^i}{p_j V^j}, \qquad (11.17)$$

и из (11.16) следует

$$dx_i dx^i = \alpha (p_i V^i - \alpha), \quad V_i dx^i = p_i V^i - \alpha. \qquad (11.18)$$

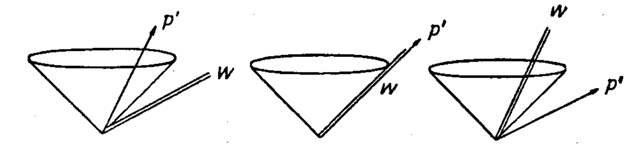
Тогда с помощью (11.15) мы получаем следующую формулу для *квадрата скорости волны* относительно C:

$$u^2 = \frac{p_j V^j}{p_i V^i - \alpha}. \qquad (11.19)$$

При рассмотрении волн *обратная скорость* u^{-1} имеет более фундаментальное значение, чем скорость u. Для квадрата этой величины имеем

$$\frac{1}{u^2} = 1 + \frac{p_i p^i}{(p_j V^j)^2}. \qquad (11.20)$$

Эта инвариантная формула содержит только 4-скорость наблюдателя и 4-вектор частоты. Но, как отмечалось выше, понятие *частоты* здесь



Фиг. 90. Волны W, векторы частот p^i и изотропный конус.

фактически не фигурирует: p^i можно заменить на любой вектор, ортогональный к волне.

Согласно формуле (11.20), обратная скорость больше или меньше единицы в зависимости от того, является ли p^i временноподобным или пространственноподобным. Таким образом, мы имеем следующую классификацию волн, иллюстрируемую фиг. 90:

Волна	Вектор частоты	Скорость
Пространственноподобная	Временноподобный ($p_i p^i < 0$)	$u > 1$
Изотропиая	Изотропный ($p_i p^i = 0$)	$u = 1$
Временноподобиая	Пространственноподобный ($p_i p^i > 0$)	$u < 1$

Попросту говоря, $u > 1$ означает «быстрее света», а $u < 1$ — «медленнее света», однако эти выражения следует употреблять с большой осторожностью, поскольку и сами рассматриваемые волны могут быть световыми волнами. Более правильно было бы проводить сравнение с изотропным конусом, который представляет основной тип ударной волны.

§ 2. Волны, лучи и фотоны в диспергирующей среде

Хотя излагаемая ниже теория имеет более широкие физические приложения, мы будем пользоваться терминологией оптики. По существу, это физическая копия (и вместе с тем интерпретация) гамильтоновой теории, изложенной в гл. I, § 7, и теории характеристических многообразий (см. гл. V, § 7), которая фактически является частью гамильтоновой теории.

Рассмотрим прозрачную среду, описываемую ее 4-скоростью V^i и определенными физическими свойствами (такими, как плотность), совокупность которых обозначим символом ϱ. Предположим, что пространство — время задано, так что g_{ij}, V^i и ϱ — заданные функции координат. В нашу задачу входит построение теории геометрической оптики в среде на основе разумных гипотез, вытекающих из рассмотрения классической теории.

В классической оптике мы описываем среду[1]), определяя показатель преломления n как функцию частоты, считая другие локальные свойства, совокупность которых была обозначена нами символом ϱ, заданными. В данном случае показатель преломления есть величина, обратная фазовой скорости, и, следовательно, за основу релятивистской геометрической оптики мы должны взять *уравнение среды*

$$n^2 = 1 + \frac{p_i p^i}{(p_j V^j)^2}, \tag{11.21}$$

где n — показатель преломления ($n = u^{-1}$), являющийся *заданной* функцией координат x^i и $p_k V^k$ ($-h\nu$, где ν — частота). Заметим, что V^i теперь означает 4-скорость среды, а не 4-скорость произвольного наблюдателя, как это имело место в § 1 настоящей главы, так что фазовая скорость и частота измеряются в сопутствующей системе, связанной со средой.

Чтобы использовать гамильтонов метод для написания уравнения среды, необходимо вместо p_i взять p^i. Представим это уравнение в виде

$$\omega(x, p) = 0, \tag{11.22}$$

где

$$\omega(x, p) = \frac{1}{2}[g^{ij} p_i p_j - (n^2 - 1)(p_i V^i)^2]. \tag{11.23}$$

Его можно написать также и в следующей форме:

$$\omega(x, p) = \frac{1}{2}\bar{g}^{ij} p_i p_j, \tag{11.24}$$

где

$$\bar{g}^{ij} = g^{ij} - (n^2 - 1) V^i V^j. \tag{11.25}$$

Легко видеть, что сопряженный ковариантный тензор $\bar{g}_{ij}$, определяемый соотношениями

$$\bar{g}_{ij}\bar{g}^{ik} = \delta_j^k, \tag{11.26}$$

[1]) Мы рассматриваем только изотропные среды. Релятивистское рассмотрение анизотропных сред было бы весьма сложным.

равен

$$\bar{g}_{ij} = g_{ij} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) V_i V_j. \qquad (11.27)$$

Могло бы показаться, что это приводит к пространству — времени с новым метрическим тензором, однако это не совсем верно, так как n зависит от p_i. В случае же *недиспергирующей* среды n есть функция только положения, и тогда $\bar{g}_{ij}$ действительно можно рассматривать как второй метрический тензор. Эти соображения будут использованы позднее.

Поскольку, согласно (11.3), $p_i = f_{,i}$, (11.22) представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка для фазовой функции $f(x)$. Как и в (5.153), характеристические кривые этого уравнения удовлетворяют соотношениям

$$\frac{dx^i}{dw} = \frac{\partial \omega}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dw} = -\frac{\partial \omega}{\partial x^i}, \qquad (11.28)$$

где w — некоторый параметр. Эти характеристические кривые являются *оптическими лучами*. Совокупность всех возможных лучей представляет собой решения этих обыкновенных дифференциальных уравнений, причем каждое решение определяется произвольной начальной точкой (x) и начальным вектором частоты (p), который с точностью до соотношения (11.22) является произвольным. Заметим, что (11.28) определяет не только луч, но и вектор частоты в каждой точке луча.

В силу (11.23)

$$\frac{\partial \omega}{\partial p_i} = p^i - (n^2 - 1)(p_j V^j) V^i - nn' (p_j V^j)^2 V^i, \qquad (11.29)$$

где n' — частная производная от n по $p_k V^k$. Таким образом, согласно (11.28), направление луча лежит на двумерной площадке, определяемой вектором частоты и 4-скоростью среды, как и следовало ожидать в случае изотропии. Направление луча в общем случае *не* совпадает с вектором частоты, но в вакууме это имеет место, так как здесь $n = 1$.

Если рассматривать какой-либо малый участок фазовой волны, то, как следует из построения, проведенного в гл. V, § 7, этот участок переносится вдоль лучей, причем фаза, вообще говоря, меняется, а соседние гребни будут различаться между собой на $p_i dx^i = -h$ (на «элемент действия»). Будем рассматривать этот движущийся участок как *сигнал* (передача информации или энергии). Тогда существенно, чтобы *лучи были временноподобными* (или *изотропными*), так как в противном случае нарушится принцип причинности. Математически это требование запишется так:

$$g_{ij} \frac{\partial \omega}{\partial p_i} \frac{\partial \omega}{\partial p_j} \leqslant 0. \qquad (11.30)$$

Независимо от того, является ли луч временноподобным, изотропным или пространственноподобным, мы можем определить *скорость луча* v (относительно среды), наблюдая за какой-нибудь точкой вдоль луча, как показано на фиг. 89 (где W представляет собой данный луч). Простое вычисление, основанное на соотношениях (11.10), (11.11) и (11.28), дает

$$v^2 = 1 + g_{ij} \frac{\partial \omega}{\partial p_i} \frac{\partial \omega}{\partial p_j} \left(V_k \frac{\partial \omega}{\partial p_k}\right)^{-2}, \qquad (11.31)$$

так что неравенство (11.30) эквивалентно неравенству $v \leqslant 1$. После подстановки сюда ω из формулы (11.23) прямое вычисление приводит к следующим соотношениям:

$$g_{ij} \frac{\partial \omega}{\partial p_i} \frac{\partial \omega}{\partial p_j} = n^2 (p_i V^i)^2 (1 - q^{-2}), \quad V_i \frac{\partial \omega}{\partial p_i} = n (p_i V^i) q^{-1}, \qquad (11.32)$$

где q определяется формулой

$$q = n + n' p_i V^i = n + \nu \frac{\partial n}{\partial \nu} = \frac{\partial}{\partial \nu}(n\nu). \qquad (11.33)$$

В результате подстановки выражения (11.32) в формулу (11.31) получаем $v = q$. Существенными являются то обстоятельство, что формула (11.33) представляет собой обычное определение *групповой скорости*[1]), и тот факт, что мы установили тождественность этого определения с определением лучевой скорости, сформулированным в терминах характеристических кривых уравнения Гамильтона — Якоби, которое получается, если в уравнение $\omega(x, p) = 0$ вместо p_i подставить $f_{,i}$. Таким образом, (11.30) представляет собой обычное физическое требование, заключающееся в том, чтобы *групповая скорость не превышала фундаментальную скорость* (скорость света в вакууме).

Если в (11.30) имеет место знак равенства, то луч изотропен. В случае неравенства луч временноподобен, и его единичный 4-вектор определяет *4-скорость луча.*

Система лучей, связанная с фазовыми волнами, образует когерентную систему (в том смысле, в каком это понималось в гл. I, § 7), так что для любого сводимого замкнутого контура в пространстве — времени

$$\oint p_i\, dx^i = 0. \qquad (11.34)$$

В случае такой системы можно представить себе пространственно-временную картину фазовых волн, векторов частоты (нормальных к волнам) и лучей (по соображениям причинности, временноподобных или изотропных, но, в общем, не ортогональных к волнам).

Каково место *фотона*[2]) в этой картине? Принимая во внимание соотношение (11.6), кажется естественным считать p^i 4-импульсом фотона, связанным с системой волн, а луч рассматривать как историю фотона. В случае фотона, движущегося в вакууме, ранее было сделано несколько естественных предположений:

1) его мировая линия — изотропная геодезическая;

2) его 4-импульс есть касательная к этой мировой линии и претерпевает вдоль нее параллельный перенос.

Как отмечалось выше, для фотона в прозрачной среде ни одно из этих условий не выполняется. В случае недиспергирующей среды 4-импульс пространственноподобен, что имеет место также и в случае среды с малой дисперсией. Тем не менее рассмотрение фотона в среде можно свести к рассмотрению его в вакууме, так как в этом случае выражения (11.22) и (11.23) приводятся к следующему виду:

$$\omega(x, p) = \frac{1}{2} g^{ij} p_i p_j = 0, \qquad (11.35)$$

и для уравнений лучей (11.28) будем иметь

$$\frac{dx^i}{dw} = p^i, \quad \frac{dp_i}{dw} = -\frac{1}{2} g^{jk}_{\ ,i}\, p_j p_k. \qquad (11.36)$$

Как и в (5.156), эти уравнения определяют свойства фотона в вакууме, описанные выше.

---

[1]) См. работы Синга [1173, 1176] и § 4 настоящей главы. Обсуждение вопроса о фазовой скорости, групповой скорости и скорости сигнала можно найти в работе Бриллюэна [90].

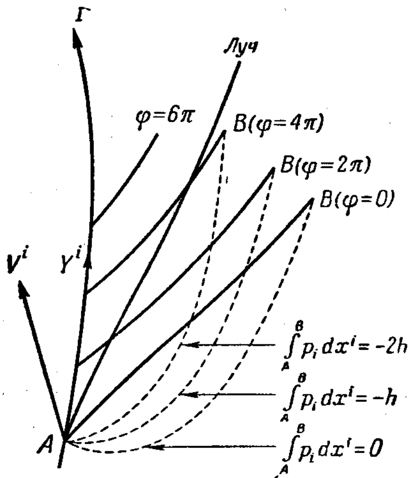
[2]) Ради придания физического смысла изотропным геодезическим внутри среды, в гл. III, § 3 слово «фотон» означало фотон очень высокой энергии. Это ограничение, разумеется, здесь снимается.

Для иллюстрации изложенной теории волн и лучей рассмотрим излучение частицы, движущейся в прозрачной среде. Пусть Г (фиг. 91) — мировая линия частицы с 4-скоростью Y^i и пусть ν_0— частота излучения относительно самой частицы (не обязательно постоянная). Тогда в произвольной точке A на Г в силу (11.6) и (11.22) мы имеем

$$p_i Y^i = -h\nu_0, \qquad \omega(x, p) = 0. \tag{11.37}$$

Здесь во второе уравнение входит 4-скорость среды V^i.

Хотя на вектор p_i в точке A наложено ограничение в виде этих двух уравнений, все же он имеет две степени свободы. Каждому выбору p_i соответствует луч и набор векторов p_i вдоль него, получаемых с помощью (11.28). Множество ∞^2 лучей, исходящих из точки A, образует конус[1]), изображенный на фиг. 91 одним лучом. При движении A вдоль Г мы получим ∞^1 таких конусов и, таким образом, заполним все пространство лучами и полем векторов $p_i(x)$. Теперь легко получить фазовые волны, используя метод, изложенный в гл. I, § 7. Если в точке A находится гребень ($\varphi = 0$), волну нулевой фазы можно получить, находя все точки B, удовлетворяющие условию



Фиг. 91. Излучение частицы.

$$\int_A^B p_i\, dx^i = 0. \tag{11.38}$$

В силу (11.34) оказывается, что интеграл в (11.38) не зависит от пути интегрирования (на фиг. 91 пунктирными линиями изображены пути интегрирования, а сплошными — фазовые волны). Тогда уравнение n-го гребня имеет вид

$$\int_A^B p_i\, dx^i = -nh. \tag{11.39}$$

§ 3. Вариационные принципы в геометрической оптике

В классической геометрической оптике и в классической динамике исходят из некоторых основных уравнений, а остальные выводят из них. Когда последовательная теория построена, то оказывается, что выбор отправной точки логического развития является в значительной степени делом вкуса, ибо одна и та же структура могла бы быть получена на различной основе. Но во избежание недоразумений необходимо выбрать *некоторую* основу и не менять ее в ходе рассуждений.

Гамильтон строит геометрическую оптику, основываясь на принципе Ферма, а при построении динамики он исходил из ньютоновских уравнений движения. Это было наиболее целесообразно с физической точки зрения. К настоящему времени выявилась сильная тенденция уделять большое

[1]) В случае черенковского излучения Г лежит вне конуса, образованного лучами.

внимание вариационным принципам. Это наводит на мысль, что нам следует основывать релятивистскую геометрическую оптику на принципе Ферма. Однако в теории, включающей в рассмотрение дисперсию, нет простой и удобной формы этого принципа. По-видимому, лучше всего начать с рассмотрения *волн*, а не *лучей*. Как мы видели, фазовая функция удовлетворяет некоторому дифференциальному уравнению в частных производных вида $\omega(x, p) = 0$. Мы определим лучи, как характеристики этого уравнения. Впоследствии мы продолжим построение теории на этой основе, а сейчас выведем эквивалентные вариационные принципы, которые, если угодно, могут быть положены в основу геометрической оптики.

Рассмотрим следующий вариационный принцип:

Принцип А:

$$\delta \int p_i\, dx^i = 0, \qquad \omega(x, p) = 0. \tag{11.40}$$

Здесь рассматриваются кривые, соединяющие пару фиксированных точек, вдоль каждой из которых p_i произволен с точностью до дополнительного условия $\omega(x, p)$. Как и в гл. I, § 7, принцип А эквивалентен дифференциальным уравнениям

$$\frac{dx^i}{dw} = \frac{\partial\omega}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dw} = -\frac{\partial\omega}{\partial x^i}, \tag{11.41}$$

где w — канонический параметр. Поскольку уравнения (11.41) в точности совпадают с уравнениями лучей (11.28), ясно, что оптические лучи удовлетворяют принципу А и могут быть найдены, исходя из него. Если бы мы следовали этому пути, то связанные с данными лучами волны можно было бы определить с помощью метода, изложенного в гл. I, § 7.

Прежде чем перейти ко второму вариационному принципу, проведем несколько формальное исследование, считая, что $\omega(x, p)$ — любая функция, для которой

$$\det \frac{\partial^2\omega}{\partial p_i\, \partial p_j} \neq 0. \tag{11.42}$$

Необходимо ясно представлять себе, что мы имеем дело с *функцией* ω, а не с *уравнением* $\omega = 0$.

Положим

$$z^i = \frac{d\omega}{dp_i} \tag{11.43}$$

и

$$L = p_j \frac{\partial\omega}{\partial p_j} - \omega. \tag{11.44}$$

Имея в виду (11.42), можно решить уравнение (11.43) относительно компонент вектора p_i, получая при этом $p_i = p_i(x, z)$. Подставляя полученное в (11.44), имеем $L = L(x, z)$. Будем искать выражения для частных производных L[1]).

Величины (x, p) могут произвольно меняться; тогда вариации по z получаются из (11.43). Таким образом, соотношение

$$\frac{\partial L}{\partial x^i}\delta x^i + \frac{\partial L}{\partial z^i}\delta z^i = p_j \frac{\partial^2\omega}{\partial p_j \partial x^i}\delta x^i + p_j \frac{d^2\omega}{dp_j dp_i}\delta p_i - \frac{\partial\omega}{\partial x^i}\delta x^i \tag{11.45}$$

---

[1]) Мы собираемся привести рассуждения, аналогичные тем, с которыми мы сталкивались в классической динамике в процессе перехода от гамильтонова формализма к лагранжеву. Желательно остановиться на этих рассуждениях подробнее, поскольку при классическом рассмотрении фигурирует абсолютный параметр t, здесь отсутствующий.

превращается в дифференциальное тождество, если сюда подставить

$$\delta z^i = \frac{\partial^2\omega}{\partial p_i\,\partial x^k}\,\delta x^k + \frac{\partial^2\omega}{\partial p_i\,\partial p_k}\,\delta p_k. \tag{11.46}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} + \frac{\partial L}{\partial z^j}\,\frac{\partial^2\omega}{\partial p_j\,\partial x^i} = p_j\,\frac{\partial^2\omega}{\partial p_j\,\partial x^i} - \frac{\partial\omega}{\partial x^i}\,, \tag{11.47}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial z^j} - p_j\right)\frac{\partial^2\omega}{\partial p_j\,\partial p_i} = 0. \tag{11.48}$$

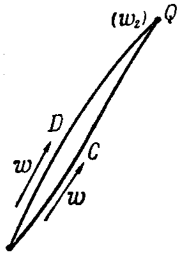
Из (11.48) и (11.42) получаем

$$\frac{\partial L}{dz^i} = p_i, \tag{11.49}$$

и тогда из соотношения (11.47) имеем

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = -\frac{\partial\omega}{\partial x^i}\,. \tag{11.50}$$

Изложенное выше есть формальная процедура, с помощью которой, исходя из произвольной функции $\omega(x, p)$, удовлетворяющей (11.42), мы построим функцию $L(x, z)$ и ее частные производные.



Фиг. 92. Вариационный принцип Б.

Перейдем теперь к оптике. На фиг. 92 C есть путь, соединяющий точки P и Q так, что удовлетворяются уравнения (11.41); при этом параметр w пробегает значения от w_1 до w_2. Луч C принадлежит семейству кривых, соединяющих P и Q; пусть D является некоторой произвольной кривой этого семейства.

В первую очередь нужно произвольным образом ввести параметр w на кривой D, но так, чтобы он принимал на концах значения w_1, w_2. Теперь, если мы запишем $x^{i\prime} = dx^i/dw$, то получим векторное поле $x^{i\prime}$, заданное на C и на D. На C в силу (11.41)

$$x^{i\prime} = \frac{\partial\omega}{\partial p_i}\,. \tag{11.51}$$

Для нашего метода характерно то, что это же уравнение используется для определения векторного поля p_i *и на линии* D. Но это уравнение в точности совпадает с уравнением (11.43), где вместо z^i фигурирует x^i, и, таким образом, мы строим на C и на D функцию $L(x, x')$, частные производные которой имеют вид

$$\frac{\partial L}{\partial x^{i\prime}} = p_i, \qquad \frac{\partial L}{\partial x^i} = -\frac{\partial\omega}{\partial x^i}\,. \tag{11.52}$$

Тогда интеграл $\int L(x, x')\,dw$ на C и на D приобретает смысл. На кривой C в силу (11.41)

$$\frac{d}{dw}\,\frac{\partial L}{\partial x^{i\prime}} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{dp_i}{dw} + \frac{\partial\omega}{dx^i} = 0. \tag{11.53}$$

Но это — хорошо известные уравнения Эйлера — Лагранжа для вариационного принципа.

Принцип Б:

$$\delta\int L(x, x')\,dw = 0 \tag{11.54}$$

для фиксированных конечных точек и фиксированной области изменения w. Поэтому оптические лучи удовлетворяют как принципу А, так и принципу Б.

Обычно отдают предпочтение вариационному принципу в форме Б. Его преимущество состоит в отсутствии какого бы то ни было дополнительного условия. Однако в геометрической оптике диспергирующей среды следует отдать предпочтение принципу А, потому что функция $\omega(x, p)$ рассматривается как заданная, тогда как для нахождения L мы должны решить (11.43) относительно p_i, что практически может оказаться весьма сложным.

Исследуем уравнения (11.43) с ω, данным в виде выражения (11.23). Нам нужно решить [ср. с (11.25) и (11.29)] относительно p четыре уравнения[1])

$$z^i = \frac{\partial\omega}{\partial p_i} = \bar{g}^{ij} p_j - nn' (p_k V^k)^2 V^i. \tag{11.55}$$

Отсюда, используя обозначения (11.27), получаем

$$p_i = \bar{g}_{ij} [z^j + nn' (p_k V^k)^2 V^j]; \tag{11.56}$$

таким образом,

$$\begin{gathered} p_i z^i = \bar{g}_{ij} z^i z^j + nn' (p_k V^k)^2 \bar{g}_{ij} z^i V^j, \\ \omega = \frac{1}{2} \bar{g}^{ij} p_i p_j = \frac{1}{2} \bar{g}_{ij} z^i z^j + nn' (p_k V^k)^2 \bar{g}_{ij} z^i V^j - \frac{1}{2} n'^2 (p_k V^k)^4. \end{gathered} \tag{11.57}$$

В формуле (11.57) мы сократим последний член с учетом того, что

$$\bar{g}_{ij} = g_{ij} + (1 - n^{-2}) V_i V_j, \tag{11.58}$$

следовательно,

$$\bar{g}_{ij} V^i V^j = -n^{-2}. \tag{11.59}$$

В силу (11.57) имеем

$$L(x, z) = p_i z^i - \omega = \frac{1}{2} \bar{g}_{ij} z^i z^j + \frac{1}{2} n'^2 (p_k V^k)^4. \tag{11.60}$$

Но мы еще не выразили L, как это требуется, через (x, z), поскольку компоненты p присутствуют как явно, так и неявно в $\bar{g}_{ij}$ и n'. Чтобы исключить их, учтем, что

$$\bar{g}_{ij} V^i z^j = n^{-2} V_i z^i. \tag{11.61}$$

Тогда после умножения выражения (11.56) на V^i получаем

$$nn' (p_i V^i)^2 + n^2 p_i V^i = V_i z^i. \tag{11.62}$$

Поскольку n предполагается заданной функцией частоты, или, что эквивалентно, скаляра $p_i V^i$, выражение (11.62) можно рассматривать как уравнение для определения $p_i V^i$ в виде функции от $V_i z^i$. Таким образом, мы можем положить

$$p_i V^i = \psi(V_i z^i). \tag{11.63}$$

Подставляя это выражение в (11.60) и считая, что подстановка произведена и в $\bar{g}_{ij}$ и n', мы получаем $L(x, z)$ как функцию (x, z)[2]).

---

[1]) Нельзя путать смысл знака «штрих» у n и у x^i.

[2]) Можно проверить, что функция $L(x, z)$, полученная таким путем, удовлетворяет уравнению (11.49).

Так как практически дисперсия обычно мала, естественно искать приближение, основанное на малости n'. Однако такого рода приближение приводит к весьма сложным выражениям, и мы этого вопроса здесь касаться не будем. Чтобы в каком-либо конкретном случае найти лучи, нет необходимости пользоваться вариационным принципом, а следует решать уравнения (11.41) для лучей. Но если уж мы оказываемся не в состоянии выполнить приближение с учетом малости n', мы можем положить $n'=0$ (так что n становится функцией положения в пространстве — времени). Именно так обстоит дело в случае *недиспергирующей* среды, и теория для нее принимает простой и удобный вид.

Для недиспергирующей среды вместо (11.60) получаем $L(x, z)$ в следующей форме:

$$L(x, z)=\frac{1}{2}\bar{g}_{ij}z^i z^j, \qquad (11.64)$$

где $\bar{g}_{ij}$ определяется формулой (11.58). В силу (11.57) мы видим, что $\omega=L$, и, таким образом, необходимо, чтобы на луче было $L=0$. Если z заменить на x', принцип Б дает

$$\delta\int\bar{g}_{ij}x^{i\prime}x^{j\prime}\,dw=0. \qquad (11.65)$$

Однако из всех возможных экстремалей следует взять только те, для которых

$$\bar{g}_{ij}x^{i\prime}x^{j\prime}=0. \qquad (11.66)$$

Таким образом, мы приходим к замечательному результату (Балац [13], Фам Мау Кан [918]): *в среде без дисперсии лучи являются изотропными геодезическими относительно модифицированного метрического тензора*

$$\bar{g}_{ij}=g_{ij}+\left(1-\frac{1}{n^2}\right)V_iV_j, \qquad (11.67)$$

где n — показатель преломления, а V^i — 4-скорость среды.

Перейдем теперь к рассмотрению третьего вариационного принципа, который неприменим, если $\omega(x, p)$ — однородная функция по p (как это имеет место в случае недиспергирующей среды). Ввиду этого предполагаем, что среда является диспергирующей. Начнем с формального вычисления, которое, исходя из данного уравнения среды

$$\omega(x, p)=0, \qquad (11.68)$$

приводит к рассмотрению некоторой функции $F(x, z)$, зависящей от x^i и четырех других переменных z^i. Запишем уравнение

$$z^i=\theta\frac{\partial\omega}{\partial p_i}. \qquad (11.69)$$

Решая его относительно p, имеем

$$p_i=p_i\left(x, \frac{z}{\theta}\right). \qquad (11.70)$$

Подставляя это в уравнение (11.68) и решая его относительно θ, получаем

$$\theta=\theta(x, z); \qquad (11.71)$$

необходимо, чтобы θ была однородной функцией первой степени относительно z^i. Подставим θ в формулу (11.70) и получим p_i как функцию

x^i и z^i, однородную и имеющую нулевую степень относительно z^i. Наконец, определим функцию $F(x, z)$ следующим образом[1]:

$$F(x, z) = p_i z^i. \tag{11.72}$$

Следует отметить (и это важно), что если мы придадим какие-нибудь значения x^i и z^i, то значения p^i, получающиеся из соотношений (11.69) и (11.71), с необходимостью удовлетворяют равенству (11.68).

Теперь возьмем какую-либо кривую $x^i = x^i(w)$ и обозначим $dx^i/dw = x^{i'}$. Если за определение p^i взять соотношение

$$\frac{\partial \omega}{\partial p_i} = \frac{x^{i'}}{\theta(x, x')}, \tag{11.73}$$

то уравнение (11.68) при этом заведомо удовлетворяется, и из (11.72) следует, что

$$\int F(x, x')\, dw = \int p_i\, dx^i. \tag{11.74}$$

Тогда принцип А в форме (11.40) приводит к следующему принципу.

Принцип В:

$$\delta \int F(x, x')\, dw = 0, \tag{11.75}$$

причем здесь вариация производится с закрепленными конечными точками и без всяких дополнительных условий.

Отметим различие между принципами Б и В:

1) принцип Б применим к недиспергирующим средам, тогда как В не применим;

2) в принципе Б параметр имеет фиксированные значения на концах, тогда как в В он произволен ввиду однородности F.

Классический принцип Ферма имеет вид

$$\delta \int n\, d\sigma = 0, \tag{11.76}$$

где $d\sigma$ — элемент длины в трехмерном евклидовом пространстве. Мы можем выбрать в (11.75) $w = s$, и тогда получим

$$\delta \int F ds = 0, \tag{11.77}$$

что по форме сходно с (11.76). Но здесь нет глубокой аналогии, потому что $d\sigma$ и ds имеют совершенно разный смысл, а F не является показателем преломления. Подлинный аналог принципа Ферма дан в следующем параграфе.

§ 4. Геометрическая оптика в статической вселенной

Рассмотрим статическую вселенную с метрикой вида

$$\Phi = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta + g_{44}\,(dx^4)^2, \tag{11.78}$$

---

[1] Отсюда ясно, что этот метод становится непригодным, если ω — однородная функция p^i, поскольку при $\omega = 0$ имеем $F = 0$. Хотя вообще вариационный принцип В [см. (11.75)] и не подходит для недиспергирующих сред, его в измененной форме можно применять для любой среды в статическом случае [см. (11.102)]. Несколько более детальные вычисления для диспергирующей среды см. у Синга [1176].

где все g_{ij} не зависят от x^4. Пусть в этой вселенной мы имеем прозрачную среду [1]), мировые линии которой совпадают с координатными линиями x^4, и, следовательно, ее 4-скорость V^i удовлетворяет условиям

$$V^\alpha = 0, \quad g_{44}(V^4)^2 = -1, \quad V^4 = \sqrt{-g^{44}}. \tag{11.79}$$

Показатель преломления n является функцией частоты ν и положения x^α, но не зависит от x^4.

Из предшествующей общей теории мы возьмем уравнение среды

$$\omega(x, p) = 0, \tag{11.80}$$

где

$$\omega(x, p) = \frac{1}{2}\left[g^{ij}p_i p_j - (n^2 - 1)(p_i V^i)^2\right] \tag{11.81}$$

и уравнения лучей

$$\frac{dx^i}{dw} = \frac{\partial\omega}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dw} = -\frac{\partial\omega}{\partial x^i}. \tag{11.82}$$

Важным свойством в статическом случае является то, что ω не зависит от x^4, и из уравнений лучей следует, что

$$p_4 = \text{const} \tag{11.83}$$

вдоль каждого луча. Тогда

$$h\nu = -p_i V^i = -p_4 V^4 = -p_4 \sqrt{-g^{44}}. \tag{11.84}$$

и, следовательно, мы знаем, как изменяется частота при движении вдоль луча: она пропорциональна V^4 [т. е. $(-g^{44})^{1/2}$, или $(-g_{44})^{-1/2}$]. Таким образом, мы снова приходим к формуле смещения спектральных линий (7.233).

С помощью соотношений (11.79) приведем выражение (11.81) к следующему виду:

$$\omega(x, p) = \frac{1}{2}\left(g^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta - n^2\chi^2\right), \tag{11.85}$$

где мы приняли обозначения

$$\chi = p_4 V^4 = -h\nu. \tag{11.86}$$

Для данной среды n является функцией χ и x^α, и, следовательно, слагаемое $n^2\chi^2$ в (11.85) — заданная функция этих величин. Имеем

$$\frac{\partial\chi}{\partial p_\alpha} = 0, \quad \frac{\partial\chi}{\partial p_4} = V^4 = \sqrt{-g^{44}}, \quad \frac{\partial\chi}{\partial x^\alpha} = p_4\left(\sqrt{-g^{44}}\right)_{,\alpha}. \tag{11.87}$$

Теперь запишем уравнения лучей (11.82) подробно.

$$\begin{gathered} \frac{dx^\alpha}{dw} = g^{\alpha\beta}p_\beta, \quad \frac{dx^4}{dw} = -n\chi\frac{\partial}{\partial\chi}(n\chi)\cdot\sqrt{-g^{44}}, \\ \frac{dp_\alpha}{dw} = -\frac{1}{2}g^{\beta\gamma}_{,\alpha}p_\beta p_\gamma + n\chi\frac{\partial}{\partial\chi}(n\chi)\cdot p_4\left(\sqrt{-g^{44}}\right)_{,\alpha}, \end{gathered} \tag{11.88}$$

причем $p_4 = \text{const}$. Скорость v луча относительно среды определяется формулой

$$v^2 = \frac{g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta}{-g_{44}(dx^4)^2}, \tag{11.89}$$

[1]) В гл. VII, § 9 мы рассматривали вакуум.

где dx^i — смещение вдоль луча. Из уравнений (11.88), используя (11.80) и (11.85), получаем

$$g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{dw}\frac{dx^\beta}{dw}=g^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta=n^2\chi^2, \qquad (11.90)$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{v^2}=\left[\frac{\partial}{\partial\chi}(n\chi)\right]^2. \qquad (11.91)$$

Таким образом, имеем

$$\frac{1}{v}=\left|\frac{\partial}{\partial\chi}(n\chi)\right|=\left|\frac{\partial}{\partial\nu}(n\nu)\right|=\left|\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{\nu}{u}\right)\right|, \qquad (11.92)$$

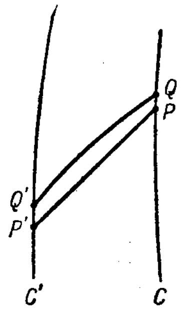
где $u(=n^{-1})$ — скорость волны. Ясно, что это выражение в точности совпадает с классической формулой для обратной величины соответствующей групповой скорости[1]).

Если среда — недиспергирующая, то уравнения лучей несколько упрощаются, поскольку $\partial n/\partial\chi=0$. Вследствие выражения (11.65) лучи можно рассматривать как изотропные геодезические относительно измененного метрического тензора

$$\bar{g}_{ij}=g_{ij}+\left(1-\frac{1}{n^2}\right)V_iV_j, \qquad (11.93)$$

который в данном случае имеет вид

$$\bar{g}_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta},\quad \bar{g}_{\alpha4}=0,\quad \bar{g}_{44}=n^{-2}g_{44}. \qquad (11.94)$$



Фиг. 93. Вариационный принцип А в статическом случае.

Что касается вариационных принципов в статическом случае, то для среды, вообще говоря, диспергирующей, простейшим является принцип А в форме (11.40), который можно преобразовать так, чтобы временна́я координата x^4 не входила в рассмотрение. На фиг. 93 изображены две x^4-линии C' и C и луч $P'P$, соединяющий их. Сравним этот луч с соседней кривой $Q'Q$, соединяющей линии C' и C, и, вообще говоря, имеющей другие конечные точки. Мы уже видели, что p_4 — величина постоянная вдоль $P'P$. Теперь будем считать, что p_4 имеет то же самое значение и на $Q'Q$, а значения остальных компонент p_α выберем так, чтобы удовлетворить условию $\omega(x, p)=0$, которое, повторяем, не содержит x^4. Переходя от $P'P$ к $Q'Q$, имеем

$$\begin{aligned}\delta\int p_\alpha dx^\alpha &= \int(\delta p_\alpha dx^\alpha+p_\alpha\delta\, dx^\alpha)=\\ &=\int(\delta p_\alpha dx^\alpha-\delta x^\alpha dp_\alpha)=\\ &=\int\left(\frac{\partial\omega}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha+\frac{\partial\omega}{\partial x^\alpha}\delta x^\alpha\right)dw=\\ &=\int\left(\delta\omega-\frac{\partial\omega}{\partial p_4}\delta p_4-\frac{\partial\omega}{\partial x^4}\delta x^4\right)dw. \qquad (11.95)\end{aligned}$$

---

[1]) Тождественность групповой и лучевой скоростей уже установлена более общим методом в § 2 настоящей главы.

Но $\delta\omega=0$, $\delta p_4=0$, $\partial\omega/\partial x^4=0$, и, таким образом, получаем вариационный принцип

$$\delta\int p_\alpha\,dx^\alpha=0,\quad \omega(x,\,p)=0, \tag{11.96}$$

причем p_4, как установлено выше, не варьируется, а конечные точки могут скользить вдоль x^4-линии. Это чисто статический принцип.

Можно рассматривать (11.96) как принцип А, выраженный через переменные x^α и p_α; x^4 здесь вообще отсутствует, а p_4 следует считать просто фиксированной величиной. Тогда с помощью математического метода, применявшегося ранее, но уже для меньшего числа измерений, можно вывести статические принципы Б и В.

Получим статический принцип В. Как и в случае (11.69), мы должны при ω, определенной формулой (11.85), решить уравнения

$$z^\alpha=\theta\,\frac{\partial\omega}{\partial p_\alpha}=\theta g^{\alpha\beta}p_\beta, \tag{11.97}$$

что дает для p_α выражение

$$p_\alpha=g_{\alpha\beta}\,\frac{z^\beta}{\theta}. \tag{11.98}$$

Подставив его в условие $\omega=0$, получаем

$$\theta^2=\frac{g_{\alpha\beta}z^\alpha z^\beta}{n^2\chi^2}. \tag{11.99}$$

Тогда из (11.72) следует

$$F(x,\;z)=p_\alpha z^\alpha=\frac{g_{\alpha\beta}z^\alpha z^\beta}{\theta}=n\chi\sqrt{g_{\alpha\beta}z^\alpha z^\beta}. \tag{11.100}$$

Мы должны использовать эту функцию в принципе В [см. (11.75)] Тогда

$$\chi=p_4V^4=p_4\sqrt{-g^{44}}, \tag{11.101}$$

и, так как p_4 — величина постоянная, ее можно опустить при варьировании. Таким образом, мы приходим к вариационному принципу (типа принципа Ферма) [1])

$$\delta\int n\sqrt{-g^{44}g_{\alpha\beta}x^{\alpha\prime}x^{\beta\prime}}\,dw=0, \tag{11.102}$$

причем конечные точки закреплены, а параметр w — произволен.

Выберем параметр w равным пространственному расстоянию σ, так что

$$d\sigma^2=g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta; \tag{11.103}$$

тогда принцип (11.102) примет вид

$$\delta\int n\sqrt{-g^{44}}\,d\sigma=0, \tag{11.104}$$

который сильно напоминает принцип Ферма в классической форме (11.76), если ввести в показатель n появившийся здесь дополнительный множитель.

В изложенной выше теории не имеет значения дисперсия среды, поскольку, задав p_4, мы тем самым ограничиваем рассмотрение только системами с одной частотой, но если желательно получить принцип стационар-

[1]) Для простоты мы ограничились статическим случаем, но в том же плане можно рассмотреть стационарный случай, когда $g_{\alpha 4}\neq 0$ и все величины не зависят от x^4. О принципе Ферма в стационарном случае см. Леви-Чивита [636, 638], Синг [1151].

ного времени, мы вынуждены рассматривать недиспергирующую среду. Тогда из (11.92) следует, что лучевая скорость v равна волновой скорости $u = n^{-1}$, так что

$$v = \frac{d\sigma}{\sqrt{-g_{44}}\, dx^4} = n^{-1}, \qquad n\sqrt{-g^{44}}\, d\sigma = dx^4 \tag{11.105}$$

и из выражения (11.104) получаем *принцип стационарного времени*:

$$\delta \int dx^4 = 0. \tag{11.106}$$

§ 5. Астрономические наблюдения

До настоящего времени теория Ньютона с большим успехом применяется в небесной механике, но в ней есть два уязвимых пункта. Во-первых, хотя небесная механика не связана с оптическими понятиями, сами астрономические наблюдения являются оптическими, а оптике нет места в ньютоновской схеме. Когда астроном спрашивает себя не о том, каковы *сами* явления, а каким образом он может *увидеть* их, он вынужден вводить в рассуждения различного рода «эфиры» для разных проблем. Во-вторых, мгновенное распространение тяготения — идея, противоречащая духу современной физики, а конечная скорость распространения его также не совместима с ньютоновской теорией гравитации. Однако сомнительно, чтобы какой-нибудь современный астроном стал защищать утверждение, что теория Ньютона дает точное описание природы; он рассматривает ее скорее как удачный компромисс, избавленный от открытого конфликта с действительностью благодаря тому, что сильные гравитационные поля постоянны, а переменные — весьма слабы, и относительные скорости небесных тел, в частности планет, невелики[1]).

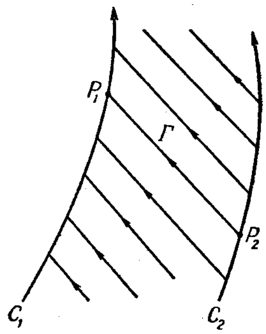
По сравнению с теорией Ньютона теория относительности громоздка и не дает ясной картины проблем небесной механики. Но при всей своей громоздкости она является более последовательной. Теория относительности пока не приведена в порядок, но указанных выше уязвимых пунктов в ней нет; по крайней мере, мы надеемся, что их нет. Мы не можем вычислить тензор Римана во всей солнечной системе, но, предполагая его известным, можно рассматривать небесную механику на основе гипотез о геодезических. Более того, здесь нет никаких затруднений, связанных с «эфирами»; задача астрономических наблюдений является задачей геометрии изотропных геодезических.

Проиллюстрируем это конкретным примером. Если орбиты Марса и Земли заданы, то астрономические наблюдения должны предсказать, как земному наблюдателю следует направлять свой телескоп, чтобы Марс был в его перекрестии, и каким образом спектральные линии, излучаемые Марсом, будут смещаться при его движении. Но теперь мы можем сразу перейти к общей задаче астрономического наблюдения, рассматривая источник и наблюдателя, мировые линии которых не обязательно геодезические. Тогда все определится геометрией двумерной полосы в пространстве — времени (фиг. 94), образованной изотропными геодезическими Г и ограниченной двумя временноподобными мировыми линиями: C_1 (наблюдатель) и C_2 (источник).

Все это кажется простым, но вычисления неизбежно усложняются, и поэтому важно контролировать их, исходя из некоторых общих соображе-

[1]) Необходимость более тесной связи между практической астрономией и теорией относительности была подчеркнута в лекциях, читанных в Милане в 1959 г.; там же были приведены некоторые последующие формулы (Синг [1188]).

ний. Для этого мы будем пользоваться мировой функцией Ω (см. гл. II), хотя вместо нее можно было бы использовать уравнения геодезического отклонения (1.130). Следует помнить, что смысл Ω очень прост — это квадрат геодезического «расстояния» (с точностью до множителя $\pm^1/_2$) между двумя точками, рассматриваемый как функция их восьми координат.



Фиг. 94. К проблеме астрономического наблюдения.

Для соответствия с действительностью мы должны были бы поместить наблюдателя, а возможно—и источник, в преломляющую среду. Но это слишком усложнило бы задачу. Поэтому мы предположим, что всюду условия такие же, как и в пустоте, так что фотон, идущий от источника к наблюдателю, обладает следующими основными свойствами: 1) его мировая линия есть изотропная геодезическая 2) 4-импульс p^i фотона касателен к его мировой линии и параллельно переносится вдоль нее.

Астроном определяет направление с помощью телескопа, а частоту с помощью спектрометра. Эти наблюдения эквивалентны измерению p^i фотона. Для уяснения этого мы отсылаем читателя к гл. III, § 6, где обсуждалось определение направления. Если $\lambda^i_{(a)}$ — ортонормированный 4-репер на линии C_1, так что $\lambda^i_{(4)}$ — касательная к ней, то компонентами импульса фотона являются

$$p^{(\alpha)} = p_{(\alpha)} = p_i\lambda^i_{(\alpha)}, \tag{11.107}$$

и их отношения будут отношениями угловых коэффициентов телескопа, принимающего этот фотон. Далее,

$$h\nu = p^{(4)} = -p_{(4)} = -p_i\lambda^i_{(4)} \tag{11.108}$$

есть энергия фотона, так что измерение частоты ν дает величину $p^{(4)}$. Ввиду изотропности p^i имеем

$$p^{(\alpha)}p^{(\alpha)} = (p^{(4)})^2. \tag{11.109}$$

Таким образом, хотя астроном измеряет только *три* величины (два угла и частоту), он определяет все *четыре* величины $p^{(a)}$, а следовательно, и p^i (в некоторой выбранной системе координат), поскольку [1])

$$p^i = p^{(a)}\lambda^i_{(a)}. \tag{11.110}$$

Тогда, имея в виду, что p^i — наблюдаемые величины, рассмотрим наблюдателя, мировой линией которого является C_1 (см. фиг. 94). Вся оптическая информация, поступающая к нему в точке P_1, приходит от событий, лежащих на изотропном конусе с осью P_1, направленной в прошлое[2]). Пусть C_2— мировая линия источника, излучающего фотоны частоты ν_0 относительно C_2. Будем считать эту частоту постоянной, что соответствует излучению некоторой определенной спектральной линии.

Траектории всех фотонов, идущих от источника к наблюдателю, образуют двумерную поверхность, составленную из изотропных геодезических.

---

[1]) Напоминаем, что индексы в скобках опускаются и поднимаются с помощью $\eta^{(ab)} = \eta_{(ab)} = \mathrm{diag}\,(1, 1, 1, -1)$.

[2]) Для земного наблюдателя около половины его изотропного конуса закрыто твердой Землей. Мы, естественно, интересуемся только той частью конуса, которая не закрыта.

Пусть v — параметр, который постоянен на каждой из них, причем $v = s$ (s — время наблюдателя на C_1). Запишем, что

$$V^{i_1} = \left(\frac{dx^i}{dv}\right)_{P_1}, \quad V^{i_2} = \left(\frac{dx^i}{\partial v}\right)_{P_2} \tag{11.111}$$

и обозначим соответствующие 4-скорости через A^{i_1} и A^{i_2}. Тогда

$$A^{i_1} = V^{i_1}, \quad A^{i_2} = \frac{V^{i_2}}{\sqrt{-V_{j_2}V^{j_2}}}. \tag{11.112}$$

Пусть p^i есть 4-импульс фотона, идущего от P_2 к P_1. Имеем[1])

$$h\nu_0 = -p_{i_2}A^{i_2}. \tag{11.113}$$

4-импульс фотона в точках P_1 и P_2 выражается через частные производные мировой функции Ω (P_1, P_2) следующим образом:

$$p_{i_1} = \chi\Omega_{i_1}, \quad p_{i_2} = -\chi\Omega_{i_2}, \tag{11.114}$$

где χ — величина, постоянная вдоль P_1P_2; в силу (11.113) она равна

$$\chi = \frac{h\nu_0}{\Omega_{i_2}A^{i_2}}, \tag{11.115}$$

и, таким образом, вследствие (11.114) имеет место формула

$$p_{i_1} = \frac{h\nu_0\Omega_{i_1}}{\Omega_{j_2}A^{j_2}}. \tag{11.116}$$

В этой формуле содержится полное описание оптических наблюдений рассматриваемого типа. Если известны мировая функция Ω, точки излучения и регистрации фотона и 4-скорость источника излучения, то формула (11.116) дает 4-импульс фотона в момент регистрации его наблюдателем.

Если для слабого гравитационного поля мы используем такие координаты, что [см. (7.240)]

$$g_{ij} = \eta_{ij} + \gamma_{ij}, \tag{11.117}$$

где γ_{ij} малы, то для частных производных Ω имеем формулы (7.250). Их можно подставить в формулу (11.116), чтобы решить задачу астрономического наблюдения. Для статического поля, в частности, имеем выражения (7.253), тогда как для поля Солнца можно вычислить необходимые производные из (7.256). Действительно, мы уже касались вопроса о спектральном смещении при получении формулы (7.270). Мы не будем вдаваться в детали, относящиеся к вопросу о направлении наблюдения.

Если мы используем формулу (11.117), то мы тем самым рассматриваем явления в солнечной системе, однако нельзя осуществить такую координатную систему на больших расстояниях, и, следовательно, ее нельзя использовать в следующем параграфе, где обсуждается звездная аберрация.

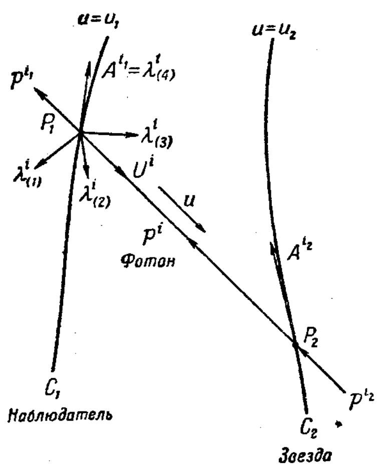
§ 6. Звездная аберрация

Наблюдаемые пути звезд испытывают систематические изменения с периодом в один год. Эти изменения можно описать, зная, что каждая звезда движется по маленькому эллипсу на небесной сфере, причем на полюсе

---

[1]) Повсюду в этой работе вторые числовые индексы относятся к P_1 и P_2. Как и в гл. II, мы обозначаем частные ковариантные производные Ω нижними индексами без каких-либо дополнительных обозначений.

эклиптики эллипсы становятся кругами, а на самой эклиптике — прямыми. Радиус круга на полюсе равен v/c *рад*, где v — орбитальная скорость Земли при движении вокруг Солнца, и c — скорость света; этот угол равен 20′5″ и называется *постоянной аберрации*. Угловая длина прямой линии на эклиптике равна удвоенной величине этой постоянной. Далее известно, что имеется аберрация с периодом в один день, зависящая от широты наблюдателя и принимающая значения от 0,31″ на экваторе до 0 на полюсе. Для объяснения этих фактов астроном использует представление об эфире, в котором покоится Солнце. Попытаемся найти объяснение им в искривленном пространстве — времени (Маст и Стретди [703]) [1]).



Фиг. 95. Звездная аберрация.

Фиг. 95 является детализацией фиг. 94. Начнем с рассмотрения находящейся на конечном расстоянии звезды с мировой линией C_2. Введем на изотропной геодезической, идущей обратно от C_1 к C_2, канонический параметр u, пробегающий значения от u_1 (на C_1) до u_2 (на C_2), причем $u_1 < u_2$ (движению фотона соответствует уменьшение u). Введем обозначение

$$U^i = \frac{dx^i}{du}, \qquad k^{-1} = u_2 - u_1. \tag{11.118}$$

Тогда из (2.17) имеем

$$k\Omega_{i_1} = -U_{i_1}, \qquad k\Omega_{i_2} = U_{i_2}, \tag{11.119}$$

и, поскольку мы движемся вдоль C_1 (где $D = \delta/\delta s$), то

$$DU_{i_1} = -k\left(\Omega_{i_1 j_1} A^{j_1} + \Omega_{i_1 j_2} V^{j_2}\right). \tag{11.120}$$

Переместим теперь звезду в бесконечность вдоль изотропной геодезической P_1P_2, сохраняя тот же параметр u. Это означает, что $(u_2 - u_1)$ стремится к бесконечности, или, что то же самое, k стремится к нулю. Предположим, что поле везде слабое, и будем пренебрегать членами, *квадратичными относительно тензора Римана*, так что для вторых производных Ω имеем (опуская O_2) формулу (2.95). Замечая, что в поле Шварцшильда тензор Римана исчезает как $1/r^3$, можно сказать, что большая часть траектории фотона проходит в почти *полностью* плоском пространстве — времени. Для математического удобства мы идеализируем картину в соответствии с фиг. 6. Так, положим $R_{ijkm} = 0$ везде, за исключением участков, где

$$u_1 \leqslant u \leqslant \bar{u}_1, \qquad \bar{u}_2 \leqslant u \leqslant u_2. \tag{11.121}$$

Хотя мы мысленно переместим звезду в бесконечность, однако $(\bar{u}_1 - u_1)$ и $(u_2 - \bar{u}_2)$ оставим конечными. Тогда легко видеть, что из (2.95) следует

$$\lim_{k\to 0} k\Omega_{i_1 j_1} = -W_{i_1 j_1}, \qquad \lim_{k\to 0} k\Omega_{i_1 j_2} = 0, \tag{11.122}$$

где в силу (2.69)

$$W_{i_1 j_1} = -\frac{3}{2}\int_{u_1}^{\bar{u}_1} g_{i_1 a} g_{j_1 b} S^{abpq} U_p U_q \, du = \int_{u_1}^{\bar{u}_1} g_{i_1 a} g_{j_1 b} R^{apbq} U_p U_q \, du. \tag{11.123}$$

[1]) В некоторых аспектах их метод отличается от примененного здесь.

Мы должны подставить (11.122) в (11.120), но сначала упростим обозначения, отбросив вторичный индекс 1. Тогда для бесконечно удаленной звезды имеем [1])

$$DU_i = W_{ij} A^j, \tag{11.124}$$

где A^j — 4-скорость наблюдателя, и

$$W_{ij} = W_{ji} = \int_{u_1}^{\bar{u}_1} g_{ia'} g_{jb'} R^{a'p'b'q'} U_{p'} U_{q'}\, du. \tag{11.125}$$

Тензор W_{ij} можно назвать *тензором аберрации*, поскольку им определяется звездная аберрация. Его значение зависит от точки P на мировой линии наблюдателя и от направления на звезду, но не зависит ни от 4-скорости наблюдателя, ни от его 4-ускорения. Отметим, что

$$W_{ij} U^j = 0, \tag{11.126}$$

так как U^i параллельно переносится вдоль изотропной геодезической.

Есть одна тонкость, касающаяся канонического параметра u на изотропной геодезической, соединяющей точки C_1 и C_2. До того как мы перешли к предельному случаю бесконечно удаленной звезды, мы могли выбрать u на одной из изотропных геодезических в виде любой линейной комбинации канонических параметров, но, сделав такой выбор, мы должны фиксировать этот параметр на других изотропных геодезических, потребовав, чтобы он принимал постоянные значения на C_1 и C_2. Это ограничение не снимается при рассмотрении весьма удаленной звезды, и мы имеем право произвольно выбирать u только на *одной* изотропной геодезической. Однако, применяя соотношение (11.124) в какой-либо *одной* точке P, мы можем нормировать u; проделаем это с помощью следующих эквивалентных требований:

$$U_i A^i = 1,\ U_{(4)} = 1,\ U^{(4)} = -1, \tag{11.127}$$

причем $\lambda^i_{(a)}$ — ортонормированный 4-репер на линии C_1 с касательной к ней $\lambda^i_{(4)}$. Следует тщательно следить за тем, чтобы требования (11.127) применялись только *после* дифференцирования.

Теперь

$$U_{(\alpha)} = U_i \lambda^i_{(\alpha)} \tag{11.128}$$

— угловые коэффициенты телескопа относительно 3-репера $\lambda^i_{(\alpha)}$, если смотреть с кривой C_1. Следовательно, направляющие косинусы телескопа равны

$$l_{(\alpha)} = \frac{U_{(\alpha)}}{U_{(4)}} = \frac{U_i \lambda^i_{(\alpha)}}{U_j A^j}. \tag{11.129}$$

С помощью (11.127) для скорости изменения этих направляющих косинусов имеем выражения

$$Dl_{(\alpha)} = DU_{(\alpha)} - U_{(\alpha)} D(U_j A^j). \tag{11.130}$$

До сих пор 3-репер $\lambda^i_{(\alpha)}$ был произволен. Теперь выберем его в виде репера Ферми так, чтобы [как и в уравнении (1.84)]

$$D\lambda^i_{(\alpha)} = A^i \varkappa_j \lambda^j_{(\alpha)}, \tag{11.131}$$

[1]) Эту формулу можно проверить с помощью (1.157), не забывая, однако, различный смысл символа D там и здесь. Штрихи в (11. 125) относятся к текущему событию на изотропной геодезической; $g_{ia'}$ — оператор параллельного переноса, определенный в (2.71).

где $\varkappa_j$ — вектор первой кривизны кривой C_1 ($\varkappa_j = DA_j$). Тогда

$$DU_{(\alpha)} = D\,(U_i \lambda^i_{(\alpha)}) = \varkappa_i \lambda^i_{(\alpha)} + W_{ij}\lambda^i_{(\alpha)} A^j = \varkappa_{(\alpha)} + W_{(\alpha 4)}, \qquad (11.132)$$
$$D\,(U_j A^j) = U_j \varkappa^j + W_{jk} A^j A^k = U_{(\alpha)} \varkappa_{(\alpha)} + W_{(44)}.$$

Здесь индексы в скобках означают компоненты относительно 4-репера $\lambda^i_{(a}$ ($\lambda^i_{(4)} = A^i$). Тогда из (11.130) следует

$$Dl_{(\alpha)} = \varkappa_{(\alpha)} + W_{(\alpha 4)} - U_{(\alpha)} U_{(\beta)} \varkappa_{(\beta)} - U_{(\alpha)} W_{(44)}. \qquad (11.133)$$

В силу соотношений (11.126) и (11.127)

$$W_{(\alpha\beta)} U_{(\beta)} - W_{(\alpha 4)} = 0, \qquad W_{(4\beta)} U_{(\beta)} - W_{(44)} = 0, \qquad (11.134)$$

так что

$$W_{(\alpha 4)} = W_{(\alpha\beta)} U_{(\beta)}, \qquad W_{(44)} = W_{(\alpha\beta)} U_{(\alpha)} U_{(\beta)}. \qquad (11.135)$$

Так как

$$U_{(\alpha)} = l_{(\alpha)}, \qquad (11.136)$$

(11.133) можно записать в такой форме[1]):

$$Dl_{(\alpha)} = P_{(\alpha\beta)}\,(\varkappa_{(\beta)} + W_{(\beta\gamma)} l_{(\gamma)}), \qquad (11.137)$$

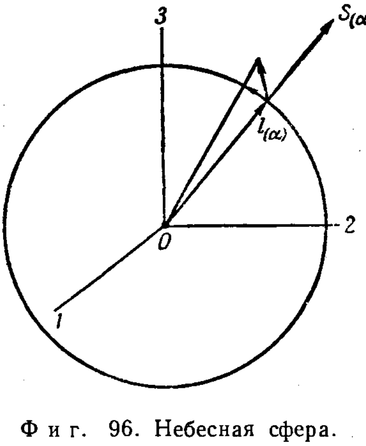
где $P_{(\alpha\beta)}$ — 3-оператор проектирования

$$P_{(\alpha\beta)} = \delta_{\alpha\beta} - l_{(\alpha)} l_{(\beta)}. \qquad (11.138)$$

Посмотрим, что означает (11.137) для астронома, наблюдающего звезду. Он берет 3-репер $\lambda^i_{(\alpha)}$ за координатные оси и строит небесную сферу единичного радиуса (фиг. 96). Звезда представляет собой точку C с координатами $l_{(\alpha)}$; с течением времени эта точка движется: это и есть явление звездной аберрации. Из формулы (11.137) видно, что в течение малого промежутка времени ds точка $l_{(\alpha)}$ испытывает перемещение, которое можно разделить на две части. Сначала точка смещается *со сферы* на расстояние

$$(\varkappa_{(\alpha)} + W_{(\alpha\gamma)} l_{(\gamma)})\,ds. \qquad (11.139)$$

Затем она снова переносится *на сферу* некоторым радиальным перемещением. Смещение (11.139) состоит из части ($\varkappa_{(\alpha)}\,ds$), одинаковой для всех звезд, и из другой части, зависящей от того, какая конкретно звезда наблюдается.



Фиг. 96. Небесная сфера.

Вытекает ли из формулы (11.137), что звездная аберрация мала? Для земного наблюдателя $\varkappa_{(\alpha)}$ имеет очень простой смысл. Это вектор, направленный вверх, с модулем, равным g (так называемое ускорение силы тяжести;

---

[1]) Очевидно, параметр u нормирован, как в (11.127). Легко видеть, что

$$W_{(\beta\gamma)} l_{(\gamma)} = l_{(\gamma)} \int R_{(\beta 4 \gamma 4)}\,du - l_{(\varrho)} l_{(\gamma)} \int R_{(\beta\varrho\gamma 4)}\,du, \qquad (11.137a)$$

где область интегрирования та же, что и в (11.125), а величины R суть компоненты тензора Римана в ортонормированном 4-репере, полученном из $\lambda^i_{(a)}$ параллельным переносом на P_1P_2 (штрихи у индексов для простоты опущены).

ср. с падающим яблоком в гл. III, § 9). Численное значение его равно $3{,}3\cdot 10^{-8}$ *сек*$^{-1}$, т. е. он действительно оказывается малым. Но если мы произведем интегрирование за год ($=3{,}2\cdot 10^7$ *сек*), то, по-видимому, вклад $\varkappa$-члена достигнет порядка единицы! Тот физический факт, что звездная аберрация мала, означает, что два члена в выражении (11.137) должны в значительной степени компенсировать друг друга.

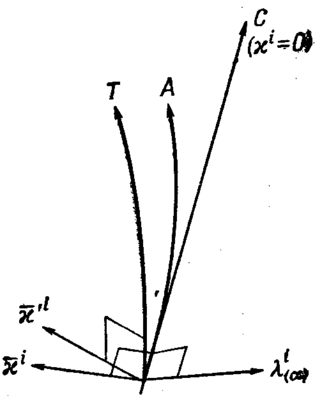
Если заданы точка P, 4-скорость A^i и направление $l_{(\alpha)}$ на звезду, то можно выбрать *ускорение* наблюдателя так, чтобы аберрация исчезла. Для этого первая кривизна его мировой линии должна быть равна

$$\bar{\varkappa}_{(\alpha)} = -W_{(\alpha\gamma)}l_{(\gamma)}. \tag{11.140}$$

На самом деле для данной звезды это уравнение определяет во всем пространстве — времени комплекс *кривых без аберрации*, проходящих через каждую точку в каждом направлении. При $\bar{\varkappa}_{(\alpha)}$, определенном таким образом, можно записать (11.137) в виде

$$Dl_{(\alpha)} = P_{(\alpha\beta)}(\varkappa_{(\beta)} - \bar{\varkappa}_{(\beta)}). \tag{11.141}$$

Может показаться, что все это — не более чем эффектный, но бесполезный результат. Но это не совсем так. Он определенно не был бы бесполезным, если бы мы знали кривые без аберрации. В случае стационарной вселенной мы нашли хотя и не весь комплекс, но, по крайней мере, конгруэнцию, принадлежащую такому комплексу. В стационарной вселенной мы имеем $g_{ij,4}=0$, и пространство — время допускает группу движений вдоль x^4-линии. Очевидно, что для наблюдателя, мировая линия которого есть x^4-линия, не может существовать звездной аберрации, и такая конгруэнция x^4-линий является конгруэнцией кривых без аберрации.



Фиг. 97. Мировая линия наблюдателя C, кривая без аберрации A, соприкасающаяся с C, и x^4-линия T.

В случае реального земного наблюдателя поле не стационарно, и мы должны оставить попытку полностью рассмотреть звездную аберрацию относительно него. Идеализируем рассмотрение, поместив наблюдателя на частицу с нулевой массой в стационарном поле, возможно в поле Солнца. Не обязательно, чтобы его мировая линия была геодезической, но для простоты мы предположим это, положив $\varkappa_{(\alpha)}=0$. При такой идеализации земного наблюдателя предположение о том, что его мировая линия — геодезическая, разумно. Тогда из (11.141) следует, что

$$Dl_{(\alpha)} = -P_{(\alpha\beta)}\bar{\varkappa}_{(\beta)}. \tag{11.142}$$

Здесь $\bar{\varkappa}_{(\alpha)}$ — компоненты вектора первой кривизны (скажем, $\bar{\varkappa}_i$) кривой без аберрации A, касающейся мировой линии наблюдателя в его 3-репере:

$$\bar{\varkappa}_{(\alpha)} = \bar{\varkappa}_i\lambda^i_{(\alpha)}. \tag{11.143}$$

На фиг. 97 изображены C, A и x^4-линия T.

Мы, конечно, не знаем $\bar{\varkappa}^i$, но можно легко вычислить вектор первой кривизны (скажем, $\bar{\varkappa}'^i$) кривой T из общей формулы

$$\varkappa^i = \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}. \tag{11.144}$$

Отсюда

$$\bar{\varkappa}'^i = -\frac{\Gamma^i_{44}}{g_{44}}, \quad \bar{\varkappa}'_i = (\ln\sqrt{-g_{44}})_{,i}. \qquad (11.145)$$

Чтобы использовать эти данные, мы должны теперь перейти к некоторому приближению. Мы уже предполагали, что поле слабое и имеет стационарный характер; к этому добавим предположение о *медленном* движении наблюдателя, подразумевая под этим, что направление C почти совпадает с направлением T. Естественно допустить, что для двух кривых без аберрации, очень близких по направлению, векторы первой кривизны почти одинаковы. Итак,

$$\bar{\varkappa}_{(\alpha)} = \bar{\varkappa}_i \lambda^i_{(\alpha)} \approx \bar{\varkappa}'_i \lambda^i_{(\alpha)} = (\ln\sqrt{-g_{44}})_{,\beta}\, \lambda^\beta_{(\alpha)}. \qquad (11.146)$$

Рассматривая это как законное приближение, мы должны заменить в формуле (11.142) $\bar{\varkappa}_{(\beta)}$, которые зависят от направления на звезду, выражением, не зависящим от него. Подразумевая, что $\bar{\varkappa}_{(\beta)}$ теперь не зависит от выбора звезды, мы снова вычислим смещение. Видим, что за время ds точка $l_{(\alpha)}$ перемещается с поверхности сферы на расстояние $\varkappa_{(\alpha)}\, ds$, *одинаковое для всех* весьма удаленных звезд, затем она по радиусу снова возвращается на поверхность сферы. Но что возвращает ее обратно? Аберрационное движение звезды можно описать, используя вектор $S_{(\alpha)}$, который удовлетворяет уравнению

$$DS_{(\alpha)} = -S\bar{\varkappa}_{(\alpha)}, \qquad (11.147)$$

где $S^2 = S_{(\beta)}S_{(\beta)}$. Если $S_{(\alpha)} = l_{(\alpha)}$ в начальный момент времени, то $S_{(\alpha)}$ будет сохранять направление, совпадающее с направлением $l_{(\alpha)}$. В нашем приближении $S_{(\alpha)}$ можно заменить единицей. Тогда уравнение аберрации примет вид

$$DS_{(\alpha)} = -(\ln\sqrt{-g_{44}})_{,\beta}\, \lambda^\beta_{(\alpha)}. \qquad (11.148)$$

Напоминаем: мы имеем дело только с аберрацией весьма (бесконечно) удаленных звезд, поле вокруг наблюдателя слабое и стационарное, направление $S_{(\alpha)}$ — видимое (через телескоп) направление на звезду и D означает скорость изменения относительно времени наблюдателя. Под слабостью поля подразумевается, что $g_{ij,k}$ малы. Поскольку C — геодезическая, перенос Ферми векторов $\lambda^i_{(\alpha)}$ является параллельным переносом и поэтому можно говорить о $\lambda^i_{(\alpha)}$ в уравнениях (11.148) как о постоянных.

Можно было бы оставить (11.148) в качестве конечного приближенного результата, но интересно связать его с классическим объяснением аберрации через скорость наблюдателя. Принимая более прозрачные обозначения $v^i = A^i = dx^i/ds$, $v_i = g_{ij}v^j$ для геодезической мировой линии наблюдателя C, получаем уравнения

$$\frac{dv_i}{ds} - \frac{1}{2} g_{jk,\, i} v^j v^k = 0. \qquad (11.149)$$

Отсюда находим приближенно

$$\frac{dv_\beta}{ds} + (\ln\sqrt{-g_{44}})_{,\beta} = 0. \qquad (11.150)$$

Следовательно, уравнение аберрации (11.148) можно записать в виде

$$\frac{dS_{(\alpha)}}{ds} = \frac{dv_\beta}{ds} \lambda_{(\alpha)}. \qquad (11.151)$$

Обозначая через Δ приращение за некоторый конечный промежуток времени, имеем

$$\Delta S_{(\alpha)} = \Delta v_{\beta} \cdot \lambda^{\beta}_{(\alpha)}. \qquad (11.152)$$

Это, по сути дела, запись глубоко классического утверждения, что аберрационное смещение равно скорости наблюдателя.

Оставим эти едва ли доставляющие удовольствие приближения и вернемся к формуле (11.137), выводя которую мы сделали только два предположения:

1) звезды бесконечно удалены;

2) поле слабое и обрезано на большом расстоянии (в действительности это лишь удобный математический прием).

Согласно классическому объяснению звездной аберрации в случае весьма удаленных звезд, наблюдатель может исключить ее, оставаясь «в покое». Можно обратить это утверждение и сказать, что наблюдатель «покоится», если он не наблюдает никакой аберрации. Что может сказать по этому поводу теория относительности? Может ли наблюдатель так выбрать свою мировую линию, чтобы аберрация не наблюдалась? Очевидно, нет. Если он интересуется только одной конкретной звездой, он не может избавиться от ее аберрации, следуя по кривой без аберрации, удовлетворяющей условию (11.140), но если правая часть (11.140) случайно окажется зависящей от направления, то будет иметь место аберрация других звезд. Тогда возникает интересный вопрос: можно ли статистически определить *кривые покоя* в пространстве — времени, критерием которых будет минимум подходящим образом определенной средней аберрации?

Рассматривая аберрацию, мы повсюду пользовались 3-репером, подвергая его переносу Ферми, что, по-видимому, математически удобно. Переход к другому 3-реперу до некоторой степени тривиален — все мгновенные положения звезд получаются путем жесткого вращения.

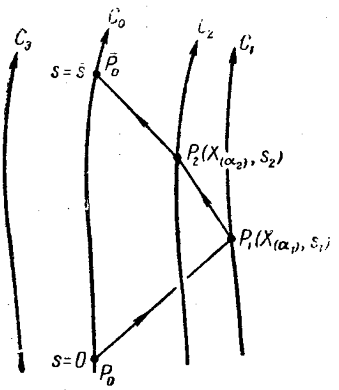
§ 7. Дифференциальная хронометрия

В интерферометре свет от источника делится на два луча, идущих по разным путям. Два возвращающихся луча образуют интерференционную картину. Хотя и не очевидно, что таким образом измеряется время, однако ясно, что существенной в данном случае является разность времен, затраченных на прохождение двух возможных путей, а следовательно, можно с полным основанием назвать интерферометр *дифференциальным хронометром* (сокращенно ДХ). Интерферометр Майкельсона и Морли является ДХ, и то, что будет обсуждаться ниже, можно считать некоторым обобщением их установки. Но ввиду последних достижений в области точного измерения времени (точнее 10^{-10} *сек*) не следует рассматривать интерференцию света как существенное свойство ДХ; здесь можно использовать более совершенную технику.

В нашем распоряжении будут световые (или иные электромагнитные) сигналы, идущие по замкнутому пути; время прохождения измеряется часами, находящимися на источнике, который является началом и концом пути. За исключением мгновенного отражения от зеркал, свет все время движется в вакууме, и, следовательно, мы имеем перед собой геометрическую задачу, включающую изотропные геодезические и мировые линии источника и зеркал. Допустим, что геометрия пространства — времени задана, так что на нее не влияют проводимые эксперименты. Желательным результатом таких экспериментов было бы определение первой кривизны мировой линии (4-ускорения) источника, ее двух других кривизн и кривизны пространства — времени, т. е. определение гравитационного поля.

Будем осторожны и проследим за тем, чтобы не обесценить рассуждения введением понятия твердого тела, как это часто делается при обсуждении эксперимента Майкельсона — Морли.

Фиг. 98 дает пространственно-временную картину тетраэдрического ДХ; здесь C_0 — мировая линия источника, несущего на себе часы, а C_1, C_2, C_3 — мировые линии трех зеркал, идеализируемых в виде точек. Для соответствия с действительностью можно рассматривать C_0 как точку, фиксированную на поверхности Земли, или движущуюся вокруг нее некоторым заданным образом. Во всяком случае C_0 можно считать заданным, в то время как другие три мировые линии выбираются по желанию.



Фиг. 98. Тетраэдрический дифференциальный хронометр в пространстве — времени.

На фиг. 98 изображена траектория фотона (сигнала), который из точки P_0 на кривой C_0 идет к C_1, затем — к C_2 и, наконец, возвращается в точку $\bar{P}_0$ на C_0. Обозначим символом [0120] этот путь и время его обхода P. Такие символы, как [010], [0230], имеют аналогичный смысл.

Каждая мировая линия имеет три степени свободы, и, следовательно, для нашей схемы имеется девять степеней свободы. Мы используем шесть из них для выбора мировых линий зеркал так, чтобы

$$[010] = [020] = [030] = 2T \tag{11.153}$$

и

$$[0230320] = [0310130] = [0120210] = \left(4 + 2\sqrt{2}\right) T, \tag{11.154}$$

где T — произвольная константа.

Для пояснения этих на первый взгляд странных условий введем ортонормированный 4-репер $\lambda^i_{(a)}$ на C_0, причем $\lambda^i_{(4)} = A^i$ (4-скорость C_0), а $\lambda^i_{(\alpha)}$ получаются с помощью переноса Ферми вдоль C_0. Пусть $X^{(\alpha)}$ $(=X_{(\alpha)})$ есть координаты Ферми[1]) относительно C_0 (см. определение в гл. II, § 10). Теперь можно нарисовать картину в трехмерном пространстве Ферми, в котором $X_{(\alpha)}$ будут играть роль ортогональных декартовых координат, а четвертая координата Ферми $X^{(4)}$ $(= s$ на $C_0)$ может рассматриваться как разновидность ньютоновского времени. Траектория каждого зеркала дается уравнениями вида $X_{(\alpha)} = X_{(\alpha)}(X^{(4)}) = X_{(\alpha)}(s)$. Следует быть довольно осторожным, говоря о расстоянии между двумя зеркалами, потому что этой величине можно дать различные определения. Обычно наиболее удобно пользоваться *расстоянием Ферми.* Квадрат такого расстояния между C_1 и C_2 для фиксированного s на C_0 равен

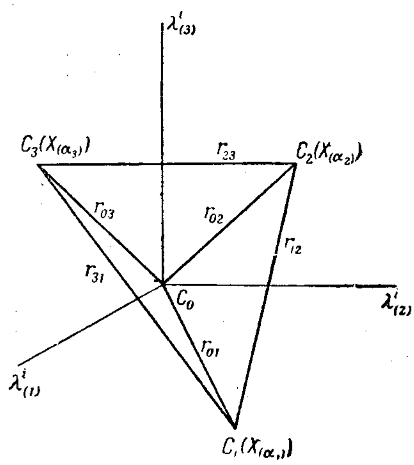
$$r^2_{12} = (X_{(\alpha_1)} - X_{(\alpha_2)})(X_{(\alpha_1)} - X_{(\alpha_2)}). \tag{1.155}$$

Нет никакой опасности в использовании одинаковых обозначений для мировых линий и соответствующих точек в трехмерном пространстве Ферми. Изображение ДХ для данного значения s представляет собой тетраэдр (фиг. 99). По мере изменения s точки движутся, но C_0 неизменно остается в начале координат.

---

1) Поскольку здесь свет идет по двум путям, эти координаты удобнее, чем оптические координаты, определенные в гл. II, § 30.

Если пространство — время плоское, C_0 — геодезическая и тетраэдр не вращается, то условия (11.153) и (11.154) гарантируют, что тетраэдр имеет форму, приведенную на фиг. 100, с тремя взаимно перпендикулярными ребрами длиной T. Поскольку эти условия приблизительно выполняются во всех физически интересных случаях, мгновенная форма тетраэдра в пространстве Ферми должна мало отличаться от изображенной, но все же следует ожидать появления некоторых малых искажений.

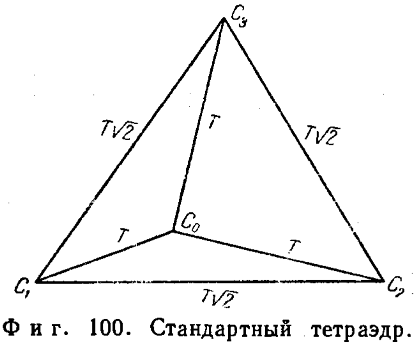


Фиг. 99. Тетраэдрический дифференциальный хронометр в трехмерном пространстве Ферми.

Чтобы выяснить поведение ДХ, необходимо проделать довольно трудные вычисления, основанные на результатах гл. II, § 4 и на фиг. 30. Основой для приближенного вычисления является предположение малости расстояний между различными мировыми линиями. К этому добавим допущение, что кривизна C_0 мала и координаты Ферми почти постоянны. В действительности мы отбросим член N_4 в (2.279), а M_3 и N_3 будем рассматривать как O_4, но сохраним M_4, чтобы исследовать влияние гравитации, хотя мы и знаем, что кривизна пространства — времени мала. Таким образом, для мировой функции любых двух точек P_1 и P_2 соответственно на C_1 и C_2 запишем

$$\Omega(P_1P_2) = M_2 + M_3 + N_3 + M_4 + O_5, \tag{11.156}$$

причем выражения для слагаемых даются формулами (2.280) — (2.283). Тогда путь [0120], изображенный на фиг. 98, можно рассматривать как составленный из трех изотропных геодезических, и, таким образом,



Фиг. 100. Стандартный тетраэдр.

$$\Omega(P_0P_1) = 0, \quad \Omega(P_1P_2) = 0, \quad \Omega(P_2\overline{P}_0) = 0. \tag{11.157}$$

Вычислим время прохождения по [0120] и другим путям, таким, как, например, [010]. Это можно проделать путем рассмотрения второго уравнения (11.157), используя его для нахождения $(s_2 - s_1)$ и получая затем остальные необходимые величины перестановкой числовых индексов.

Используя формулу (2.280), из (11.156) и второго уравнения (11.157) получаем

$$(s_2 - s_1)^2 = r_{12}^2 + 2M_3 + 2N_3 + 2M_4 + O_5. \tag{11.158}$$

Отсюда без учета остаточного члена O_4 $(D \equiv d/ds)$

$$s_2 - s_1 = r_{12} + s_1 Dr_{12} - (X_{(\alpha_1)} - X_{(\alpha_2)}) DX_{(\alpha_2)} + \varphi_{12} + \psi_{12}, \tag{11.159}$$

где

$$\varphi_{12} = -\frac{1}{2} r_{12} (X_{(\alpha_1)} + X_{(\alpha_2)})\, \varkappa_{(\alpha)} - $$
$$- \frac{1}{2} r_{12} S_{(\alpha 4 4 \beta)} (X_{(\alpha_1)} X_{(\beta_1)} + X_{(\alpha_2)} X_{(\beta_2)} + X_{(\alpha_1)} X_{(\beta_2)}) +$$
$$+ \frac{1}{4} r_{12}^{-1} S_{(\alpha\beta\gamma\delta)} X_{(\alpha_1)} X_{(\beta_1)} X_{(\gamma_2)} X_{(\delta_2)}, \qquad (11.160)$$

$$\psi_{12} = \frac{1}{2} S_{(\alpha\beta\gamma 4)} (X_{(\alpha_1)} X_{(\beta_1)} X_{(\gamma_2)} X_{(\alpha_2)} X_{(\beta_2)} X_{(\gamma_1)}).$$

Здесь $\varkappa_{(\alpha)}$ — компоненты вектора первой кривизны C_0 в 3-репере Ферми, а $S_{(\alpha\beta\gamma\delta)}$ — компоненты симметричного тензора Римана [см. (2.69)]. Отметим следующие важные факты:

$$\varphi_{12} = \varphi_{21}, \quad \psi_{12} = -\psi_{21}. \qquad (11.161)$$

Изменяя числовые индексы, можно применить соотношение (11.159) к участкам пути [010]. Если эта линия начинается при $s = 0$, отражается при $s = s_1$ и возвращается при $s = \bar{s}_0$, то мы получаем

$$\begin{aligned} s_1 &= r_{01} + X_{(\alpha_1)} D X_{(\alpha_1)} + \varphi_{01}, \\ \bar{s}_0 - s_1 &= r_{10} + s_1 D r_{10} + \varphi_{10}. \end{aligned} \qquad (11.162)$$

Сложение этих величин дает время обхода $\bar{s}_0 = [010]$. Объединяя аналогичные результаты, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[010] &= r_{01} + r_{01} D r_{01} + \varphi_{01}, \\ \frac{1}{2}[020] &= r_{02} + r_{02} D r_{02} + \varphi_{02}, \\ \frac{1}{2}[030] &= r_{03} + r_{03} D r_{03} + \varphi_{03}. \end{aligned} \qquad (11.163)$$

Позднее мы еще вернемся к этим формулам.

Точно так же для пути [0120], изображенного на фиг. 98, получим

$$\begin{aligned} s_1 &= r_{01} + X_{(\alpha_1)} D X_{(\alpha_1)} + \varphi_{01}, \\ s_2 - s_1 &= r_{12} + s_1 D r_{12} - (X_{(\alpha_1)} - X_{(\alpha_2)})\, D X_{(\alpha_2)} + \varphi_{12} + \psi_{12}, \\ \bar{s}_0 - s_2 &= r_{20} + s_2 D r_{20} + \varphi_{20}. \end{aligned} \qquad (11.164)$$

В первом приближении

$$s_1 = r_{01}, \quad s_2 = r_{01} + r_{12}, \qquad (11.165)$$

и, следовательно, складывая их с выражениями (11.164), имеем

$$[0120] = \bar{s}_0 = (r_{01} + r_{12} + r_{20}) + r_{01} D r_{01} + (r_{01} + r_{12} + r_{20}) D r_{02} +$$
$$+ r_{01} D r_{12} - X_{(\alpha_1)} D X_{(\alpha_2)} + (\varphi_{01} + \varphi_{12} + \varphi_{20}) + \psi_{12}. \qquad (11.166)$$

Чтобы получить время обхода по тому же пути в обратном направлении, нужно просто переставить индексы 1 и 2:

$$[0210] = (r_{02} + r_{21} + r_{10}) + r_{02} D r_{02} + (r_{02} + r_{21} + r_{10}) D r_{01} +$$
$$+ r_{02} D r_{21} - X_{(\alpha_2)} D X_{(\alpha_1)} + (\varphi_{02} + \varphi_{21} + \varphi_{10}) + \psi_{21}. \qquad (11.167)$$

Учитывая свойства симметрии в (11.161) и то обстоятельство, что, конечно, $r_{01} = r_{10}$ и т. д., вычитая и складывая два предыдущих уравнения,

получаем

$$\frac{1}{2}[0120210]=(r_{01}+r_{12}+r_{20})\left(1+\frac{1}{2}Dr_{01}+\frac{1}{2}Dr_{20}\right)+\varphi_{01}+$$
$$+\varphi_{12}+\varphi_{20}+\frac{1}{2}r_{01}Dr_{01}+\frac{1}{2}r_{20}Dr_{20}+\frac{1}{2}(r_{01}+r_{20})Dr_{12} \qquad (11.168)$$

и

$$[0120]-[0210]=-(r_{02}+r_{21})Dr_{01}+(r_{01}+r_{12})Dr_{20}+$$
$$+(r_{01}-r_{02})Dr_{12}-(X_{(\alpha_1)}DX_{(\alpha_2)}-X_{(\alpha_2)}DX_{(\alpha_1)})+2\psi_{12}. \qquad (11.169)$$

Аналогичные выражения имеют место для [0230320] и [0310130] и для соответствующих разностей типа (11.169). Заметим, что φ и ψ были разделены.

Если принять во внимание вышеупомянутые приближения (близкие, лишь слегка искривленные мировые линии), то предыдущие выражения будут общими. Условия выбора (11.153) и (11.154) еще не использовались. Теперь мы потребуем, чтобы они выполнялись. В силу (11.153) и (11.163)

$$T=r_{01}+r_{01}Dr_{01}+\varphi_{01}. \qquad (11.170)$$

Так как T — постоянная, Dr_{01} мало, то можно пренебречь вторым членом справа. Таким образом, с помощью остальных уравнений (11.163) имеем

$$r_{01}=T-\varphi_{01},\quad r_{02}=T-\varphi_{02},\quad r_{03}=T-\varphi_{03}. \qquad (11.171)$$

Точно так же из (11.154) и (11.168) и его аналогов (т. е. уравнений, получающихся из него перестановкой индексов) и из (11.171) получаем

$$r_{23}=T'-\varphi_{23},\quad r_{31}=T'-\varphi_{31},\quad r_{12}=T'-\varphi_{12},\quad T'=T\sqrt{2}. \qquad (11.172)$$

Здесь мы имеем длины Ферми шести ребер тетраэдра. Они лишь слегка отличаются от соответствующих длин стандартного тетраэдра, изображенного на фиг. 100, причем разницу можно вычислить.

При выполнении условий (11.153) и (11.154) мы имеем «почти твердый тетраэдр» с одной фиксированной осью, но он все же обладает вращательными степенями свободы. Исследуем эффекты этого вращения, выбирая в каждый данный момент 3-репер Ферми вдоль почти перпендикулярных ребер тетраэдра, так что в первом приближении

$$X_{(\alpha_1)}=(T,0,0),\quad X_{(\alpha_2)}=(0,T,0),\quad X_{(\alpha_3)}=(0,0,T). \qquad (11.173)$$

Тогда, если ω_1, ω_2, ω_3 — компоненты угловой скорости тетраэдра относительно этого 3-репера, то для скоростей его вершин имеем

$$DX_{(\alpha_1)}=(0,\omega_3T,-\omega_2T),\quad DX_{(\alpha_2)}=(-\omega_3T,0,\omega_1T),$$
$$DX_{(\alpha_3)}=(\omega_2T,-\omega_1T,0). \qquad (11.174)$$

Отсюда получаются

$$X_{(\alpha_2)}DX_{(\alpha_3)}-X_{(\alpha_3)}DX_{(\alpha_2)}=-2\omega_1T^2 \qquad (11.175)$$

и еще два аналогичных выражения.

Оставляя их на время, обратимся к выражениям (11.160) и используем (11.173) для оценки φ. Подставив полученное значение в (11.171) и (11.172), найдем более точные выражения для деформации тетраэдра

$$r_{01}=T\left(1+\frac{1}{2}T\varkappa_{(1)}+\frac{1}{2}T^2S_{(1441)}\right),$$
$$r_{23}=T'\left[1+\frac{1}{2}T(\varkappa_{(2)}+\varkappa_{(3)})+\right. \qquad (11.176)$$
$$\left.+\frac{1}{2}T^2\left(S_{(2442)}+S_{(3443)}+S_{(2443)}-\frac{1}{4}S_{(2233)}\right)\right],$$

причем, конечно, аналогичные формулы получаются подстановками

$$1 \to 2 \to 3 \to 1.$$

Отметим, что в эти выражения не входит угловая скорость.

Теперь мы должны оценить (11.169) и его аналоги. Вернемся к формуле (11.160) (выражение через ψ); используя (11.173) и (11.175), получаем

$$\frac{1}{2}([0230]-[0320]) = T\left[\omega_1 T + \frac{1}{2}T^2\left(S_{(2234)} - S_{(3324)}\right)\right] \qquad (11.177)$$

и еще два аналогичных выражения.

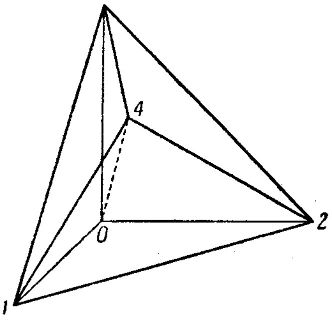
Это выражение представляет собой эффект Саньяка[1]): *время обхода зависит от направления обхода.* Если мы отнесем тетраэдр к 3-реперу Ферми так, чтобы $\omega = 0$, то эффект Саньяка исчезает почти полностью. Следовательно, мы еще раз пришли к выводу, что перенос Ферми соответствует отсутствию вращения, хотя для полного исчезновения эффекта Саньяка был бы необходим тетраэдр с весьма малой угловой скоростью (относительно 3-репера Ферми), одна из компонент которой имеет вид

$$\omega_1 = -\frac{1}{2}T\left(S_{(2234)} - S_{(3324)}\right), \qquad (11.178)$$

а для двух других выражения аналогичны. В некотором смысле — это вращение, определяемое кривизной пространства — времени.

§ 8. Пятиточечный детектор кривизны

В начале предыдущего параграфа была поставлена задача — предложить эксперименты для измерения кривизны мировой линии наблюдателя $\varkappa_{(\alpha)}$, и кривизны пространства — времени R_{ijkm}. Можно было бы подумать, что мы уже достигли этой цели, получив соотношения (11.176) и (11.177), но это не так. Конечно, в (11.176) содержатся кривизны, которые нас интересуют, вместе с измеримой величиной T, но там также присутствуют расстояния Ферми r_{01}, r_{23} и т. д., а они являются чисто математическими конструкциями и не могут быть измерены. Точно так же входящая в (11.177) угловая скорость не является измеряемой, поскольку перенос Ферми есть тоже лишь математическая конструкция.



Фиг. 101. Пятиточечный детектор кривизны.

Дело в том, что, хотя проделанные выше вычисления образуют важную основу для дальнейшего рассмотрения, нельзя измерить кривизны прибором, состоящим только из четырех точек — нужна, по крайней мере, пятая. При описании *определения кривизны по пяти точкам* (фиг. 101) удобно опустить математические детали (которые можно восстановить методами предыдущего параграфа) и ясно изложить дело в физических терминах. Вряд ли стоит говорить, что рассматриваемый прибор с точечным источником и точечными зеркалами является математической идеализацией. Он находится в таком же отношении к своей практической реализации, как и опи-

[1]) Член $\omega_1 T^2$ представляет собой эффект Саньяка в специальной теории относительности (см. Паули [881] и приведенную им литературу); S-слагаемые представляют собой вклад гравитационного поля.

сание эксперимента Майкельсона — Морли в обычном учебнике к интерферометру, в действительности примененному ими.

Во избежание возможной путаницы следует начинать рассмотрение не с пространственной картины, приведенной на фиг. 101, а с пространственно-временной диаграммы с пятью мировыми линиями; это достигается добавлением еще одной линии на фиг. 98. При переходе от такой пространственно-временной диаграммы к пространственной картине мы задаем вопрос: в каком пространстве она изображается? Фиг. 99 была изображена в пространстве Ферми, но теперь мы от него отказываемся, стремясь избежать трудностей, связанных с использованием чисто математических конструкций. Единственный надежный выход заключается в утверждении, что фиг. 101 приведена не в каком-то пространстве, а просто является вспомогательной схемой, помогающей нам рассматривать световые сигналы, распространяющиеся между источником 0 и зеркалами 1, 2, 3, 4.

Времена обхода, такие, как, [010], [0120], доступны измерению. Через эти времена обхода определим *оптические расстояния* между источником и зеркалами и между зеркалами, записывая формулы типа

$$\begin{aligned} [01] &= \frac{1}{2}[010], \\ [12] &= \frac{1}{2}[0120210] - [01] - [02]. \end{aligned} \tag{11.179}$$

Хотя на практике можно наложить условия вида (11.153) и (11.154), однако принципы легче понять, если мы не сделаем этого. Тогда все оптические расстояния будут изменяться со временем и при сравнении их мы будем иметь дело с такими их значениями, которые получаются для сигналов, покидающих точку 0 в одно и то же время s (измеряемое часами в 0 —единственными часами в приборе).

Могла появиться мысль, что, измерив все десять оптических расстояний в момент времени s, мы могли бы построить модель обычного пространства с помощью стержней, длины которых равны этим оптическим расстояниям. Но *дело в том, что такую модель нельзя построить*, за исключением весьма частных случаев. Можно подогнать друг к другу все стержни, кроме одного, — последний уже не подойдет. Эта неудача обязана своим происхождением кривизне мировой линии источника и кривизне пространства — времени. Эта подгонка была бы безупречной для аппарата, движущегося как целое в плоском пространстве — времени, но для прибора, находящегося, например, на поверхности Земли, уже будет небольшой разрыв.

Для систематического изучения этого разрыва напомним, что в трехмерном евклидовом пространстве взаимные расстояния пяти точек удовлетворяют определенному уравнению[1]). Если пять точек обозначены, как на фиг. 101, и если мы используем те же символы, что и в (11.179) для обозначения *евклидовых* расстояний в данный момент, то это уравнение будет иметь вид $D = 0$, где D — следующий определитель шестого порядка

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & [01]^2 & [02]^2 & [03]^2 & [04]^2 \\ 1 & [10]^2 & 0 & [12]^2 & [13]^2 & [14]^2 \\ 1 & [20]^2 & [21]^2 & 0 & [23]^2 & [24]^2 \\ 1 & [30]^2 & [31]^2 & [32]^2 & 0 & [34]^2 \\ 1 & [40]^2 & [41]^2 & [42]^2 & [43]^2 & 0 \end{vmatrix}. \tag{11.180}$$

[1]) Ср. G. Salmon, Modern Higher Algebra, Dublin, 1885, p. 27.

Если мы подставим в этот определитель измеренные оптические расстояния, то он не будет равен нулю, и его величина будет мерой тех кривизн, которые мы стараемся найти. Изменяя прибор по форме и ориентации, можно увеличить количество получаемой информации.

Не углубляясь в детальные вычисления, мы можем оценить порядок этой величины. Допустим, что эксперимент осуществлен и десять оптических длин измерены. Обозначим их среднее значение символом T. Пусть δ [04] — разность между экспериментально определенным значением [04] и значением, полученным решением уравнения $D = 0$ при подстановке в него других экспериментальных значений. Тогда из формул (11.176) следует, что, поскольку речь идет только о порядке величины, можно записать такое символическое уравнение:

$$\delta[04] = T^2\varkappa + T^3R, \qquad (11.181)$$

где $\varkappa$ — существенная компонента кривизны мировой линии источника, а R — то же самое для тензора Римана. На поверхности Земли можно грубо положить

$$\varkappa = 3\cdot 10^{-8}\ \text{сек}^{-1}, \qquad R = 3\cdot 10^{-6}\ \text{сек}^{-2}. \qquad (11.182)$$

Если возьмем

$$T = 1000\ \text{см} = 3\cdot 10^{-8}\ \text{сек}, \qquad (11.183)$$

то получим

$$T^2\varkappa = 3\cdot 10^{-23}\ \text{сек}, \qquad T^3R = 8\cdot 10^{-29}\ \text{сек}. \qquad (11.184)$$

Увеличивая размеры аппарата (увеличивая T), мы могли бы получить бóльшие значения этих величин, но оказывается, что δ [04] лежит значительно ниже уровня современной точности измерений времени.

Однако поскольку условия на Земле стабильны, можно повторять эксперимент многократно, рассматривая не путь [010], а, например, путь [010101 ... 10]. Вследствие этого эффект увеличится во столько раз, каково число повторений. В течение недели число повторений достигнет 10^{13}, что повысит $T^2\varkappa$ до уровня современной точности измерения времени; но T^3R будет все же ниже ее на шесть порядков. Это разочаровывает, но, по крайней мере, мы получили мрачное удовлетворение от того, что довели теорию знаменитого эксперимента Майкельсона — Морли до самого конца.

§ 9. Спектральное смещение в среде

В печати уже описывались (Мессбауэр [780—782], Паунд и Ребка [936, 937], Шиффер и Маршалл [1051], Мун [770][1]) новые установки для обнаружения и измерения смещения спектральных линий γ-лучей в случае, когда источник и приемник фиксированы относительно поверхности Земли, и при других их взаимных положениях. Пришло время для развития теории такого рода смещений, чтобы выяснить, что в действительности дают эти измерения.

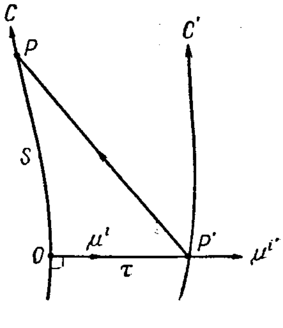
Математически рассматривать «непрерывное» проще, чем «дискретное», и мы откажемся здесь от метода предыдущих параграфов в пользу другого, который позволяет рассматривать мировые линии источника и приемника в заданном пространстве — времени как две мировые линии из конгруэнции, определяемой векторами 4-скорости $V^i(x)$ $(V_iV^i = -1)$. Пути излучения принимаются за изотропные геодезические.

[1]) Общий обзор дал Марджерисон [697].

На фиг. 102 изображены две мировые линии: C (приемник) и C' (источник), и изотропная геодезическая $P'P$, идущая от источника к приемнику. Тогда O есть основание (пространственноподобной) геодезической $P'O$, проведенной ортогонально к C. В силу (7.230) спектральное смещение (красное смещение считается положительным) равно

$$\frac{\nu'-\nu}{\nu'}=\frac{\Omega_{i'}V^{i'}+\Omega_i V^i}{\Omega_{j'}V^{j'}}, \qquad (11.185)$$

где Ω_i, $\Omega_{i'}$ — частные производные мировой функции $\Omega(P, P')$ по P, P' и $V^i V^{i'}$ — 4-скорость в этих событиях. Запишем, что $OP=s$, $OP'=\tau$ и обозначим через μ^i, $\mu^{i'}$ единичные касательные векторы к OP' в точках O и P'. Задача определяется геометрией пространства — времени, конгруэнцией $V^i(x)$, единичным вектором μ^i и скаляром τ. Решать задачу будем, разлагая величины по степеням τ.



Фиг. 102. Спектральное смещение в среде.

Заметим, что расположение, изображенное на фиг. 102, было уже приведено на фиг. 42 и при необходимых изменениях в обозначениях из формулы (3.66) следует

$$s=\tau-\frac{1}{2}\tau^2\mu_i DV^i+O_3, \qquad (11.186)$$

где $D=\delta/\delta s$, а значение $\mu_i DV^i$ вычисляется в точке O.

Величины $\Omega_{i'}$ $V^{i'}$и $\Omega_i V^i$ являются двухточечными инвариантами, определенными для каждой пары точек P и P'. Если рассматривать независимое движение P и P' и вдоль C и OP', то эти двухточечные инварианты будут функциями s и τ, и мы сможем разложить их в степенные ряды. Затем мы подставим вместо s его выражение (11.186). Запишем $D=\delta/\delta s$, как мы это делали уже в (11.186), ($D=\partial/\partial s$, если этот символ применен к инвариантам) и $T=\partial/\partial\tau$. Тогда

$$\begin{aligned}\Omega_i V^i = {} & [\Omega_i V^i]+s\,[D(\Omega_i V^i)]+\tau\,[T(\Omega_i V^i)]+\\ & +\frac{1}{2}\{s^2[D^2(\Omega_i V^i)]+2s\tau\,[DT(\Omega_i V^i)]+\tau^2\,[T^2(\Omega_i V^i)]\}+\\ & +\frac{1}{6}\{s^3\,[D^3(\Omega_i V^i)]+3s^2\tau\,[D^2T\,(\Omega_i V^i)]+\\ & +3s\tau^2]DT^2(\Omega_i V^i)]+\tau^3\,[T^3(\Omega_i V^i)]\}+O_4, \qquad (11.187)\end{aligned}$$

где [ ] означает в каждом случае предел совпадения в точке O. Пользуясь (2.69) для вычисления этих пределов, получаем

$$\begin{aligned}&[\Omega_i V^i]=0,\\ &[D(\Omega_i V^i)]=[\Omega_{ij}V^iV^j+\Omega_i DV^i]=-1,\\ &[T(\Omega_i V^i)]=[\Omega_{ij'}V^i\mu^{j'}]=0,\\ &[D^2(\Omega_i V^i)]=[\Omega_{ijk}V^iV^jV^k+3\Omega_{ij}V^iDV^j+\Omega_i D^2V^i]=0,\\ &[DT(\Omega_i V^i)]=[\Omega_{ijk'}V^iV^j\mu^{k'}+\Omega_{ij'}DV^i\mu^{j'}]=-\mu_i DV^i,\\ &[T^2(\Omega_i V^i)]=[\Omega_{ij'k'}V^i\mu^{j'}\mu^{k'}]=0, \qquad (11.188)\\ &[D^3(\Omega_i V^i)]=[3\Omega_{ij}DV^iDV^j+3\Omega_{ij}V^iD^2V^j+\Omega_{ij}D^2V^iV^j]=-DV_iDV^i,\\ &[D^2T(\Omega_i V^i)]=[\Omega_{ij'}D^2V^i\mu^{j'}]=-\mu_i D^2V^i,\end{aligned}$$

$$[DT^2(\Omega_i V^i)] = [\Omega_{ijk'm'} V^i V^j \mu^{k'} \mu^{m'}] = \frac{2}{3} K,$$

$$[T^3(\Omega_i V^i)] = 0.$$

Здесь

$$K = -R_{ijkm} V^i \mu^j V^k \mu^m \tag{11.189}$$

— риманова кривизна пространства — времени для двумерного элемента, образуемого в O векторами V^i и μ^i. Все величины в правых частях соотношений (11.188) вычислены в точке O. Тогда из (11.187) имеем

$$\Omega_i V^i = -s - s\tau\mu_i DV^i - \frac{1}{6}\{s^3 DV_i DV^i + 3s^2\tau\mu_i D^2 V^i - 2Ks\tau^2\}. \tag{11.190}$$

При изменении i на i' формула (11.187) дает степенной ряд $\Omega_{i'} V^{i'}$ со следующими коэффициентами:

$$\begin{aligned}
&[\Omega_{i'} V^{i'}] = 0,\\
&[D(\Omega_{i'} V^{i'})] = [\Omega_{i'j} V^{i'} V^j] = 1,\\
&[T(\Omega_{i'} V^{i'})] = [\Omega_{i'j'} V^{i'} \mu^{j'} + \Omega_{i'} V^{i'}{}_{|j'} \mu^{j'}] = 0,\\
&[D^2(\Omega_{i'} V^{i'})] = [\Omega_{i'jk} V^{i'} V^j V^k + \Omega_{i'j} V^{i'} DV^j] = 0,\\
&[DT(\Omega_{i'} V^{i'})] = [\Omega_{i'jk'} V^{i'} V^j \mu^{k'} + \Omega_{i'j} V^{j'}{}_{|k'} \mu^{k'} V^j] = 0,\\
&[T^2(\Omega_{i'} V^{i'})] = [\Omega_{i'j'k'} V^{i'} \mu^{j'} \mu^{k'} + 2\Omega_{i'j'} V^{i'}{}_{|k'} \mu^{j'} \mu^{k'} + \Omega_{i'} V^{i'}{}_{|j'k'} \mu^{j'} \mu^{k'}] = 2V_{i|j} \mu^i \mu^j,\\
&[D^3(\Omega_{i'} V^{i'})] = [\Omega_{i'j} V^{i'} D^2 V^j] = -V_i D^2 V^i = DV_i DV^i,\\
&[D^2T(\Omega_{i'} V^{i'})] = [\Omega_{i'j} V^{i'}{}_{|k'} \mu^{k'} DV^j] = -V_{i|j} \mu^j DV^i,\\
&[DT^2(\Omega_{i'} V^{i'})] = [\Omega_{i'jk'm'} V^{i'} V^j \mu^{k'} \mu^{m'} + \Omega_{i'j} V^{i'}_{|k'm} \mu^{k'} \mu^{m'} V^j] =\\
&\qquad = -S_{jmki} V^i V^j \mu^k \mu^m - V_i V^i_{|km} \mu^k \mu^m = \frac{1}{3} K + V_{i|j} \mu^j V^i_{|k} \mu^k,\\
&[T^3(\Omega_{i'} V^{i'})] = [2\Omega_{i'j'} V^{i'}_{|k'm'} \mu^{j'} \mu^{k'} \mu^{m'} + \Omega_{i'm'} V^{i'}_{|j'k'} \mu^{j'} \mu^{k'} \mu^{m'}] = 3V_{i|jk} \mu^i \mu^j \mu^k.
\end{aligned} \tag{11.191}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\Omega_{i'} V^{i'} = s + \tau^2 V_{i|j} \mu^i \mu^j + \frac{1}{6}\Big\{&s^3 DV_i DV^i - 3s^2\tau V_{i|j} \mu^j DV^i +\\
&+ s\tau^2 (K + 3V_{i|j} \mu^j V^i_{|k} \mu^k) + 3\tau^3 V_{i|jk} \mu^i \mu^j \mu^k\Big\} + O_4.
\end{aligned} \tag{11.192}$$

Сложив вместе (11.190) и (11.192), подставив в сумму вместо s его выражение (11.186), получим

$$\begin{aligned}
&\Omega_{i'} V^{i'} + \Omega_i V^i = A\tau^2 + B\tau^3 + O_4,\\
&A = V_{i|j} \mu^i \mu^j - \mu_i DV^i,\\
&B = -\frac{1}{2} \mu_i D^2 V^i - \frac{1}{2} V_{i|j} \mu^j DV^i + \frac{1}{2} K + \frac{1}{2} (\mu_i DV^i)^2 +\\
&\qquad + \frac{1}{2} V_{i|j} \mu^j V^i_{|k} \mu^k + \frac{1}{2} V_{i|jk} \mu^i \mu^j \mu^k.
\end{aligned} \tag{11.193}$$

Из (11.186) и (11.192) имеем

$$\Omega_{i'}V^{i'}=\tau-C\tau^2+O_3.$$
$$C=\frac{1}{2}\mu_i DV^i-V_{i|j}\mu^i\mu^j. \qquad (11.194)$$

При подстановке этих выражений в (11.185) получается следующая формула для спектрального смещения:

$$\frac{\nu'-\nu}{\nu'}=\tau\frac{A+B\tau+O_2}{1-C\tau+O_2}=A\tau+E\tau^2+O_3, \qquad (11.195)$$

$$E=B+AC=-\frac{1}{2}\mu_i D^2V^i-\frac{1}{2}V_{i|j}\mu^j DV^i+\frac{1}{2}K+\frac{1}{2}V_{i|j}\mu^j V^i_{|k}\mu^k+$$
$$+\frac{1}{2}(V_{i|jk}+3DV_iV_{j|k})\mu^i\mu^j\mu^k-(V_{i|j}\mu^i\mu^j)^2.$$

Мы выберем приближение такого порядка, чтобы проявилось действие гравитационного поля. Оно проявляется через коэффициент E, т. е. не сказывается на главной части смещения, равной

$$\frac{\nu'-\nu}{\nu'}=\tau(V_{i|j}\mu^i\mu^j-\mu_i DV^i), \qquad (11.196)$$

что легко объяснить. Для этого напомним формулу (4.62)

$$V_{i|j}\mu^i\mu^j=\sigma_{ij}\mu^i\mu^j, \qquad (11.197)$$

где σ_{ij} — тензор распространения натяжений. Величина $\mu_i DV^i$ является компонентой вектора первой кривизны мировой линии наблюдателя в направлении OP'. При жестком (в смысле Борна) движении среды $\sigma_{ij}=0$, и у нас остается только

$$\frac{\nu'-\nu}{\nu'}=-\tau\mu_i DV^i. \qquad (11.198)$$

Если мы рассматриваем источник и приемник, движущиеся вместе с Землей (причем источник и приемник расположены на одной вертикали), то векторы μ^i и DV^i — оба направлены вверх, и $\mu_i DV^i=g$, т. е. это просто обычное ускорение силы тяжести. Тогда, считая движение жестким, имеем

$$\frac{\nu'-\nu}{\nu'}=-g\tau, \qquad (11.199)$$

так как фиолетовое смещение считается отрицательным. В единицах CGS оно равно $-gh/c^2$ (высота h в *см*, скорость света c в *см·сек*$^{-1}$ и $g=980$ *см·сек*$^{-2}$). Для высоты в 100 *см* сдвиг приблизительно равен 10^{-16}.

ДОПОЛНЕНИЕ А

Обозначения

Хорошо известно, что в человеческом обществе чем менее обоснована та или иная условность, тем труднее изменить ее, и тем решительнее оказываются аргументы за и против. Поэтому я не питаю большой надежды на то, что этот разумный протест против некоторых неразумных условностей может сколько-нибудь существенно их изменить.

Правило суммирования Эйнштейна [259] по повторяющимся индексам позволило и математикам и типографским работникам сэкономить много времени, освободив их от необходимости писать и печатать символ Σ. Против этой условности трудно возразить (хотя Леви-Чивита, как видно, не решился на нее положиться!). Однако Эйнштейн оставил своим последователям и более сомнительный подарок — использование греческих индексов для ряда значений 1, 2, 3, 4. В этом пункте он не следовал обозначениям Риччи и Леви-Чивиты [975], принятым в их фундаментальной работе по абсолютному дифференцированию; он не следовал и обозначениям, которыми пользовался Паули [878, 881] в своем великолепном обзоре по теории относительности (все эти авторы пользовались латинскими индексами).

В настоящее время почти общепринято обозначать греческими буквами ряд чисел 1, 2, 3, 4 или 0, 1, 2, 3, и большинство физиков предпочитает эти обозначения. Было бы малодушием принять и увековечить эту неразумную условность, на первый взгляд незначительную. Для большинства потенциальных читателей данной книги естественным является латинский алфавит. Буквы этого алфавита стандартны и понятны, их имеют наши пишущие машинки, и они не нуждаются в специальном типографском наборе. Так что, за исключением особых случаев, обращение к греческому алфавиту совершенно нецелесообразно. В этой книге латинские буквы всюду принимают значения 1, 2, 3, 4, а греческие — почти всегда используются только для вспомогательного ряда 1, 2, 3. Прочие обозначения поясняются по ходу рассуждений. Правило суммирования всегда распространяется на соответствующий ряд значений, если не оговорено отклонение от этого правила.

В некоторых случаях неопределенный характер метрики пространства — времени не играет никакой роли. Так, например, обстоит дело при вычислении тензора Римана. Однако во многих других отношениях этот факт имеет фундаментальное значение. Поэтому в высшей степени неразумно вводить изучающих общую теорию относительности в заблуждение, принимая в качестве определения метрики плоского пространства — времени выражение

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2, \qquad (A.1)$$

или

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + dt^2. \qquad (A.2)$$

Это необдуманное обобщение — своего рода наследие времен евклидовой геометрии, имеющей дело с положительно определенной метрикой. Какое бы из этих двух выражений мы не приняли в качестве определения, всякий раз величина ds вещественна для одних приращений координат (x, y, z, t) и мнимая для других. Нет среди серьезно занимающихся теорией относительности человека, которого это ввело бы в заблуждение, ибо выражения (A.1) и (A.2) воспринимаются лишь как своего рода жаргон, которым пользуются физики. Однако зачем увековечивать бессмысленное? Фактически то, с чем мы оперируем, представляет собой квадратичную форму

$$\Phi = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2, \qquad (A.3)$$

или

$$\Phi = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + dt^2, \qquad (A.4)$$

а величина $ds = \sqrt{|\Phi|}$ всегда действительна. Геометры в течение более чем тридцати лет придерживались именно такого метода рассмотрения, а теория относительности не настолько проста, чтобы мы могли позволить себе мутить один из основных источников. Поэтому в данной книге мы не встречаемся с аналогами формул (A.1) или (A.2) в случае искривленного пространства.

Но какую из формул (A.3), (A.4) положить в основу построения аналога для искривленных пространств? С физической точки зрения это совершенно безразлично. Изменение знака метрической формы не меняет описываемого этой метрикой пространства. Но при этом в ряде формул изменяются знаки. Каждая из упомянутых форм имеет свои положительные стороны, и тот или иной выбор вряд ли можно рационально обосновать. Мы могли бы отдать предпочтение той форме, которая чаще чем другая оказывается положительной, однако в теории относительности невозможно обойтись без рассмотрения как пространственноподобных, так и временноподобных смещений. Правда, форма (A.4) положительна для перемещений вдоль мировой линии частицы, но она становится отрицательной, стоит лишь обратиться к рассмотрению взаимосвязи между траекториями двух частиц, изучая, например, случай возможной жесткой связи.

В настоящей книге я выбрал за основной тип (A.3) (сигнатура не —2, а +2), который для меня стал привычным, так как, изучив статью Паули много лет тому назад, я с тех пор не находил никаких оснований менять свой выбор, за исключением разве лишь возрастающей изолированности всякого, кто отказывается следовать быстро распространяющейся условности. Но есть и некоторые несубъективные причины такого выбора. Хотя в данной книге я и избегал использования мнимых координат, в некоторых случаях сложные формулы упрощаются, если метрическую форму привести к сумме квадратов, а такое упражнение легче проделать для *одной* мнимой координаты, чем для *трех*.

Ниже приводится таблица перехода от случая сигнатуры +2 к случаю сигнатуры —2. Однако следует предостеречь читателя от другого источника путаницы! Существуют два способа определять тензоры Римана и Риччи и они имеют в этих двух случаях отличающиеся знаки. Определения, принятые в данной книге, приведены в гл. I, § 1.

Переход от сигнатуры (+2) к сигнатуре (—2)

Сигнатура (+2)	Сигнатура (—2)
diag (1, 1, 1, —1)	diag (—1, —1, —1, 1)
g_{ij}	g'_{ij}

$$g_{ij} = -g'_{ij}$$

$$[ij,\ k] = -[ij,\ k]'$$
$$g = g'$$
$$g^{ij} = -g'^{ij}$$
$$\Gamma^i_{jk} = \left\{ {i \atop jk} \right\} = \left\{ {i \atop jk} \right\}' = \Gamma'^i_{jk}$$
$$R_{ijkm} = -R'_{ijkm}$$
$$R^i_{\cdot jkm} = R'^i_{\cdot jkm}$$
$$R_{im} = R'_{im}$$
$$R = -R'$$
$$G_{ij} = G'_{ij}$$
$$G^i_j = -G'^i_j$$

Дифференцирование

Частные производные обозначаются с помощью запятой, например $f_{,i}$, $f_{i,j}$, $f_{ij,km}$. Ковариантные производные обозначаются с помощью вертикальной черты, например $f_{i\,|\,j}$, $f_{ij\,|\,km}$, а иногда с помощью двух вертикальных линий, как, например, $f_{\alpha\,||\,\beta}$. Там, где не может возникнуть сомнений, в целях упрощения обозначений запятые и черточки опускаются.

Абсолютные производные обозначаются символом δ, например $\delta V^i/\delta s$, $\delta V^i/\delta u$, а иногда с помощью символа D, например DV^i.

Перечень основных символов с указанием параграфов, где эти символы вводятся

A^i — единичный касательный вектор (гл. I, § 3) или 4-скорость (гл. III, § 8).
b — первая кривизна (гл. I, § 3).
B^i — единичный вектор первой нормали (гл. I, § 3).
c — вторая кривизна (гл. I, § 3).
C^i — единичный вектор второй нормали (гл. I, § 3).
$C^i = 0$ — координатные условия (гл. IV, § 6).
d — третья кривизна (гл. I, § 3).
D — обычная (или абсолютная) производная (гл. I, § 6; гл. II, § 12).
D^i — единичная третья нормаль (гл. I, § 3).
E — энергия (гл. III, § 4).
E_{ij} — тензор электромагнитной энергии (гл. X, § 1).
$f(x)$ — частотная функция (гл. XI, § 1).
КФ — координаты Ферми (гл. II, § 10).
F_{ij}, F^*_{ij} — тензор электромагнитной энергии и дуальный к нему (гл. X, § 1).
$F(x, x')$ — подынтегральное выражение в принципе Ферма (гл. XI, § 3).
$g = \det(g_{ij})$ — детерминант метрического тензора g_{ij} (гл. I, § 1).
g — «ускорение, обусловленное гравитацией» (гл. III, § 9).

g_{ij}, g^{ij} — метрический тензор и сопряженный к нему (гл. I, § 1).
$g_{ij'}$, $g_{i_1j_2}$, $g_{i_1j_2k_1}$, ... — оператор параллельного переноса и его ковариантные производные (гл. II, § 3, 4).
$g_{abcd}=g_{ac}g_{bd}-g_{ad}g_{bc}$ — (гл. I, § 5).
$\underline{g}_{ij}$ — модифицированный (оптический) метрический тензор (гл. XI, § 2).
G — функция Грина (гл. I, § 6).
G_{ij}, G^i_j — тензор Эйнштейна (гл. I, § 5).
$\hbar$ — постоянная Планка (гл. III, § 7).
$h_{i_1j_1}$, $h_{i_1j_2}$, $h_{i_2j_2}$ — отклонения вторых ковариантных производных мировой функции от псевдоевклидовых значений (гл. II, § 11).
$H_{a'b'}$ — поток момента импульса (гл. VI, § 4).
J^i — 4-ток (гл. X, § 1).
K — риманова кривизна (гл. I, § 5).
$\mathbf{K}$ — матрица геодезического отклонения (гл. I, § 6).
$l_{(\alpha)}$ — направляющие косинусы кажущегося смещения звезды (гл. XI, § 6).
L — конечная мера кривой (гл. I, § 1) и лагранжиан (гл. XI, § 3).
$\mathbf{L}$ — матрица Лоренца (гл. I, § 3).
m — собственная масса (гл. III, § 3) и масса звезды (гл. VII, § 6).
$M_{a'}$ — поток 4-импульса (гл. VI, § 4).
МН — математические наблюдения (гл. III, § 1).
n — показатель рефракции (гл. XI, § 2).
n^i — единичная нормаль (гл. IV, § 1).
N^i — численный вектор (гл. IV, § 1) и единичная нормаль (гл. I, § 10).
ФН — физические наблюдения (гл. III, § 1).
ОК — оптические координаты (гл. II, § 10).
p — давление (гл. IV, § 4).
p^i — 4-импульс (гл. III, § 3).
P^i_j, $P_{(\alpha\beta)}$ — операторы проектирования (гл, IV, § 3; гл. XI, § 6).
$q=\sqrt{-g}$ — (гл. X, § 1).
$Q_{(ab)}$ — матрица для переноса Ферми — Уолкера (гл. I, § 4).
Q_i, Q_{ij} — моменты распределения (гл. IV, § 1).
КД — квазидекартовы координаты (гл. II, § 8).
r — координата кривизны в случае сферической симметрии (гл. VII, § 2).
R — скалярная кривизна (инвариант кривизны) (гл. I, § 5).
R_{ij}, R^i_j — тензор Риччи (гл. I, § 5).
R_{ijkm}, $R^i{}_{\cdot jkm}$, $\overline{R}_{12}$, ... — тензор Римана (гл. I, § 5).
$R_{(abcd)}$ — его компоненты в ортонормированном 4-репере (гл. I, § 3).
$\widetilde{R}^{ijkm}$ — дважды дуальный тензор Римана (гл. I, § 5).
$\overline{R}_{\varrho\mu\nu\sigma}$ — субтензор Римана (гл. I, § 8).
ds — линейный элемент (элемент дуги) пространства — времени (гл. I, § 1).
dS — элемент 3-объема (гл. IV, § 1) и элемент площади (гл. VII, § 6).

S_{ij} — тензор натяжений (гл. IV, § 4).
S_{ijkm} — симметризованный тензор Римана (гл. II, § 2).
$S_{(\alpha)}$ — 3-вектор, ориентированный по направлению к звезде (гл. XI, § 6).
$S(x', x)$ — главная, или характеристическая функция Гамильтона (гл. I, § 7).
t — криволинейная координата («время») в случае сферической симметрии (гл. VII, § 2).
t^{ik} — псевдотензор энергии (гл. VI, § 7).
T_{ij}, T_j^i — тензор энергии (гл. IV, § 1).
$\mathcal{T}^{ij} = \sqrt{-g}T^{ij}$ (гл. VI, § 6).
u — скорость распространения волн или фазовая скорость (гл. XI, § 1).
u^i — 4-скорость заряда (гл. X, § 1).
$U(x)$ — одноточечная главная функция (гл. I, § 7).
v — лучевая (или групповая) скорость (гл. XI, § 2).
v, $v_{(\alpha)}$ — относительная скорость (гл. III, § 7).
v_R — радиальная скорость (гл. III, § 7).
v^i, V^i — 4-скорость (гл. III, § 3 и гл. IV, § 1).
d_2v, d_3v, d_4v — элементы 2-, 3- и 4-объема (гл. I, § 10).
V — ньютоновский потенциал (гл. III, § 11).
W_{ij} — тензор аберрации (гл. XI, § 6).
x^i — координаты (общего вида) (гл. I, § 1).
$\bar{x}^i$ — гауссовы координаты (гл. I, § 8).
$X^{(a)}$, $X_{(a)}$ — квазидекартовы координаты (гл. II, § 8), координаты Ферми и оптические координаты (гл. II, § 10).
γ — гравитационная постоянная (константа) (гл. IV, § 5).
γ_{ij} — отклонение g_{ij} от diag (1, 1, 1, −1) (гл. II, § 8).
Γ_{jk}^i — символы Кристоффеля (гл. I, § 1).
δ_j^i, δ_{jc}^{ia}, δ_{jcd}^{iab} — дельта-символы Кронекера (гл. I, § 1, 5, гл. X, § 1).
$\delta/\delta u$ — символ абсолютного дифференцирования (гл. I, § 2).
ε — индикатор кривой (гл. I, § 1).
ε_{ijkm} — дискриминантный тензор (гл. I, § 5).
$\eta_{(ab)} = \eta^{(ab)}$ — диагональная матрица с элементами (1, 1, 1, −1) (гл. I, § 3).
η_{ijkm}, η^{ijkm} — тензор перестановок (дискриминантный тензор) (гл. I, § 5).
$\varkappa$ — циркуляция (гл. I, § 7) и константа ($=8\pi$) в уравнениях поля (гл. IV, § 5).
$\varkappa^i$ — вектор первой кривизны (гл. XI, § 6).
$\lambda_{(a)}^i$ — ортонормированный 4-репер ОР (гл. I, § 3).
$\lambda_{(\alpha)}^i$ — система отнесения (обычно подвергающаяся переносу Ферми) (гл. III, § 5).
Λ — космологическая константа (гл. IV, § 5).
μ — (собственная) плотность (гл. IV, § 4).
ν — частота (гл. III, § 7).
$\nu = \mu/\varrho^2$ — (гл. X, § 2).
$\nu(x, p)$ — функция распределения (гл. IV, § 1).
ξ_i, $\xi_{i|j}$ — вектор и тензор Киллинга (гл. VI, § 3).
$\varrho = \mu + p$ — (гл. V, § 6).
ϱ — гауссова полярная координата (гл. VII, § 2) и собственная плотность электрического заряда (гл. X, § 1).

σ — расстояние от точки до кривой (гл. II, § 10).

$\sigma_{(\alpha\beta)}$, σ_{ij} — матрицы и тензор распространения натяжений (гл. IV, § 3).

$d\sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2$ — (гл. VII, § 2).

τ — время путешествия (гл. III, § 8).

$d\tau^{ij}$, $d\tau^{ijk}$ — тензорный объем ячейки (гл. I, § 10).

θ — полярный угол (гл. VII, § 2).

$\theta_{(\alpha)}$ — направляющие косинусы (гл. III, § 8).

φ — азимутальный угол (гл. VII, § 2) и фазовый угол (гл. XI, § 1).

φ_i — 4-потенциал (гл. X, § 1).

Φ — фундаментальная, или метрическая, форма (гл. I, § 1).

ω — угловая скорость вращения Земли (гл. III, § 9).

$\omega_{(\alpha\beta)}$, ω_{ij}, ω_i — матрица, тензор и вектор спина (или вращения) (гл. IV, § 3).

$\omega(x, y) = 0$ — гамильтонова поверхность (гл. I, § 7).

$\omega(x, p) = 0$ — уравнение среды в оптике (гл. XI, § 2).

$\Omega(P'\, P)$, $\Omega(P_1, P_2)$, $\Omega(x', x)$ — мировая функция (гл. II, § 1).

Ω_i, $\Omega_{i'}$, Ω_{ij}, $\Omega_{ij'}$, ... — частные и ковариантные производные мировой функции (гл. II, § 1).

$[\Omega_{ij}]$, $[\Omega_{i_1 j_2}]$, ... — пределы совпадения (гл. II, § 2).

ДОПОЛНЕНИЕ Б

Численные значения некоторых физических величин, выраженные в секундах

В соответствии с развитой в настоящей книге логической структурой теории относительности основным измерением является измерение *времени*. Длина, масса и т. д.— понятия производные, так что каждая физическая величина имеет размерность $[T^q]$, где T означает время, а q — некоторое целое или дробное число. Если $q = 1$, то соответствующая величина может быть выражена в *секундах* или любых других подходящих единицах измерения времени. Если в качестве основного прибора для измерения времени выбрать «атомные часы», то разумнее всего было бы взять в качестве единицы времени период некоторой стандартной спектральной линии, а *секунду* определить затем как некоторое (принятое по соглашению) число таких периодов. Однако не так уж существенно, какой единицей мы будем пользоваться, поскольку в физике играют важную роль лишь безразмерные величины, представляющие собой отношения величин с одинаковой размерностью. Любая выбранная нами единица обречена на то, чтобы оказаться до неудобного большой для одних целей и до неудобного малой — для других. Отметим, что для некоторых задач небесной механики секунда как единица времени отнюдь не так уж неудачна (радиус Земли, например, равен приблизительно 500 *сек*).

Представляется весьма удобным выразить все физические величины с помощью единственной единицы измерения или степеней этой единицы (*сек*, *сек*^{2}, *сек*$^{-1}$ и т. д.); однако такие числа, как $3 \cdot 10^{10}$ *сек* или $5{,}342 \cdot 10^{-3}$ *сек*, неудобны ни в записи, ни при печати, их трудно выговорить словами, и в психологическом отношении они также неудовлетворительны, так как для нашего воображения более привычны числа в интервале от 1 до 100 (или что-нибудь вроде этого). Чтобы стандартизировать названия дробных и кратных частей любой единицы, Международный комитет мер и весов на Парижском совещании в 1958 г. предложил использовать следующие префиксы и символы[1]).

Степень дробности или кратности (единицы)	Префикс	Символ	Степень дробности или кратности (единицы)	Префикс	Символ
10^{-12}	пико	p	10	дека	dk
10^{-9}	нано	n	10^2	гекто	h
10^{-6}	микро	u	10^3	кило	k
10^{-3}	милли	m	10^6	мега	M
10^{-2}	санти	c	10^9	гига	G
10^{-1}	деци	d	10^{12}	тера	T

[1]) Национальное бюро стандартов США приняло решение следовать этим рекомендациям; см. Notices Amer. Math. Soc., 7, 34 (1960).

Таким образом, например, $5\cdot10^9$sec=5 Gsec, $3\cdot10^{-9}$sec = 3nsec.

Однако, обращаясь к приведенной выше таблице, мы замечаем, что ее суть сводится к возрождению названий (традиционных греческих и латинских слов с некоторыми добавлениями) для двенадцати чисел

$$-12,\ -9,\ -6,\ -3,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 12$$

и букв алфавита, соответствующих этим названиям. Так как арабские цифры стали теперь интернациональными, то зачем нам искать их словесные синонимы?

Очень трудно добиться того, чтобы новое предложение получило всеобщее признание, однако никому не повредит, если одно из них[1]) будет сделано. Это предложение исходит из учета интернациональных лингвистических трудностей и того факта, что и авторы, и типографы тратят без пользы много времени на громоздкие обозначения степеней числа 10; кроме того, греческие и латинские слова для большинства ученых являются иностранными и легко забываются (в самом деле, ἑκατόν означает сто, тогда как ἕκτος — шесть!).

Чтобы разобраться в предлагаемых обозначениях, когда для последних произведена запись, каждый должен помнить технический смысл букв u и d. Чтобы научиться понимать эти обозначения на слух, иностранец должен выучить 13 английских слов, а именно:

up (вверху)		down (внизу)	point (после запятой)
one	two	...	nine zero
1	2		9 0

(При этом иностранец может забыть 12 слов, приведенных в перечне Международного комитета.)

Пишут

$$5\cdot10^9\,\text{sec} = 5\ \text{u}\ 9\,\text{sec},$$

что звучит, как «five up nine seconds» («пять, вверху девять, секунд»). Пишут

$$3\cdot10^{-9}\,\text{sec} = 3\ \text{d}\ 9\,\text{sec}$$

и говорят «three down nine seconds» («три, внизу девять, секунд»). Фактически, «up nine second» — это гигасекунда, а «down nine second» — наносекунда, но их смысл очевиден и незачем помнить греческие слова, означающие «великан» и «гном» соответственно.

Обозначения степеней единицы измерения sec^2, sec^3, sec^{-1} и т. д. удобны как в записи, так и при печати, однако иностранцы (знающие 13 упомянутых выше слов) скорее поняли бы нас, если бы мы говорили «sec-up-two», «sec-up-three» вместо «sec-squared», «sec-cubed». Что касается sec^{-1}, то мы могли бы сказать «sec-down-one» или «inversec».

Все сказанное следует расценивать лишь как скромное предложение, направленное на достижение удобства и ясности научного общения. Есть лишь один способ оценить это предложение: попытаться последовать ему и посмотреть, что из этого получится.

«Up-and-down» — обозначения в книге не применялись; достаточно сильным отклонением от условностей служит уж один тот факт, что все единицы выражены нами в секундах.

---

[1]) Это предложение возникло в результате обсуждения с моими коллегами; «up-and-down» («внизу - и - вверху») — обозначения были предложены Р. Дюффеном.

В помещенной ниже таблице приведены значения некоторых физических величин, выраженные в секундах. Соответствующие значения в системе CGS взяты в основном из «Таблицы физических величин» Смитсона[1]). Из них наиболее фундаментальными являются:

Скорость света $= c = 2{,}99776 \cdot 10^{10}$ *см/сек*,

Физические величины, выраженные в секундах, и обратные величины в обратных секундах ($сек^{-1}$)

	Значения в *сек*	Обратные значения в $сек^{-1}$
Один градус Цельсия (Синг [1179], стр. 43)	$3{,}804 \cdot 10^{-76}$	$2{,}629 \cdot 10^{75}$
Электроновольт	$4{,}415 \cdot 10^{-72}$	$2{,}265 \cdot 10^{71}$
Масса электрона	$2{,}255 \cdot 10^{-66}$	$4{,}435 \cdot 10^{65}$
Эрг	$2{,}756 \cdot 10^{-60}$	$3{,}629 \cdot 10^{59}$
Заряд электрона	$4{,}605 \cdot 10^{-45}$	$2{,}172 \cdot 10^{44}$
[постоянная Планка]$^{1/2}$	$1{,}351 \cdot 10^{-43}$	$7{,}402 \cdot 10^{42}$
Грамм	$2{,}476 \cdot 10^{-39}$	$4{,}039 \cdot 10^{38}$
Электростатическая единица заряда	$9{,}588 \cdot 10^{-36}$	$1{,}043 \cdot 10^{35}$
Ангстрем	$3{,}336 \cdot 10^{-19}$	$2{,}998 \cdot 10^{18}$
Период красной линии кадмия	$2{,}148 \cdot 10^{-15}$	$4{,}655 \cdot 10^{14}$
Масса Луны	$1{,}813 \cdot 10^{-13}$	$5{,}516 \cdot 10^{12}$
Масса Земли	$1{,}479 \cdot 10^{-11}$	$6{,}761 \cdot 10^{10}$
Сантиметр	$3{,}336 \cdot 10^{-11}$	$2{,}998 \cdot 10^{10}$
Километр	$3{,}336 \cdot 10^{-6}$	$2{,}998 \cdot 10^{5}$
Масса Солнца	$4{,}920 \cdot 10^{-6}$	$2{,}033 \cdot 10^{5}$
Радиус Луны	$5{,}798 \cdot 10^{-3}$	$1{,}725 \cdot 10^{2}$
Средний радиус Земли	$2{,}125 \cdot 10^{-2}$	$4{,}706 \cdot 10$
Секунда	1,000	1,000
Расстояние от Луны до Земли	1,282	$7{,}800 \cdot 10^{-1}$
Радиус Солнца	2,319	$4{,}312 \cdot 10^{-1}$
Средний радиус земной орбиты	$4{,}986 \cdot 10^{2}$	$2{,}006 \cdot 10^{-3}$
Радиус римановой кривизны для поля Земли у ее поверхности	$5{,}697 \cdot 10^{2}$	$1{,}755 \cdot 10^{-3}$
Радиус римановой кривизны поля Солнца у его поверхности	$1{,}126 \cdot 10^{3}$	$8{,}881 \cdot 10^{-4}$
Час	$3{,}600 \cdot 10^{3}$	$2{,}778 \cdot 10^{-4}$
[Стандартная плотность воды]$^{-1/2}$	$3{,}873 \cdot 10^{3}$	$2{,}582 \cdot 10^{-4}$
Величина, обратная угловой скорости Земли	$1{,}371 \cdot 10^{4}$	$7{,}292 \cdot 10^{-5}$
Сидерические сутки	$8{,}616 \cdot 10^{4}$	$1{,}161 \cdot 10^{-5}$
Радиус римановой кривизны поля Солнца у поверхности Земли	$3{,}549 \cdot 10^{6}$	$2{,}818 \cdot 10^{-7}$
Радиус кривизны мировой линии земного наблюдателя на экваторе ($=g^{-1}$, где $g=978{,}05$ CGS)	$3{,}065 \cdot 10^{7}$	$3{,}263 \cdot 10^{-8}$
Сидерический год = световой год	$3{,}156 \cdot 10^{7}$	$3{,}169 \cdot 10^{-8}$
Парсек	$1{,}030 \cdot 10^{8}$	$9{,}709 \cdot 10^{-9}$
Возраст Вселенной (приблизительная оценка)	$1{,}7 \cdot 10^{17}$	$5{,}9 \cdot 10^{-18}$

[1]) Smithsonian Physical Tables, 9th ed., Washington, 1954.

Гравитационная постоянная (константа) $\gamma = 6{,}670 \cdot 10^{-8}\, g^{-1} \cdot см^3/сек^2$.

Переход от *см* к *сек* дается формулой

$$1\ см = c^{-1}\ сек = 3{,}336 \cdot 10^{-11}\ сек,$$

а от g к *сек* — с помощью релятивистского соотношения (гл. IV, § 5).

$$1g = \gamma/c^3\ сек = 2{,}476 \cdot 10^{-39}\ сек.$$

Хотя в большинстве случаев интересен лишь порядок численных значений, в таблице эти значения даны с точностью до третьего знака, во избежание ошибок при округлении. «Радиус римановых кривизн» будет указывать лишь на степень интенсивности гравитационных полей. Они вычисляются по формуле:

$$\text{Радиус римановой кривизны} = \left(\frac{2m}{r^3}\right)^{-1/2}\ сек,$$

где m — масса тела, порождающего гравитационное поле, а r — расстояние от центра тела (и то, и другое измеряются в *сек*). Кривизна мировой линии земного наблюдателя представляет собой то, что обычно называют «ускорением, обусловленным гравитацией» (g). Радиус этой кривизны равен g^{-1}.

Используемые нами единицы измерения можно охарактеризовать следующим образом: время измеряется в *сек*, а единицы длины и массы выбраны так, что и скорость света, и гравитационная постоянная равны единице.

БЕЗРАЗМЕРНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Один грамм веса	$8{,}079 \cdot 10^{-47}$
Сила притяжения между Землей и Луной	$1{,}631 \cdot 10^{-24}$
Сила притяжения между Солнцем и Землей	$2{,}927 \cdot 10^{-22}$
Отношение массы Луны к ее радиусу	$3{,}127 \cdot 10^{-11}$
Отношение массы Земли к ее радиусу	$6{,}960 \cdot 10^{-10}$
Отношение массы Солнца к его радиусу	$2{,}122 \cdot 10^{-6}$
Относительная скорость Луны и Земли	$3{,}397 \cdot 10^{-6}$
Скорость удаления от Земли	$3{,}770 \cdot 10^{-5}$
Относительная скорость Земли и Солнца	$9{,}928 \cdot 10^{-5}$
Скорость света	1
Гравитационная постоянная (константа)	1

ДРУГИЕ ВЕЛИЧИНЫ

Давление 1 *бар* $= 10^6$ *дин/см* (около 1 *атм*)	$7{,}423 \cdot 10^{-23}$ *сек*$^{-2}$
Плотность воды (1 *г/см*$^{-3}$)	$6{,}668 \cdot 10^{-8}$ *сек*$^{-2}$

БИБЛИОГРАФИЯ

Настоящая библиография предназначена служить полезным перечнем ссылок на работы по общей теории относительности и математические работы, тесным образом связанные с этой теорией. Она не протендует и не может без значительного увеличения объема претендовать на полноту, ибо одна только библиография Леката [619] достигает около 200 страниц, не говоря уже о большом количестве работ, выполненных за тридцать пять лет со времени ее опубликования. Принцип подбора цитируемой литературы с неизбежностью несколько произволен, хотя наше намерение было вполне определенным: сконцентрировать основное вниманне на тех работах, которые можно отнести к классической теории, включая лишь некоторые основные работы, выходящие за рамки последней.

Когда ссылка делается на книгу, после фамилии автора и названия книги проставляется место и год выхода книги в свет. В случае журнальной статьи указывается том, номер страницы и год опубликования. В большинстве случаев даны ссылки на обзоры; прн этом используются следующие обозначения реферативных журналов:

JF—Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik,
MR—Mathematical Reviews,
SA—Science Abstracts, Section A: Physics.
Z—Zentralblatt für Mathematik.

Затем указываются номера тома и страницы. Кроме того, принято следующее сокращение: сборник [521] обозначается как JRT, 1955.

1. Akeley E. S., Phil. Mag., 11, 322 (1931) [Z 1, 244].
   The axially symmetric stationary gravitational field.
2. Akeley E. S., Phil. Mag., 11, 330 (1931) [Z 1, 244].
   The rotating fluid in the relativity theory.
3. Александров B., Ann. d. Phys., 72, 141 (1923) [JF 49, 653].
   Über den kugelsymmetrischen Vakuumsvorgang in der Einsteinschen Gravitationstheorie.
4. Александров B., Zs. f. Phys., 68, 813 (1931) [Z 1, 426].
   Über die allgemein koordinateninvarianten Gleichungen der Wellenmechanik (Materie und Gravitation).
5. Andress W. R., Proc. Roy. Soc., A126, 592 (1930) [JF 56, 1285].
   Some solutions of Einstein's gravitational equations for systems with axial symmetry.
6. Andress W. R., Proc. Roy. Soc., A128, 523 (1930) [JF 56, 1285].
   A general solution of Einstein's field equations for systems involving three variables.

7. A r a k i H., Ann. Phys., 7, 456 (1959) [MR **21**, 883].
On weak time-symmetric gravitational waves.

8. A r z e l i è s H., La cinématique relativiste, Paris, 1955 [MR **17**, 1014].

9. A u f e n k a m p D., Compt. Rend., **232**, 213 (1951) [MR **12**, 546].
Sur l'impossibilité d'universe stationaires clos.

10. A y m a r d A., Compt. Rend., **243**, 885 (1956) [MR **18**, 362].
Champs de tetrapodes.

11. B a c h R., Math. Zs., **9**, 110 (1921) [JF **48**, 1035].
Zur Weylschen Relativitätstheorie und der Weylschen Erweiterung des Krümmungstensorbegriffs.

12. B a c h R., Math. Zs., **13**, 119, 134 (1922) [JF **48**, 1327, 1328].
Neue Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen. A. Das Feld in der Umgebung eines langsam rotierenden kugelähnlich Körpers von beliebiger Masse in 1. und 2. Annäherung. B. Explizite Aufstellung statischer axialsymmetrischer Felder. Mit einem Zusatz über das statistische Zweikörperproblem von H. Weyl.

13. B a l a z s N. L., Journ. Opt. Soc. Amer., **45**, 63 (1955) [MR **16**, 872].
The propagation of light rays in moving media.

14. B a l a z s N. L., Astrophys. Journ., **128**, 398 (1958) [MR **20**, 498].
On relativistic thermodynamics.

15. B a l d w i n O. R., J e f f e r y G. B., Proc. Roy. Soc., **A111**, 95 (1926) [JF **52**, 932].
The relativity theory of plane waves.

16. B a r g m a n n V., Rev. Mod. Phys., **29**, 161 (1957) [MR **19**, 507].
Relativity.

17. B a s s L., P i r a n i F. A. E., Phil. Mag., **46**, 850 (1955) [MR **18**, 704].
On the gravitational effects of distant rotating masses.

18. B a u e r H., Wien. Ber., **127**, 2141 (1918) [JF **46**, 1311].
Kugelsymmetrische Lösungssysteme der Einsteinschen Feldgleichungen der Gravitation für eine ruhende, gravitierende Flüssigkeit mit linearer Zustandsgleichung.

19. B a u e r H., Phys. Zs., **19**, 163 (1918) [JF **46**, 1315].
Über die Energiekomponenten des Gravitationsfeldes.

20. B a u e r H., Phys. Zs., **29**, 954 (1928) [JF **54**, 941].
Strenge Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen für ein beliebiges kugelsymmetrisches, statisches Schwerfeld.

21. d e B e a u r e g a r d O. C., Journ. Math. Pures Appl., **28**, 63 (1949) [MR **11**, 215].
Sur le problème relativiste de la dynamique des systèmes de points en interaction.

22. B e c h e r t K., Zs. Naturforsch., **11a**, 177 (1956) [MR **17**, 1145].
Nichtlineare Feldtheorie.

23. B e c k G., Zs. f. Phys., **33**, 713 (1925) [JF **51**, 712].
Zur Theorie binärer Gravitationsfelder.

24. B e c k G., Arch. Sci. Phys. Nat. Genève, **8**, 75 (1927) [JF **52**, 932].
La propagation des ondes électromagnétiques dans la théorie de la relativité générale.

25. B e c q u e r e l J., La principe de la relativité et la théorie de la gravitation, Paris, 1922 [JF **48**, 1062].

26. B e c q u e r e l J., Champ de gravitation d'une sphère matérielle et signification physique de la formule de Schwarzschild, Paris, 1923 [JF **49**, 621].

27. B e h a c k e r M., Phys. Zs., **14**, 989 (1913) [JF **44**, 891].
Der freie Fall und die Planetenbewegung in Nordströms Gravitationstheorie.

28. B e l L., Compt. Rend., **245**, 2482 (1957) [MR **19**, 1237].
Sur les discontinuités des dérivées secondes des potentiels de gravitation.

29. B e l L., Compt. Rend., **246**, 3015 (1958) [MR **20**, 1038].
Définition d'une densité d'énergie et d'un état de radiation totale généralisée.

30. B e l L., Compt. Rend., **247**, 1094 (1958) [MR **20**, 1038].
Sur la radiation gravitationnelle.

31. B e l L., Compt. Rend., **247**, 2096 (1958) [MR **20**, 1038].
Étude algébrique d'un certain type de tenseurs de courbure. Le cas 3 de Petrov.

32. B e l L., Compt. Rend., **248**, 1297 (1959) [MR **21**, 221].
Introduction d'un tenseur du quatrième ordre.

33. B e l L., Compt. Rend., **248**, 2561 (1959) [MR **21**, 476].
Quelques remarques sur la classification de Petrov. Etude du cas 2.

34. B e l L., Compt. Rend., **250**, 2137 (1960).
Champ de gravitation avec induction.

35. B e l i n f a n t e F. J., Phys. Rev., **98**, 793 (1955) [MR **16**, 1058].
Use of the flat-space metric in Einstein's curved universe, and the «Swiss-cheese» model of space.

36. B e l i n f a n t e F. J., Rev. Mexicana Fis., **4**, 192 (1955) [MR **18**, 543].
Attempts at quantization of the gravitational field.

37. B e n e d i c t u s W., Compt. Rend., **206**, 1951 (1938) [Z **19**, 91].
Les équations de Dirac dans un espace à métrique riemannienne.

38. B e r g m a n n P. G., Introduction to the theory of relativity, New York, 1942 [MR **4**, 55] (см. перевод; Б е р г м а н П., Введение в теорию относительности, ИЛ., 1947).

39. B e r g m a n n P. G., Phys. Rev., **84**, 1026 (1951) [MR **14**, 231].
Generalized statistical mechanics.

40. B e r g m a n n P. G., Science, **123**, 487 (1956) [MR **17**, 697].
Fifty years of relativity.

41. B e r g m a n n P. G., Phys. Rev., **103**, 780 (1956) [MR **18**, 363].
On Einstein's λ transformations.

42. B e r g m a n n P. G., Phys. Rev., **112**, 287 (1957) [MR **20**, 938].
Conservation laws in general relativity as the generators of coordinate transformations.

43. B e r g m a n n P. G., J a n i s A. I., Phys. Rev., **111**, 1191 (1958) [MR **20**, 735].
Subsidiary conditions in covariant theories.

44. B e r g m a n n P. G., P e n f i e l d R., S c h i l l e r R., Z a t z k i s H., Phys. Rev., **80**, 81 (1950) [MR **12**, 292].
The Hamiltonian of the general theory of relativity with electromagnetic field.

45. B e r g m a n n P. G., T h o m s o n R., Phys. Rev., **89**, 400 (1953) [MR **14**, 915].
Spin and angular momentum in general relativity.

46. B e r t o t t i B., Nuovo Cimento, **12**, 226 (1954) [MR **17**, 201].
On the two-body problem in general relativity.

47. B e r t o t t i B., Nuovo Cimento, **2**, 231 (1955) [MR **17**, 545].
On the motion of charged particles in general relativity.

48. B e r t o t t i B., Nuovo Cimento, **3**, 655 (1956) [MR **18**, 177].
Gravitational motion and Hamilton's principle.

49. B e r t o t t i B., Nuovo Cimento, **4**, 898 (1956) [MR **18**, 703].
On gravitational motion.

50. B h a t t M. P., Journ. Maharaja Sayajirao Univ. Baroda, **3**, No. 2, 119 (1954) [MR **16**, 756].
A new form of line element for spherically symmetric solutions in general relativity.

51. B h a t t a c h a r y a S., Progr. Theor. Phys., **11**, 613 (1954) [MR **16**, 409].
The general theory of relativity and the expanding universe.
52. B h a t t a c h a r y a S., Nuovo Cimento, **4**, 501 (1956) [MR **18**, 362].
On certain hydrodynamical considerations of an imperfect fluid in a general relativistic field.
53. B i r k h o f f G. D. [в сотрудничестве с Р. Лангером (R. Langer)], Relativity and modern physics, Cambridge, 1923 [JF **49**, 619].
54. B i r k h o f f G. D., The origin, nature and influence of relativity, New York, 1925 [JF **52**, 917].
55. B i r k h o f f G. D., Relativity and modern physics, Cambridge, 1927.
56. B i r k h o f f G. D., Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **13**, 160 (1927); Coll. Math. Papers, **2**, 737.
A theory of matter and electricity.
57. B i r k h o f f G. D., Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **29**, 231 (1943); Coll. Math. Papers, **2**, 920 [MR **4**, 285].
Matter, electricity and gravitation in flat space-time.
58. B i r k h o f f G. D., Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **30**, 324 (1944); Coll. Math. Papers, **2**, 973 [MR **6**, 72].
Flat space-time and gravitation.
59. B i r k h o f f G. D., Bol. Soc. Mat. Mexicana, **1**, No. 4; 5 (1944) [MR **6**, 240].
Математические концепции времени и гравитации (на испанском).
60. B i r k h o f f G. D., Collected mathematical papers, vol. 2, New York, 1950, p. 737, 920, 929, 967, 973.
61. B l a c k w e l l A., Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **52**, 327 (1932) [Z **4**, 424].
The geodesics in Einstein's unified field theory.
62. B l o c h L., Ann. phys., **9**, 28 (1918).
Sur les théories de la gravitation.
63. B o c h n e r S., Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **41**, 485 (1955) [MR **17**, 1015].
Stationary space-time in general relativity.
64. Б о г о р о д с к и й А. Т., АН СССР, Циркуляр Пулковской обсерватории, № 28, 52 (1939) [MR **6**, 242].
Допплер-эффект в статическом гравитационном поле.
65. B o k o w s k i A., Zs. f. Phys., **21**, 211 (1924) [JF **50**, 595].
Über die Energiekomponenten in Hilberts Theorie der Materie.
66. B o n d i H., Mon. Not. Roy. Ast. Soc., **107**, 410 (1947) [MR **10**, 214].
Spherically symmetric models in general relativity.
67. B o n d i H., Cosmology, Cambridge, 1952 [MR **14**, 912].
68. B o n d i H., Nature, **179**, 1072 (1957).
Plane gravitational waves in general relativity.
69. B o n d i H., Rev. Mod. Phys., **29**, 423 (1957) [MR **19**, 814].
Negative mass in general relativity.
70. B o n d i H., P i r a n i F. A. E., R o b i n s o n I., Proc. Roy. Soc., **A251**, 519 (1959).
Gravitational waves in general relativity. III. Exact plane waves.
71. B o n n o r W. B., Proc. Phys. Soc., **A66**, 145 (1953) [MR **14**, 1133].
Certain exact solutions of the equations of general relativity with an electrostatic field.
72. B o n n o r W. B., Proc. Phys. Soc., **A67**, 225 (1954) [MR **15**, 995].
Static magnetic fields in general relativity.
73. B o n n o r W. B., Zs. Astrophys., **35**, 10 (1954) [MR **17**, 202].
The stability of cosmological models.
74. B o n n o r W. B., Mon. Not. Roy. Ast. Soc., **115**, 310 (1955) [MR **18**, 261].
The instability of the Einstein universe.

75. Bonnor W. B., Journ. Math. Mech., **6**, 203 (1957) [MR **19**, 228].
Non-singular fields in general relativity.
76. Bonnor W. B., Ann. Inst. H. Poincaré, **15**, 146 (1957) [MR **20**, 843].
Les ondes gravitationnelles en relativité générale, II.
77. Bonnor W. B., Proc. Roy. Soc., **A251**, 55 (1959) [MR **21**, 356].
The mechanics of general relativity.
78. Bonnor W. B., Phil. Trans. Roy. Soc., **A251**, 233 (1959).
Spherical gravitational waves.
79. Bonnor W. B., Journ. Math. Mech., **9**, 439 (1960).
The problem of evolution in general relativity.
80. Brahmachary R. L., Naturwiss., **40**, 456 (1953) [MR **15**, 835].
Sur les propriétés d'un modèle instable de cosmologie contenant un «fluide imparfait».
81. Brahmachary R. L., Naturwiss., **41**, 82, 136 (1954) [MR **15**, 657].
On the derivation of Friedmann's solution for a new cosmological model.
82. Brahmachary R. L., Nuovo Cimento, **4**, 1216 (1956) [MR **18**, 543].
A generalization of Reissner—Nordström solution, I.
83. Brahmachary R. L., Nuovo Cimento, **6**, 1502 (1957) [MR **19**, 1140].
A class of exact solutions of the combined gravitational and electro-magnetic field equations of general relativity.
84. Brdička M., Proc. Roy. Irish Acad., A54, 137 (1951) [MR **13**, 170].
On gravitational waves.
85. Бреховских Л. М., ДАН СССР, **49**, 482 (1945) [MR 8, 302].
Излучение гравитационных волн электромагнитными волнами.
86. Bridgman P. W., Einstein's theories and the operational point of view. In Albert Einstein: Philosopher-Scientist, Evanston, 1949, p. 335.
87. Brill D. R., Time-symmetric solutions of the Einstein equations: initial value problem and positive definite mass, Doctoral Dissertation, Princeton Univ., 1959.
88. Brill D. R., Ann. d. Phys., **7**, 466 (1959).
On the positive-definite mass of the Bondi — Weber — Wheeler time-symmetric gravitational waves.
89. Brill D. R., Wheeler J. A., Rev. Mod. Phys., **29**, 465 (1957) [MR **19**, 1020].
Interactions of neutrinos and gravitational fields.
90. Brillouin L., Wave propagation and group velocity, New York, 1960.
91. Brillouin M., Compt. Rend., **174**, 1585 (1922) [JF 48, 1001].
Champ isotrope. Sphère fluide hétérogène.
92. Brillouin M., Compt. Rend., **175**, 923 (1922) [JF **48**, 1002].
Gravitation einsteinienne et gravitation newtonienne; à propos d'une récente note de M. Le Roux.
93. Brillouin M., Compt. Rend., **175**, 1009 (1922) [JF **48**, 1002].
Gravitation einsteinienne. Statique. Points singuliers. Le point matériel. Remarques diverses.
94. Brillouin M., Journ. Phys. Rad., **4**, 43 (1923).
Les points singuliers de l'univers d'Einstein.
95. Brodetsky S., Proc. Leeds Phil. Lit. Soc. Sci. Sect., **1**, 44 (1926) [JF **52**, 927].
The equations of the gravitational field in orthogonal co-ordinates.
96. Бронштейн М., ЖЭТФ, **6**, 195 (1936) [Z, **14**, 87].
Квантование гравитационных волн.
97. Buchdahl H. A., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., **34**, 66 (1948) [MR **9**, 538].
A special class of solutions of the equations of the gravitational field arising from certain gauge-invariant action principles.
98. Buchdahl H. A., Proc. Edinburgh Math. Soc., **8**, 89 (1948) [MR **10**, 408].
On Eddington's higher order equations of the gravitational field.

99. B u c h d a h l H. A., Acta Math., 85, 63 (1951) [MR 12, 746].
Über die Variationsableitung von Fundamentalinvarianten beliebig hoher Ordnung.
100. B u c h d a h l H. A., Proc. Edinburgh Math. Soc., 10, 16 (1953) [MR 14, 1133].
On a set of conform-invariant equations of the gravitational field.
101. B u c h d a h l H. A., Quart. Journ. Math., Oxford Ser., 5, 116 (1954) [MR 16, 531].
Reciprocal static solutions of the equations $G_{\mu\nu}=0$.
102. B u c h d a h l H. A., Austral. Journ. Phys., 9, 13 (1956) [MR 18, 704].
Reciprocal static solutions of the equations of the gravitational field.
103. B u h l A., Compt. Rend., 171, 345 (1920) [JF 47, 804].
Sur les symétries du champ électromagnétique et gravifique.
104. B u h l A., Compt. Rend., 171, 547 (1920) [JF 47, 804].
Sur la formule de Stokes dans l'espace — temps.
105. B u h l A., Compt. Rend., 171, 786 (1920) [JF 47, 804].
Sur les symétries du champ gravifique et l'extension lorentzienne du principe d'Hamilton.
106. B u h l A., Compt. Rend., 175, 923 (1922) [JF 48, 997].
Sur le mouvement séculaire du périhélie de Mercure.
107. B u h l A., Formules stokiennes, Paris, 1926 [JF 52, 779].
108. B u r g a t t i P., Atti Accad. Naz. Lincei Rend., 19, 199 (1934) [Z 9, 41].
Lo spostamento dei perihelii nella teoria della relatività con riguardo allo schiacciamento solare.
109. B u s e m a n n H., The geometry of geodesics, New York, 1955 [MR 17, 779].
110. C a h e n M., Compt. Rend., 243, 737 (1956) [MR 18, 177].
Conditions d'intégrabilité du champ électromagnétique singulier.
111. C a l l a w a y J., Phys. Rev., 112, 290 (1958) [MR 20, 736].
Klein-Gordon and Dirac equations in general relativity.
112. C a m m G. L., Nature, 155, 754 (1945) [MR 7, 88].
The two-body gravitational problem in kinematical relativity.
113. C a r r A. J., Proc. London Math. Soc., 35, 523 (1933) [Z 7, 185].
Solutions inside the sphere and cylinder on Einstein's theory.
114. C a r t a n É., Oeuvres complètes, Paris, v. I, 1952; v. II, 1954; v. III, 1955 [MR 14, 343; 15, 383; 17, 697].
115. C a r t a n É., Journ. Math. Pures Appl., 1, 141 (1922); (см. то же [114], v. III, pt. 1, p. 549 [JF 48, 993].
Sur les équations de la gravitation d'Einstein.
116. C a r t a n É., Compt. Rend., 174, 437 (1922); [114] v. 1, pt. 1, p. 613. [JF 48, 854].
Sur une définition géométrique du tenseur d'énergie d'Einstein.
117. C a r t a n É., Compt. Rend., 174, 734 (1922); [114], v. 1, pt. 1, p. 619 [JF 48, 854].
Sur les espaces généralisés et la théorie de la relativité.
118. C a r t a n É., Compt. Rend., 174, 857 (1922); [114], v. III, pt. 1, p. 622 [JF 48, 854].
Sur les espaces conformes généralisés et l'univers optique.
119. C a r t a n É., Compt. Rend., 174, 1104 (1922); [114], v. III, pt. 1, p. 625 [JF 48, 854].
Sur les équations de structure des espaces généralisés et l'expression analytique du tenseur d'Einstein.
120. C a r t a n É., Ann. Ec. Norm., 40, 325 (1923); 41, 1 (1924); 42, 17 (1925); [114], v. III, pt. 1, p. 959, 799; v. III, pt. 2, p. 921 [JF 49, 542; 50, 685; 51, 581].
Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée.
121. C a r t a n É., Bull. Sci. Math., 48, 294 (1924); [114], v. III, pt. 1, p. 863 [JF 50, 589].
Les récentes généralisations de la notion d'espace.

122. C a r t a n É., La géométrie des espaces de Riemann, Paris, 1925 [JF 51, 566].
123. C a r t a n É., Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, Paris, 1928 [JF 54, 755].
124. C a r t a n É., Bull. Soc. Math. France, 59, 88 (1931); [114], v. II, pt. 2, p. 1199 [Z 2, 264].
Sur la théorie des systèmes en involution et ses applications à la relativité.
125. C a r t a n É., Compt. Rend., 196, 582 (1933); [114], v. III, pt. 2, p. 1245 (Z 6, 225].
Sur les espaces de Finsler.
126. C a s t e l n u o v o G., Mon. Not. Roy. Astr. Soc., 91, 829 (1931) [Z 2, 239].
De Sitter's universe and the motion of nebulae.
127. C a s t o l d i L., Atti Accad. Ligure, 9, 5 (1952) [MR 15, 169].
Sulla struttura formale della relatività e su una classe notevole di connessioni matriche di interesse relativistico.
128. C a s t o l d i L., Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 25, 44 (1955) [MR 17, 675].
Relatività Riemanniana unitaria.
129. C a t t a n e o C., Rend. Acc. Naz. Lincei, Cl. fis. mat. nat., 27, 54 (1959).
Moto di un fotono libero in un campo gravitazionale.
130. C a t t a n e o C., Nuovo Cimento, 13, 237 (1959).
Conservation laws in general relativity.
131. C a t t a n e o C., Annali di Mat., 48, 361 (1959).
Proiezioni naturali e derivazione trasversa in una varietà riemanniana a metrica iperbolica normale.
132. C h a s e D. M., Phys. Rev., 95, 243 (1954) [MR 16, 80].
The equations of motion of charged test particles in general relativity.
133. C h a t t e r j e e N. K., Bull. Calcutta Math. Soc., 24, 95 (1932) [Z 6, 85].
Note on the type of expanding universe recently proposed by Einstein and de Sitter.
134. C h a z y J., Compt. Rend., 173, 905 (1921) [JF 48, 1002].
Sur les fonctions arbitraires figurant dans le ds^2 de la gravitation einsteinienne.
135. C h a z y J., Compt. Rend., 174, 1157 (1922) [JF 48, 1003].
Sur les vérifications astronomiques de la théorie de la relativité.
136. C h a z y J., Compt. Rend., 177, 303, 939 (1923); Bull. Soc. Math. France, 52, 17 (1924) [JF 49; 645, 646; 50, 599].
Sur le champ de gravitation de deux masses fixes dans la théorie de la relativité.
137. C h a z y J., Compt. Rend., 181, 1053 (1925) [JF 51, 725].
Sur l'avance du périhélie de Mercure.
138. C h a z y J., Compt. Rend., 182, 1134 (1926) [JF 52, 1011].
Sur le calcul de l'avance du périhélie de Mercure sous l'action des autres planètes.
139. C h a z y J., Compt. Rend., 183, 854 (1926) [JF 52, 928].
Sur le champ de gravitation à l'intérieur d'une sphère creuse en rotation dans la théorie de la relativité.
140. C h a z y J., Compt. Rend., 183, 1093 (1926) [JF 52, 924].
Sur le formule de l'effet Doppler-Fizeau dans l'univers de de Sitter.
141. C h a z y J., La théorie de la relativité et la mécanique céleste, t. 1, Paris, 1928 [JF 54, 939].
142. C h a z y J., La théorie de la relativité et la mécanique céleste, t. 2, Paris, 1930 [JF 56, 1283].
143. C h o u P. Y., Amer. Journ. Math., 53, 289 (1931) [Z 1, 428].
The gravitational field of a body with rotational symmetry in Einstein's theory of gravitation.
144. C h o u P. Y., Amer. Journ. Math., 59, 754 (1937) [Z 17, 384].
Isotropic static solutions of the field equations in Einstein's theory of gravitation.
145. C h o u P. Y., Chin. Journ. Phys., 3, 76 (1939) [Z 22, 282].
On the foundations of Friedmann universe.

146. C h o u P. Y., Chin. Journ. Phys., **3**, 313 (1939) [Z **22**, 282].
Note on spherical symmetry of space and the foundations of Friedmann universe.
147. C h o u P. Y., Amer. Journ. Math., **62**, 43 (1940) [Z **22**, 419; MR **1**, 125].
On the method of finding isotropic static solutions of Einstein's field equations of gravitation.
148. C i m i n o M., Atti. Accad. Naz. Lincei Rend., **21**, 347 (1935) [Z **11**, 377].
Sullo studio di uno moto einsteiniano mediante i principi di equivalenza del Levi-Civita.
149. C l a r k G. L., Proc. Roy. Soc., **A177**, 227 (1941) [MR **3**, 212].
The derivation of mechanics from the law of gravitation in relativity theory.
150. C l a r k G. L., Mon. Not. Roy. Astr. Soc., **106**, 457 (1946) [MR **9**, 310].
The decay of the gravitational energy of a double star.
151. C l a r k G. L., Proc. Cambr. Phil. Soc., **43**, 164 (1947) [MR **8**, 496].
The gravitational field of a rotating cohesive system.
152. C l a r k G. L., Proc. Cambr. Phil. Soc., **43**, 178 (1947) [MR **8**, 496].
Note on the velocity of propagation of gravitation.
153. C l a r k G. L., Phil. Mag., **39**, 747 (1948) [MR **10**, 579].
The gravitational field of a rotating nearly spherical body.
154. C l a r k G. L., Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **A62**, 412 (1949) [MR **11**, 59].
The gravitational mass of a system of particles.
155. C l a r k G. L., Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **A62**, 424 (1949) [MR **11**, 59].
The equivalence of the gravitational and invariant mass of an isolated body at rest.
156. C l a r k G. L., Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **A62**, 427 (1949) [MR **11**, 59].
The internal and external fields of a particle in a gravitational field.
157. C l a r k G. L., Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **A62**, 434 (1949) [MR **11**, 59].
The mechanics of continuous matter in the relativity theory.
158. C l a r k G. L., Proc. Cambr. Phil. Soc., **45**, 405 (1949) [MR **11**, 281].
The problem of a rotating incompressible disc.
159. C l a r k G. L., Proc. Roy. Soc., **A201**, 488 (1950) [MR **12**, 292].
The external gravitational and electromagnetic fields of rotating bodies.
160. C l a r k G. L., Proc. Roy. Soc., **A201**, 510 (1950) [MR **12**, 293].
Note on the problem of a rotating mass of perfect fluid in relativity mechanics.
161. C l a r k G. L., Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **A64**, 49 (1954) [MR **15**, 835].
The problem of two bodies in Whitehead's theory.
162. C l e m e n c e G. M., Rev. Mod. Phys., **19**, 361 (1947) [SA **51**, 179].
The relativity effect in planetary motion.
163. C l e m e n c e G. M., Proc. Amer. Phil. Soc., **93**, 532 (1949) [SA **53**, 446].
Relativity effects in planetary motion.
164. C o b u r n N., Journ. Math. Mech., **7**, 449 (1958) [MR **20**, 929].
The method of characteristics for a perfect compressible fluid in general relativity and non-steady Newtonian mechanics.
165. C o m b r i d g e J. T., Phil. Mag., **45**, 726 (1923) [JF **49**, 655].
The gravitational field of a particle on Einstein's theory.
166. C o m b r i d g e J. T., Phil. Mag., **1**, 276 (1926) [JF **52**, 928].
The field of a thick spherical shell on Einstein's theory or relativity.
167. C o m b r i d g e J. T., Phil. Mag., **20**, 971 (1935) [Z **13**, 40].
Some applications of Whittaker's extension of Gauss's theorem in general relativity.
168. C o p s o n E. T., Proc. Roy. Soc., **A118**, 184 (1928) [JF **54**, 946].
On electrostatics in a gravitation field.
169. C o p s o n E. T., R u s e H. S., Proc. Edinburgh Math. Soc., **60**, 117 (1940) [MR **2**, 20].
Harmonic Riemannian spaces.

170. C o r i n a l d e s i E., P a p a p e t r o u A., Proc. Roy. Soc., **A209**, 259 (1951) [MR **13**, 695].
Spinning test-particles in general relativity. II.
171. C o x e t e r H. S. M., Amer. Math. Monthly, **50**, 217 (1943) [MR **4**, 226].
A geometrical background for de Sitter's world.
172. C o x e t e r H. S. M., W h i t r o w G. J., Proc. Roy. Soc., **A201**, 417 (1950) [MR **12**, 866].
World-structure and non-Euclidean honeycombs.
173. C r a i g H. V., H o r t o n C. W., Tensor N. S., **1**, 47 (1951) [MR **13**, 384].
On extensors and the Hamiltonian equations.
174. C r o z e F., Ann. phys., **19**, 93 (1923) [SA **26**, 856].
Les raies du spectre solaire et la théorie d'Einstein.
175. C u n n i n g h a m E., Relativity, the electron theory and gravitation, 2nd ed., London, 1921 [JF **48**, 1063].
176. C u n n i n g h a m E., Phil. Mag., **45**, 276 (1923).
The field of an electron on Einstein's theory.
177. C u r t i s A. R., Proc. Roy. Soc., **A200**, 248 (1950) [MR **11**, 468].
The velocity of sound in general relativity, with a discussion of the problem of the fluid sphere with constant velocity of sound.
178. C u r z o n H. E. J., Proc. London Math. Soc., **23**, XXIX (1924) [JF **51**, 712].
Bipolar solutions of Einstein's gravitation equations.
179. C u r z o n H. E. J., Proc. London Math. Soc., **23**, 477 (1924) [JF **50**, 598].
Cylindrical solutions of Einstein's gravitation equations.
180. van D a n t z i g D., Proc. Cambr. Phil. Soc., **30**, 421 (1934) [Z **10**, 187].
The fundamental equations of electromagnetism, independent of metrical geometry.
181. van D a n t z i g D., Akad. Wetensch. Amsterdam, **37**, 521, 526, 643, 825 (1934) [Z **10**, 187, 282].
Electromagnetism independent of metrical geometry. I. The foundations. II. Variational principles and further generalisation of the theory. III. Mass and motion. IV. Momentum and energy; waves.
182. van D a n t z i g D., Physica, **6**, 673 (1939) [Z **22**, 95; MR **1**, 96].
On the phenomenological thermodynamics of moving media.
183. van D a n t z i g D., Nederl. Akad. Wetensch. Proc., **42**, 608 (1939) [Z **22**, 176 MR **1**, 96].
On relativistic gas theory.
184. van D a n t z i g D., Nederl. Akad. Wetensch. Proc., **43**, 387, 609 (1940) [MR **2**, 139, 140].
On the thermo-hydrodynamics of perfectly perfect fluids.
185. van D a n t z i g D., On the relation between geometry and physics and the concept of spacetime, JRT, 1955, p. 48.
186. D a r m o i s G., Compt. Rend., **176**, 646, 731 (1923) [JF **49**, 642].
Sur l'intégration locale des équations d'Einstein.
187. D a r m o i s G., Compt. Rend., **177**, 1276 (1923) [JF **49**, 647].
Sur le problème intérieur dans le cas d'un espace-temps courbe à symétrie sphérique.
188. D a r m o i s G., Les équations de la gravitation, Paris, 1927 [JF **53**, 816].
189. D a r w i n C., Proc. Roy. Soc., **A249**, 180 (1959) [MR **20**, 937].
The gravity field of a particle.
190. D a s A., Progr. Theor. Phys., **17**, 373 (1957) [MR **20**, 116].
Effects of central spin on planetary orbits.
191. D a s A., Progr. Theor. Phys., **18**, 554 (1957).
The artificial satellite and the relativistic red shift.

192. D a t t a B., Zs. f. Phys., **103**, 546 (1936) [Z. **15**, 278].
Eine Verallgemeinerung des Schwarzschildschen Problem.
193. D a t t a B., Zs. f. Phys., **108**, 314 (1938) [Z **18**, 186].
Über eine Klasse von Lösungen der Gravitationsgleichungen der Relativität.
194. D a v i s W. R., Zs. f. Phys., **148**, 1 (1957) [MR **19**, 104].
Über «starke» und «quasi-starke» Erhaltungssätze allgemein kovarianter Feldtheorien und ihre allgemeinen differenziellen Identitäten.
195. D e b e v e r R., Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci., **42**, 313, 608 (1956) [MR **18**, 761].
Etude gémmétrique du tenseur de Riemann-Christoffel des espaces de Riemann à quatre dimensions.
196. D e b e v e r R., Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci., **42**, 1033 (1956) [MR **19**, 169].
Sur les espaces de Riemann à quatre dimensions à courbure totalement dégénérée.
197. D e b e v e r R., Compt. Rend., **249**, 1324 (1959).
Sur le tenseur de super-énergie.
198. D e b e v e r R., Compt. Rend., **249**, 1744 (1959).
Tenseur de super-énergie, tenseur de Riemann: cas singuliers.
199. D e b e v e r R., Compt. Rend., **250**, 64 (1960).
Tenseur de super-énergie et composantes irréductibles du tenseur de Riemann.
200. D e l s a r t e J., Compt. Rend., **196**, 888 (1933) [Z **6**, 376].
Sur un ds^2 à symétrie axiale non statique et sur quelques problèmes connexes.
201. D e l s a r t e J., Journ. Math. Pures Appl., **13**, 19 (1934) [Z **8**, 417].
Sur les ds^2 binaires et le problème d'Einstein.
202. D e l s a r t e J., Sur les ds^2 d'Einstein à symétrie axiale, Paris, 1934 [Z **10**, 223].
203. D h a r S. C., Indian Phys. Math. Journ., **6**, 15 (1935) [Z **11**, 377].
On electromagnetic waves in gravitational fields.
204. D i e n e s P., Palermo Rend., **47**, 144 (1923) [JF **49**, 546].
Sur l'intégration des équations du déplacement parallèle de M. Levi-Civita.
205. D i e n e s P., Journ. Math. Pures Appl., **3**, 79 (1924) [JF **50**, 494].
Sur la structure mathématique du calcul tensoriel.
206. D i n g l e H., Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **19**, 559 (1933) [Z **6**, 421].
Values of T^{ν}_{μ} and the Christoffel symbols for a line element of considerable generality.
207. D i n g l e H., Mon. Not. Roy. Astr. Soc., **94**, 134 (1933) [Z **8**, 379].
On isotropic models of the universe, with special reference to the stability of the homogeneous and static states.
208. D i r a c P. A. M., Ann. of Math., **36**, 657 (1935) [Z **12**, 135].
The electron wave equation in De-Sitter space.
209. D i r a c P. A. M., Ann. of Math., **37**, 429 (1936) [Z **14**, 80].
Wave equations in conformal space.
210. D i r a c P. A. M., Proc. Roy. Soc., **A246**, 333 (1958) [MR **20**, 115].
The theory of gravitation in Hamiltonian form.
211. D i t t r i c h A., Časopis, **53**, 38 (1924) [JF **50**, 570].
Метод Гамильтона — Якоби в эйнштейновской механике (на испанском).
212. D i v e P., Compt. Rend., **223**, 232 (1946) [MR **8**, 412].
Anisotropie de l'éther sur un foyer d'énergie ponctuel à symétrie sphérique en translation uniforme.
213. d e D o n d e r T., Théorie du champ électromagnétique de Maxwell et du champ gravifique d'Einstein, Paris, 1920 [JF **47**, 827].
214. d e D o n d e r T., La gravifique einsteinienne, Paris, 1921 [JF **48**, 1061].
215. d e D o n d e r T., Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci., **8**, 420 (1922).
Champ gravifique d'un électron purement électrique.
216. d e D o n d e r T., Belg. Bull. Sci., **10**, 77, 182 (1924) [JF **50**, 573].
Sur la fonction caractéristique de la gravifique.

217. de Donder T., La gravifique de Weyl—Eddington — Einstein, Paris, 1924 [JF **50**, 577].
218. de Donder T., Introduction à la gravifique einsteinienne, Paris, 1925 [JF **51**, 700].
219. de Donder T., De l'intégration des équations du mouvement dans un champ gravifique massique et électromagnétique, Grenoble, 1925, p. 52 [JF **52**, 932].
220. de Donder T., Théorie des champs gravifiques, Paris, 1926 [JF **52**, 917].
221. de Donder T., Compt. Rend., **186**, 1599 (1928) [JF **54**, 948].
Extension de la gravifique einsteinienne à la thermodynamique.
222. de Donder T., Compt. Rend., **187**, 28 (1928), [JF **54**, 948].
La thermodynamique relativiste des systèmes électromagnétiques en mouvement.
223. de Donder T., Applications de la gravifique einsteinienne, Paris, 1930 [JF **56**, 1283].
224. de Donder T., Comm. Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci., **20**, 986 (1934) [Z **11**, 42].
La gravifique tourbillonnaire. I.
225. de Donder T., Théorie invariantive du calcul des variations, Paris, 1935 [Z **3**, 169; JF **61**, 1283].
226. de Conder T., Dupont Y., Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci., **18**, 680, 782, 99 (1932); **19**, 370 (1933) [Z **5**, 320; **7**, 186].
Théorie relativiste de l'élasticité et de l'électromagnétostriction.
227. de Donder T., Dupont Y., Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci., **22**, 907, 992, 1378 (1936); **23**, 17, 102 (1937) [Z **15**, 184; **16**, 233, 422; **17**, 282].
Théorie nouvelle de la dynamique des systèmes continus.
228. Droste J., Proc. K. Akad. Wet. Amsterdam, **17**, 998 (1915) [JF **45**, 1129].
On the field of a single centre in Einstein's theory of gravitation.
229. Droste J., Proc. K. Akad. Wet. Amsterdam, **18**, 760 (1915) [JF **45**, 1150].
On the field of two spherical fixed centres in Einstein's theory of gravitation.
230. Droste J., Proc. K. Akad. Wet. Amsterdam, **19**, 197 (1917) [JF **46**, 1331].
The field of a single centre in Einstein's theory of gravitation, and the motion of a particle in that field.
231. Droste J., Proc. K. Akad. Wet. Amsterdam, **19**, 447 (1917) [JF **46**, 1332].
The field of *n* moving centres in Einstein's theory of gravitation.
232. Дуан И-Ши, ЖЭТФ, **27**, 756 (1954) [MR **16**, 1059].
Обобщения регулярных решений уравнений Эйнштейна для гравитации и уравнений Максвелла для электромагнетизма для заряженной точечной частицы.
233. Eddington A. S., Proc. Roy. Soc., **A99**, 104 (1921) [JF **48**, 1040].
A generalisation of Weyl's theory of the electromagnetic and gravitational fields.
234. Eddington A. S., Space, time and gravitation. An outline of the general relativity theory, Cambridge, 1921 [JF **48**, 1063].
235. Eddington A. S., Phil. Mag., **42**, 800 (1921) [JF **48**, 1325].
On the relativity of field and matter.
236. Eddington A. S., Phil. Mag., **43**, 174 (1922) [JF **48**, 1325].
On the significance of Einstein's gravitational equations in terms of the curvature of the world.
237. Eddington A. S., Phil. Mag., **46**, 1112 (1923) [JF **49**, 640, 655; SA **27**, 374].
On the spontaneous loss energy of a spinning rod according to the relativity theory.
238. Eddington A. S., Proc. Roy. Soc., **A102**, 268 (1923) [JF **49**, 640].
The propagation of gravitational waves.
239. Eddington A. S., The mathematical theory of relativity, 2nd ed., Cambridge, 1924 [JF **50**, 605].
240. Eddington A. S., Nature, **113**, 192 (1924).
A comparison of Whitehead's and Einstein's formulae.

241. E d d i n g t o n A. S., Mon. Not. Roy. Astr. Soc., **90**, 668 (1930) [JF **56**, 789 (см. также Robertson [989])].
On the instability of Einstein's spherical world.
242. E d d i n g t o n A. S., Proc. Roy. Soc., **A133**, 311 (1931).
The properties of wave tensors.
243. E d d i n g t o n A. S., Proc. Roy. Soc., **A133**, 605 (1931) [Z **4**, 43].
On the value of the cosmical constant.
244. E d d i n g t o n A. S., The expanding universe, Cambridge, 1933 [Z **6**, 234].
245. E d d i n g t o n A. S., The relativity theory of protons and electrons, Cambridge, 1936 [Z **15**, 422].
246. E d d i n g t o n A. S., Amer. Journ. Math., **59**, 1 (1936).
The cosmical constant and the recession of the nebulae.
247. E d d i n g t o n A. S., Comm. Dublin Inst. Adv. Studies, **A2** (1943) [MR **7**, 89].
The combination of relativity theory and quantum theory.
248. E d d i n g t o n A. S., C l a r k G. L., Proc. Roy. Soc., **A166**, 465 (1938) [Z **19**, 91].
The problem of *n* bodies in general relativity.
249. E i e s l a n d J., Trans. Amer. Math. Soc., **27**, 213 (1925) [JF **51**, 706].
The group of motions of an Einstein space.
250[1]. E i n s t e i n A., Naturforsch. Ges. Zurich Vierteljahrschrift, **58**, 284 (1913); то же на английском см. в журн. Arch. Sci. Phys. Nat., **37**, 5 (1914) [JF **44**, 771, 889].
Physicalische Grundlager einer Gravitationstheorie.
251. E i n s t e i n A., Phys. Zs., **14**, 1249 (1913) [JF **44**, 890].
Zum gegenwärtigen Stande des Gravitationsproblems.
252. E i n s t e i n A., Naturforsch. Ges. Zurich Vierteljahrschrift, **59**, 4 (1914) [JF **45**, 1114].
Zur Theorie der Gravitation.
253. E i n s t e i n A., Phys. Zs., **15**, 176 (1914) [JF **45**, 1117].
Prinzipielles zur verallgemeinerten Relativitätstheorie und Gravitationstheorie.
254. E i n s t e i n A., Die formale Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, Preuss. Akad. Wiss. Sitz., 1914, Pt. 2, S. 1030 [JF **45**, 1118].
255. E i n s t e i n A., Über die Grundgedanken der Relativitätstheorie und Anwendung dieser Theorie in der Astronomie, Preuss. Akad. Wiss. Sitz., 1915, S. 315 [JF **45**, 1119].
256. E i n s t e i n A., Zur allgemeinen Relativitätstheorie, Preuss. Akad. Wiss. Sitz., 1915, pt. 2, S. 778, 799 [JF **45**, 1119].
257. E i n s t e i n A., Erklärung der Perihelbewegung des Mercur aus der allgemeinen Relativitätstheorie, Preuss. Akad. Wiss. Sitz., 1915, Pt. 2, S. 831 [JF **45**, 1120].
258. E i n s t e i n A., Die Feldgleichungen der Gravitation, Preuss. Akad. Wiss. Sitz., 1915, Pt. 2, S. 844 [JF **45**, 1120].
259. E i n s t e i n A., Ann. d. Phys., **49**, 769 (1916) [JF **46**, 1293].
Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie (Та же работа в отдельном издании, Leipzig, 1916.)
260. E i n s t e i n A., Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation, Preuss. Akad. Wiss. Sitz., 1916, S. 688 [JF **46**, 1293].
261. E i n s t e i n A., Hamiltonisches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie, Preuss. Akad. Wiss. Sitz., 1916, S. 1111 [JF **46**, 1294].
262. E i n s t e i n A., Eine neue Deutung der Maxwellschen Feldgleichungen der Elektrodynamik, Preuss. Akad. Wiss. Sitz., 1916, S. 184 [JF **46**, 1351].
263. E i n s t e i n A., Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie, Preuss. Akad. Wiss. Sitz., 1917, S. 142 [JF **46**, 1295 (см. также Robertson [989])].

[1]) Полную библиографию работ Эйнштейна вплоть до 1949 г. можно найти в книге «Albert Einstein Philosopher — scientist», Library of living phylosophers, Evanston, 1949.

264. E i n s t e i n A., Ann. d. Phys., 55, 241 (1918) [JF 46, 1292].
Prinzipielles zur allgemeinen Relativitätstheorie.
265. E i n s t e i n A., Phys. Zs., 19, 115 (1918) [JF 46, 1315].
Notiz zu Schrödingers Arbeit: Energiekomponenten des Gravitationsfeldes.
266. E i n s t e i n A., Phys. Zs., 19, 165 (1918) [JF 46, 1316].
Notiz zu Schrödingers Notiz: Lösungssystem der allgemein kovarianten Gravitationsgleichungen.
267. E i n s t e i n A., Über Gravitationswellen, Preuss. Akad. Wiss. Sitz., 1918, S. 154 [JF 46, 1295].
268. E i n s t e i n A., Kritisches zu einer von de Sitter gegebenen Lösung der Gravitationsgleichungen, Preuss. Akad. Wiss. Sitz., 1918, S. 270 [JF 46, 1342].
269. E i n s t e i n A., Der Energiesatz in der allgemeinen Relativitätstheorie, Preuss. Akad. Wiss. Sitz., 1918, S. 448 [JF 46, 1296].
270. E i n s t e i n A., Bemerkungen über periodische Schwankungen der Mondlänge, welche bisher nach der Newtonschen Mechanik nicht erklärbar schienen, Preuss. Akad. Wiss. Sitz., 1919, Pt. 1, S. 433.
271. E i n s t e i n A., Geometrie und Erfahrung, Preuss. Akad. Wiss. Sitz., 1921, S. 123 [JF 48, 982].
272. E i n s t e i n A., Eine naheliegende Ergänzung des Fundamentes der allgemeinen Relativitätstheorie, Preuss. Akad. Wiss. Sitz., 1921, S. 261 [JF 48, 1324].
273. E i n s t e i n A., Ann. d. Phys., 69, 436, (1922) [JF 48, 1031].
Bemerkung zur Seletyschen Arbeit: Beiträge zum kosmologischen Problem.
274. E i n s t e i n A., Bemerkung zu der Abhandlung von E. Trefftz: Statische Gravitationsfeld zweier Massenpunkte..., Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl. Sitz., 1922, S. 448 [JF 48, 1036].
275. E i n s t e i n A., Zs. f. Phys., 11, 326 (1922); 16, 228 (1923) [JF 48, 1031; 49, 652].
Bemerkung zu der Arbeit von A. Friedman «Über die Krümmung des Raumes».
276. E i n s t e i n A., Zur allgemeinen Relativitätstheorie, Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl. Sitz., 1923, S. 32, 76 [JF 49, 627, 628].
277. E i n s t e i n A., Physica, 5, 330 (1925) [JF 51, 703].
Elektron und allgemeine Relativitätstheorie.
278. E i n s t e i n A., Einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität, Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl. Sitz., 1925, S. 414 [JF 51, 704].
279. E i n s t e i n A., Math. Ann., 97, 99 (1926) [JF 52, 917].
Über die formale Beziehung des Riemannschen Krümmungstensor zu den Feldgleichungen der Gravitation.
280. E i n s t e i n A., Allgemeine Relativitätstheorie und Bewegungsgesetz, Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl. Sitz., 1927, S. 235 [JF 53, 818].
281. E i n s t e i n A., Riemann-Geometrie mit Aufrechterhaltung des Begriffes des Fernparallelismus, Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl. Sitz., 1928, S. 217 [JF 54, 942].
282. E i n s t e i n A., Zum Kosmologischen Problem der allgemeinen Relativitätstheorie, Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl. Sitz., 1931, S. 235 [Z 2, 91 (см. также Robertson [989])].
283. E i n s t e i n A., Science, 84, 506 (1936) [Z 15, 278].
Lens-like action of a star by the deviation of light in the gravitational field.
284. E i n s t e i n A., Ann. of Math., 40, 922 (1939) [MR 1, 61].
On a stationary system with spherical symmetry consisting of many gravitating masses.
285. E i n s t e i n A., Univ. Nac. Tucumán Revista, A2, 5 (1941) [MR 4, 55].
Demonstration of the non-existence of gravitational fields with a non-vanishing total mass free of singularities.
286. E i n s t e i n A., The meaning of relativity, 5th ed., Princeton, 1955 [MR 17, 907] (о более ранних изданиях см. [MR 7, 87; 14, 97, 805; 15, 357]) (См. перевод: Э й н ш т е й н А., Сущность теории относительности, ИЛ, 1955.)

287. E i n s t e i n A., Commemorative Issue of Reviews of Modern Physics, **21**, No. 3 (1949).

288. E i n s t e i n A., B e r g m a n n P., Ann. of Math., **39**, 683 (1938) [Z **19**, 287]. On a generalization of Kaluza's theory of electricity.

289. E i n s t e i n A., F o k k e r A. D., Ann. d. Phys., **44**, 321 (1914) [JF **45**, 1117]. Die Nordströmische Gravitationstheorie vom Standpunkte des absoluten Differentialkalküls.

290. E i n s t e i n A., G r o m m e r J., Allgemeine Relativitätstheorie und Bewegungsgesetz, Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl. Sitz., 1927, S. 235 [JF **53**, 817].

291. E i n s t e i n A., G r o s s m a n n M., Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation, Leipzig—Berlin, 1913 [JF **44**, 770].

292. E i n s t e i n A., G r o s s m a n n M., Zs. f. Math. u. Phys., **62**, 225 (1914) [JF **45**, 1114].
Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation.

293. E i n s t e i n A., G r o s s m a n n M., Zs. f. Math. u. Phys., **63**, 215 (1914) [JF **45**, 1115].
Kovarianzeigenschaften der Feldgleichungen der auf die verallgemeinerte Relativitätstheorie gegründeten Gravitationstheorie.

294. E i n s t e i n A., I n f e l d L., Ann. of Math., **41**, 455 (1940) [MR **1**, 283].
The gravitational equations and the problem of motion. II.

295. E i n s t e i n A., I n f e l d L., Canad. Journ. Math., **1**, 209 (1949) [MR **11**, 59].
On the motion of particles in general relativity theory.

296. E i n s t e i n A., I n f e l d L., H o f f m a n n B., Ann. of Math., **39**, 65 (1938) [Z **18**, 281].
The gravitational equations and the problem of motion.

297. E i n s t e i n A., M a y e r W., Systematische Untersuchung über kompatible Feldgleichungen, welche in einem Riemannschen Raume mit Fernparallelismus gesetz werden können, Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl. Sitz., 1931, S. 257 [Z. **1**, 425].

298. E i n s t e i n A., M a y e r W., Einheitliche Theorie von Gravitation und Elektrizität, Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl. Sitz., 1931, S. 541; 1932, S. 130 [Z **3**, 227; **5**, 271].

299. E i n s t e i n A., M a y e r W., Semi-Vektoren und Spinoren, Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl. Sitz., 1932, S. 522 [Z **6**, 229].

300. E i n s t e i n A., P a u l i W., Ann. of Math., **44**, 131 (1943) [MR **4**, 226].
On the non-existence of regular stationary solutions of relativistic field equations.

301. E i n s t e i n A., R o s e n N., Phys. Rev., **48**, 73 (1935) [Z **12**, 134].
The particle problem in the general theory of relativity.

302. E i n s t e i n A., R o s e n N., Phys. Rev., **49**, 404 (1936) [Z **13**, 288].
Two-body problem in general relativity.

303. E i n s t e i n A., R o s e n N., Journ. Franklin Inst., **223**, 43 (1937) [Z **17**, 96].
On gravitational waves.

304. E i n s t e i n A., d e S i t t e r W., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., **18**, 213 (1932) [Z **4**, 88 (см. также Robertson [989])].
On the relation between the expansion and mean velocity of the universe.

305. E i n s t e i n A., S t r a u s E. G., Rev. Mod. Phys., **17**, 120 (1945); **18**, 148 (1946) [MR **7**, 87, 397].
The influence of the expansion of space on the gravitation fields surrounding the individual stars.

306. E i s e n h a r t L. P., Bull. Amer. Math. Soc., **27**, 432 (1921) [JF **48**, 1331].
The Einstein solar field.

307. E i s e n h a r t L. P., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., **7**, 328 (1921); Bull. Amer. Math. Soc., **28**, 3 (1922) [JF **48**, 1039].

Einstein static fields admitting a group G_2 of continuous transformations into themselves.

308. E i s e n h a r t L. P., Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **8**, 24 (1922); Bull. Amer. Math. Soc., **28**, 238 (1922) [JF **48**, 842].
Ricci's principal directions for a Riemann space and the Einstein theory.

309. E i s e n h a r t L. P., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., **8**, 233 (1922) [JF **48**, 843].
Spaces with corresponding paths.

310. E i s e n h a r t L. P., Trans. Amer. Math. Soc., **26**, 205 (1924) [JF **50**, 596].
Space-time continua of perfect fluids in general relativity.

311. E i s e n h a r t L. P., Riemannian geometry, Princeton, 1926 [JF **52**, 721].
(См перевод: Э й з е н х а р т Л., Риманова геометрия, ИЛ, 1948.)

312. E i s e n h a r t L. P., Non-Riemannian geometry, New York, 1927 [JF **52**, 721].

313. E i s e n h a r t L. P., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., **42**, 249, 646, 878 (1956); **43**, 333 (1957) [MR **17**, 1016; **18**, 262, 543, 977].
A unified theory of general relativity of gravitation and electromagnetism.

314. E i s e n h a r t L. P., V e b l e n O., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., **8**, 19 (1922); Bull. Amer. Math. Soc., **28**, 238 (1922) [JF **48**, 842].
The Riemann geometry and its generalization.

315. E n g s t r o m H. T., Z o r n M., Phys. Rev., **49**, 701 (1936) [Z **14**, 86].
The transformation of reference systems in the Page relativity.

316. E p s t e i n P. S., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., **20**, 67 (1934) [Z **8**, 379].
The expansion of the universe and the intensity of cosmic rays.

317. E r e z G., R o s e n N., Bull. Res. Council Israel, **F8**, 47 (1959).
The gravitational field of a particle possessing a quadripole moment.

318. E r n s t F. J., Jr., Phys. Rev., **105**, 1662 (1957) [MR **19**, 226].
Variational calculations in geon theory.

319. E s c l a n g o n E., Les preuves astronomiques de la relativité, Paris, 1922 [JF **48**, 1062].

320. E s c l a n g o n E., Compt. Rend., **178**, 196 (1924) [SA **27**, 374].
Sur la déviation einsteinienne des rayons lumineux par le soleil.

321. E t h e r i n g t o n I. M. H., Phil. Mag., **15**, 761 (1933) [Z **6**, 375).
On the definition of distance in general relativity.

322. E t h e r i n g t o n I. M. H., Math. Notes Edinburgh, No. 30, XXI—XXVI (1937) [Z **16**, 283].
Pictorial relativity.

323. F a b r y C., Scientia, **34**, 149 (1923).
La théorie de la relativité et le déplacement des raies spectrales produit par le champ de gravitation.

324. F e r m i E., Atti R. Accad. Lincei Rend., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., **31**, 21, 51 (1922) [JF **48**, 1309].
Sopra i fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria.

325. F i e r z M., Helv. Phys. Acta, **29**, 128 (1956) [MR **18**, 177].
Über die physikalische Deutung der erweiterten Gravitationstheorie P. Jordans.

326. Ф и х т е н г о л ь ц И. Г., ДАН СССР, **64**, 325 (1949) [MR **10**, 579].
Об интегралах движения центра инерции для системы конечных масс в общей теории относительности.

327 Ф и х т е н г о л ь ц И. Г., ЖЭТФ, **20**, 233 (1950) [MR **11**, 746].
Лагранжева форма уравнений движения во втором приближении теории тяготения Эйнштейна.

328. Ф и х т е н г о л ь ц И. Г., ЖЭТФ, **20**, 824 (1950) [MR **12**, 546].
Задача двух конечных масс во втором приближении теории тяготения Эйнштейна.

329 F i n l a y-F r e u n d l i c h E., Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math-Phys. Kl. II, No. 7, 95 (1953) [SA **57**, 1359].
On the red-shift of spectral lines.

330. Finlay-Freundlich E., Phil. Mag., 45, 303 (1954); Proc. Phys. Soc., A67, 192 (1954) [SA 57, 532, 670].
Red shifts in the spectra of celestial bodies.

331. Finlay-Freundlich E., On the empirical foundations of the general theory of relativity. Vistas in Astronomy, vol. I, London — New York, 1955, p. 239.

332. Finzi A., Atti Accad. Naz. Lincei Rend., 27, 324 (1938) [Z 19, 286].
Sulla riduzione a forma normale delle equazioni gravitazionali dell'Einstein.

333. Finzi A., Nederl. Akad. Wetensch. Proc., 50, 136, 143, 288, 351 (1947); Indagationes Math., 9, 99, 106, 178, 209 (1947) [MR 8, 466, 584].
Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles, qui, comme les systèmes normaux, comportent autant d'équations que de fonctions inconnues.

334. Finzi B., Atti Accad. Naz. Lincei, 13, 119 (1931) [Z 1, 247].
La relatività generale nei fenomeni di irradiamento atomico.

335. Finzi B., Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., 6, 18 (1949) [MR 10, 745].
Discontinuità sul fronte d'onda delle azioni gravitazionali.

336. Finzi B., Rend. Seminario Mat. e Fis., Milano, 28, 61 (1959).
Movimento gravitazionale.

337. Finzi B., Pastori M., Calcolo tensoriale e applicazioni, Bologna, 1949 [MR 10, 480].

338. Fiorentini Campolieti F., Atti Accad. Naz. Lincei Rend., 26, 319, 377 (1937) [Z 18, 187].
Una particolare soluzione dinamica del problemo cosmologico.

339. Flint H. T., Williamson E. M., Nuovo Cimento, 3, 551 (1956) [MR 18, 544].
A relativistic theory of charged particles in an electromagnetic and gravitational field.

340. Фок В. А., Compt. Rend., 189, 25 (1929) [JF 55, 514].
Sur les équations de Dirac dans la théorie de relativité générale.

341. Фок В. А., ЖЭТФ, 9, 375 (1939) [Z 21, 369].
О движении конечных масс в общей теории относительности.

342. Фок В. А., Физ. Журн. АН СССР, 1, 81 (1939) [MR 1, 183].
О движении конечных масс в общей теории относительности.

343. Фок В. А., ДАН СССР, 32, 25 (1941) [MR 3, 212].
Об интегралах центра тяжести в релятивистской задаче двух конечных масс.

344. Фок В. А., Проблема движения масс в теории гравитации Эйнштейна. Сборник, посвященный семидесятилетию академика А. Ф. Иоффе, 1950, стр. 31 [MR 16, 1058].

345. Фок В. А., УФН, 9, № 4 (62), 229 (1954) [MR 16, 1058].
По поводу статьи Ф. И. Франкля «Некоторые замечания о принципах в общей теории относительности».

346. Фок В. А., Теория пространства, времени и тяготения, 3-е изд., Физматгиз, 1961 [MR 18, 445].

347. Фок В. А., О движении вращающихся тел, согласно теории гравитации Эйнштейна, JRT, 1955, p. 204.

348. Фок В. А., УФН, 11, № 3 (69), 197 (1956) [MR 19, 509].
Замечания по поводу статьи Ф. И. Франкля «О корректной постановке проблемы Коши и свойствах гармонических координат в общей теории относительности».

349. Фок В. А., Czechoslovak Journ. Phys., 7, 255 (1957) [MR 19, 714].
Homogenität, Kovarianz und Relativität.

350. Фок В. А., Rev. Mod. Phys, 29, 325 (1957) [MR 19, 1020].

351. Fokker A. D., Proc. K. Akad. Wet. Amsterdam, 19, 1067 (1917) [JF 46, 1353).
The virtual displacement of the electromagnetic and of the gravitational field in applications of Hamilton's variation principle.

352. Fokker A. D., Relativiteitstheorie, Groningen, 1929 [JF 55, 1163].
353. Forsyth A. R., Proc. Roy. Soc., A97, 145 (1920).
Note on the central differential equation in the relativity theory of gravitation.
354. Fourès-Bruhat Y., Compt. Rend., 226, 218 (1948) [MR 9, 386].
Sur une expression intrinsèque du theorème de Gauss en relativité générale.
355. Fourès-Bruhat Y., Compt. Rend., 226, 1071 (1948) [MR 9, 627].
Sur l'intégration du problème des conditions initiales en mécanique relativiste.
356. Fourès-Bruhat Y., Compt. Rend., 230, 618 (1950) [MR 11, 548].
Théorème d'existence pour les équations de la gravitation einsteinienne dans le cas non analytique.
357. Fourès-Bruhat Y., Acta Math., 88, 141 (1952) [MR 14, 756].
Théorème d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non-lineaires.
358. Fourès-Bruhat Y., Le problème de Cauchy dans la théorie relativiste de l'électromagnétisme et dans la théorie unitaire de Jordan-Thiry, JRT, 1955, p. 76.
359. Fourès-Bruhat Y., Journ. Rational Mech. Anal., 5, 951 (1956) [MR 18, 976].
Sur l'intégration des équations de la relativité générale.
360. Fourès-Bruhat Y., Lichnerowicz A., Compt. Rend., 226, 775 (1948) [MR 9, 538].
Sur un théorème global de réduction des ds^2 statiques généraux d'Einstein.
361. Frank P., Hand. d. phys. techn. Mech., 6, 45 (1928) [JF 54, 939].
Relativitätsmechanik.
362. Frank P., Rev. Mod. Phys., 21, 349 (1949).
Einstein's philosophy of science.
363. Франкль Ф. И., ДАН СССР, 84, 51 (1952); Труды Физ.-мат. фак. Киргиз. Гос. унив., № 2, 47 (1953) [MR 14, 98; 18, 101].
О гравитационных волнах и движении газа в сильных переменных гравитационных полях.
364. Франкль Ф. И., УФН, 8, № 3 (55), 160 (1953) [MR 15, 656].
Некоторые замечания о принципах в общей теории относительности.
365. Франкль Ф. И., УФН, 11, № 3 (69), 189 (1956) [MR 19, 509].
О корректной постановке проблемы Коши и свойствах гармонических координат в общей теории относительности.
366. Freud P., Ann. d. Math., 40, 417 (1939) [Z 20, 423].
Über die Ausdrücke der Gesamtenergie und des Gesamtimpulses eines materiellen Systems in der allgemeinen Relativitätstheorie.
367. Freundlich E. F., The foundations of Einstein's theory of gravitation, New York, 1922 [JF 46, 1281].
368. Friedmann A., Zs. f. Phys., 10, 377 (1922) [JF 48, 1031 (см. также Robertson [989])].
Über die Krümmung des Raumes.
369. Friedmann A., Zs. f. Phys., 21, 326 (1924) [JF 50, 577 (см. Robertson [989])].
Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes.
370. García G., Actas Acad. Ci. Lima, 9, 153 (1946) [MR 8, 177].
Об ограниченной задаче трех тел в общей теории относительности (на испанском).
371. García G., Actas Acad. Ci. Lima, 9, 163 (1946) [MR 8, 177].
Сведение уравнений движения для трех тел с конечными массами к случаю, когда масса одного из них бесконечно мала (на испанском).
372. García G., Summa Brasil. Math., 1, No. 9, 197 (1946) [MR 10, 333].
Проблема трех тел в формулировках Эйлера и Лагранжа с точки зрения общей теории относительности (на испанском).

373. G a r c í a G., Symposium sobre algunos problemas matemáticos que se están estudiando en Latino América, 1951, p. 139 [MR 14, 1023].
Новое в общей теории относительности (на испанском).

374. G a r c í a G., Actas Acad. Ci. Lima, 15, 99 (1952) [MR 15, 834].
Новые методы в эйнштейновской общей теории относительности (на испанском).

375. G a r c í a G., Actas Acad. Ci. Lima, 16, 3 (1953) [MR 15, 657].
Новые исследования и результаты по «расширяющейся Вселенной и происхождению туманностей» (на испанском).

376. G a r d n e r G. H. F., Proc. Amer. Math. Soc., 2, 328 (1951) [MR 13, 76].
Canonical coordinates at a point for two skew-symmetric tensors.

377. G é h é n i a u J., Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci., 42, 252 (1956) [MR 17, 1144].
Les invariants de courbure des espaces riemanniens de la relativité.

378. G é h é n i a u J., Compt. Rend., 244, 723 (1957) [MR 19, 169].
Une classification des espaces riemanniens.

379. G é h é n i a u J., D e b e v e r R., Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci., 42, 114 (1956) [MR 17, 1016].
Les invariants de courbure de l'espace de Riemann à quatres dimensions.

380. G é h é n i a u J., D e b e v e r R., Les quatorze invariants de courbure de l'espace riemannien à quatre dimensions. JRT, 1955, p. 101 [MR 19, 506].

381. G e i s s l e r D., P a p a p e t r o u A., T r e d e r H., Ann. Phys., 2, 344 (1959).
Die Gravitationsstrahlung eines zeitweilig nichtstationären Systems.

382. Г е л м а н Е. Е., Уч. зап. Ленингр. Гос. унив., 120, сер. физ. наук, 7, 79 (1949) [MR 14, 97].
Вещественные спиноры в общей теории относительности.

383. G h o s h J., Proc. Edinburgh Math. Soc., 44, 72 (1926) [JF 52, 928].
Einsteinian gravitational field of a heterogeneous fluid sphere.

384. G h o s h J., Indian Phys.-Math. Journ., 3, 139 (1932) [Z 5, 270].
Gravitational field of a homogeneous sphere.

385. G h o s h J., Zs. f. Phys., 85, 511 (1933) [Z 7. 330].
Das Gravitationsfeld des Elektron.

386. G h o s h N. N., Bull. Calcutta Math. Soc., 17, 13 (1926) [JF 52, 928].
On a type of solution of Einstein's gravitational equations.

387. G i ã o A., Portugaliae Phys., 2, 1 (1946) [MR 8, 121].
Le problème cosmologique généralisé et la mécanique ondulatoire relativiste.

388. G i l b e r t C., Quart. Journ. Math., Oxford Ser., 3, 161 (1952) [MR 14, 592].
Statistical systems of particles in the expanding universe.

389. G i l b e r t C., Mon. Not. Roy. Astr. Soc., 114, 628 (1954) [MR 17, 202].
The stability of a spherically symmetric cluster of stars describing circular orbits.

390. G i l l o c h J. M., M c C r e a W. H., Proc. Cambr. Phil. Soc., 47, 190 (1951) [MR 12, 757].
The relativistic mass of a rotating cylinder.

391. G i l v a r r y J. J., Phys. Rev., 89, 1046 (1953) [SA 56, 390].
Relativity precession of the asteroid Icarus.

392. G i l v a r r y J. J., Nature, 183, 666 (1959).
Verification of general relativity by means of artificial satellites.

393. Г и н з б у р г В. Л., ЖЭТФ, 30, № 1, 213 (1956) [MR 18, 362].
Об использовании искусственных спутников Земли для проверки общей теории относнтельности.

394. Г и н з б у р г В. Л., ЖЭТФ, 63 (1957) [MR 20, 115].
Использование искусственных спутников Земли для проверки общей теории относительности.

395. G i u s s a n i R., Rend. Ist. Lombardo Sci., 64, 309 (1931) [Z 2, 301].
Sulle variazioni isoriemanniane del cronotopo einsteiniano.

396. Glaser V., Phys. Rev., **98**, 840 (1955) [MR **16**, 873].
New relativistic two-body equation.
397. Godeaux L., Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci., **10**, 429 (1925) [JF **51**, 709].
L'universe d'Einstein et la métrique cayleyenne elliptique.
398. Godeaux L., Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci., **11**, 11 (1925) [JF **51**, 709].
L'universe de De Sitter et la métrique cayleyenne elliptique.
399. Gödel K., Rev. Mod. Phys., **21**, 447 (1949) [MR **11**, 216].
An example of a new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of gravitation.
400. Gödel K., Proc. Int. Congr. Math. Cambr. Mass., **1**, 175 (1950) [MR **13**, 500].
Rotating universe in general relativity theory.
401. Goldberg J. N., Phys. Rev., **89**, 263 (1953) [MR **14**, 805].
Strong conservation laws and equations of motion in covariant field theories.
402. Goldberg J. N., Phys. Rev., **99**, 1873 (1955) [MR **17**, 545].
Gravitational radiation.
403. Goldberg J. N., Phys. Rev., **111**, 315 (1958) [MR **20**, 938].
Conservation laws in general relativity.
404. Goldberg J. N., Conservation laws and equations of motion WADC Techn. Rep., **59—356**, Wright Air Development Center, Ohio, 1959.
405. Good R. H., Jr., Phys. Rev., **93**, 239 (1954) [MR **15**, 915].
Hamiltonian mechanics of fields.
406. Gordon W., Ann. d. Phys., **72**, 421 (1923) [JF **49**, 653].
Zur Lichtfortpflanzung nach der Relativitätstheorie.
407. Gormley P. G., Proc. Edinburgh Math. Soc., **3**, 269 (1933) [Z **11**, 42].
On Straneo's unified theory of gravitation and electricity.
408. Gosselin J., Compt. Rend., **226**, 228 (1948) [MR **9**, 539].
Sur le déplacement des spectres des nébuleuses vers le rouge et l'évolution de l'universe.
409. Goto K., Progr. Theor. Phys., **6**, 1013 (1951) [MR **13**, 995].
Wave equations in de Sitter space
410. Graef Fernandez C., Symposium sobre algunos problemas matemáticos que se están estudiano en Latino América, 1951, p. 121 [MR **14**, 807].
Гравитационная теория Биркгоффа (на испанском).
411. Graef Fernandez C., Univ. Nac. Autonoma Mexico. An. Inst. Fis., **1**, 35 (1955) [MR **18**, 263].
Гравитационные силы Биркгоффа в физическом пространстве (на испанском).
412. Grossmann E., Zs. f. Phys., **5**, 280 (1921) [JF **48**, 1015].
Die Bewegung des Merkurperihels.
413. Grossmann E., Astron. Nachr., **214**, 41 (1921) [JF **48**, 1052].
Die Bewegung des Merkurperihels nach den Arbeit von S. Newcomb.
414. Grossmann M., Zurich Natur.-Ges., **58**, 291 (1913) [JF **44**, 771, 889].
Mathematische Begriffsbildungen zur Gravitationstheorie.
415. Gupta S. N., Proc. Phys. Soc., **A65**, 161 (1952) [MR **13**, 804].
Qunatization of Einstein's gravitational field: linear approximation.
416. Gupta S. N., Proc. Phys. Soc., **A65**, 608 (1952) [MR **14**, 417].
Quantization of Einstein's gravitational field: general treatment.
417. Gupta S. N., Phys. Rev., **96**, 1683 (1954) [MR **16**, 532].
Gravitation and electromagnetism.
418. Gupta S. N., Rev. Mod. Phys., **29**, 334 (1957) [MR **19**, 1022].
Einstein's and other theories of gravitation.
419. Haag J., Compt. Rend., **176**, 658 (1923) [JF **49**, 642].
Sur le problème intérieur de Schwarzschild dans le cas d'une sphère hétérogène.
420. Haag J., Compt. Rend., **176**, 1205 (1923) [JF **49**, 649].
Sur le champ gravitationnel de *n* corps.

421. H a a g J., Le problème de Schwarzschild, Paris, 1931 [Z 1, 244].
422. t e r H a a r D., Phil. Mag., 45, 320 (1954) [SA 57, 532].
On Freundlich's red shift.
423. H a c k e r S. G., Astron. Journ., 42, 46 (1932) [Z 6, 36].
On Vogt's suggestion of the law of force in spiral nebulae.
424. H a g i h a r a Y., Japanese Journ. Astron. Geophys., 8, 67 (1931) [Z 3, 179].
Theory of the relativistic trajectories in a gravitational field of Schwarzschild.
425 Х а л а т н и к о в И. М., ЖЭТФ, 27, 529 (1954) [MR 16, 1059].
Некоторые вопросы релятивистской гидродинамики.
426. H a l b w a c h s F., L o c h a k G., V i g i e r J. P., Compt. Rend., 241, 692 (1955) [M 17, 202].
Décomposition en fonction de variables dynamiques du tenseur d'énergie-impulsion des fluides relativistes dotés de moment cinétique interne.
427. H a l p e r n O., Phys. Rev., 48, 431 (1935) [Z 12, 180].
A theorem connecting the energy momentum tensor with the velocity of propagation of waves.
428. H a l p e r n O., H e l l e r G., Phys. Rev., 48, 434 (1935) [Z 12, 232].
On the Dirac electron in a gravitational field.
429. H a m m R. J., Ann. d. Phys., 57, 68 (1918) [JF 46, 1303].
Über die Bewegungsgleichungen der Materie. Ein Beitrag zur Relativitätstheorie.
430. H a n d r e k H., Zs. f. Phys., 50, 397 (1928) [JF 54, 941].
Über die Differentialgleichungen in der allgemeinen Relativitätstheorie.
431. H a r g r e a v e s R., Proc. Cambr. Phil. Soc., 23, 191 (1926) [JF 52, 929].
The problem of relativity in reference to several bodies.
432. H a r g r e a v e s R., Proc. Cambr. Phil. Soc., 23, 198 (1926) [JF 52, 929].
433. H a s k e y H. W., Phil. Mag., 27, 221 (1939) [Z 20, 286].
A geometric derivation of the second order wave equation.
434. H a t a l k a r M. H., Phys. Rev., 94, 1472 (1954) [MR 15, 995].
Theory of elementary particles in general relativity.
435. H a y w o o d J. H., Proc. Phys. Soc., A65, 170 (1952) [MR 14, 97].
The equations of motion and coordinate condition in general relativity.
436. H a y w o o d J. H., Proc. Phys. Soc., A69, 2 (1956) [MR 17, 676].
The equation of motion of rotating bodies in general relativity.
437. H e c k m a n n O., Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Kl. II, Nr. 15, 126 (1931) [Z 3, 32 (см. также Robertson [989])].
Über die Metrik des sich ausdehnenden Universums.
438. H e c k m a n n O., Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Kl. II, Nr. 23, 97 (1932) [Z 5, 91 (см. также Robertson [989])].
Die Ausdehnung der Welt ihrer Abhängigkeit von der Zeit.
439. H e c k m a n n O. H. L., S c h ü c k i n g E., Handb. d. Phys., 53, 489, 520 (1959).
Newtonsche und Einsteinsche Kosmologie.
440. H e l l i w e l l J. B., Ann. Astrophys., 19, 19 (1956) [MR 18, 101].
Disturbances in an expanding universe.
441. H e n n e q u i n F., Compt. Rend., 239, 1464 (1954) [MR 16, 872].
Sur l'approximation des équations de la relativité générale pour le champ quasi galiléen.
442. H e n n e q u i n F., Compt. Rend., 240, 2378 (1955) [MR 16, 1164].
Interprétation de la théorie de Y. Thiry dans une métrique conforme.
443. H e r g l o t z G., Ber. Verh. Sächsischen Akad. Wiss. Leipzig Math.-Phys. Kl., 68, 199 (1916) [JF 46, 1303].
Zur Einsteinischen Gravitationstheorie.
444. H e r g l o t z G., Math. Ann., 93, 46 (1924) [JF 50, 492].
Über die Bestimmung eines Linienelementes in Normalkoordinaten aus dem Riemannschen Krümmungstensor.

445. H e s s a b y M., Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **33**, 189 (1947) [MR **8**, 608].
Continuous particles.
446. H i l b e r t D., Nachr. Göttingen, 395 (1915); 53 (1917) [JF **45**, 1111; **46**, 1298].
Die Grundlagen der Physik.
447. H i l l F. W., J e f f e r y G. B., Phil. Mag., **41**, 823 (1921) [JF **48**, 1329].
The gravitational field of a particle on Einstein's theory.
448. H l a v a t ý V., Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **23**, 316 (1954) [MR **16**, 531).
Report on the recent Einstein unified field theory.
449. H l a v a t ý V., Geometry of Einstein's unified field theory, Groningen, 1957.
450. H o a n g P. T., Compt. Rend., **243**, 1292 (1956) [MR **18**, 543].
Sur l'emploi des coordonnées isothermes pour déterminer les équations de mouvement en relativité générale.
451. H o f f m a n n B., Rev. Mod. Phys., **4**, 173 (1932) [Z **4**, 87].
On general relativity.
452. H o f f m a n n B., Quart. Journ. Math., Oxford Ser., **3**, 226 (1932); **4**, 179 (1933); **6**, 149 (1935) [Z **5**, 270; **12**, 41].
On the spherically symmetric field in relativity.
453. H o f f m a n n B., Phys. Rev., **72**, 458 (1947) [MR **9**, 107].
The vector meson field and projective relativity.
454. H o f f m a n n B., Phys. Rev., **73**, 30 (1948) [MR **9**, 387].
The gravitational, electromagnetic and vector meson fields and the similarity geometry.
455. H o f f m a n n B., Phys. Rev., **106**, 358 (1957) [MR **19**, 226].
General relativistic red shift and the artificial satellite.
456. H ö n l H., M a u e A. W., Zs. f. Phys., **144**, 152 (1956) [MR **19**, 367].
Über das Gravitationsfeld rotierender Massen.
457. H ö n l H., P a p a p e t r o u A., Zs. f. Phys., **112**, 65 (1939) [Z **20**, 423].
Über die Selbstenergie und das Gravitationsfeld einer elektrischen Punktladung.
458. H o p f H., Die Relativitätstheorie, Berlin, 1931 [Z **2**, 299].
459. H o r v á t h J. I., Nuovo Cimento, **4**, 571 (1956) [MR **18**, 704].
Contribution to Stephenson-Kilmister's unified theory of gravitation and electromagnetism.
460. H o r v á t h J. I., M o ó r A., Nederl. Akad. Wetensch. Proc., **A58**; Indag. Math., **17**, 421, 581 (1955) [MR **17**, 544].
Entwicklung einer Feldtheorie begründet auf einen allgemeinen metrischen Linienelementraum.
461. H o s o k a w a T., Journ. Sci. Hiroshima Univ., **A5**, 141 (1935) [Z **12**, 232].
On the foundation of the geometry in microscopic and macroscopic space.
462. H o s o k a w a T., Journ. Sci. Hiroshima Univ., **A7**, 63 (1937) [Z **17**, 237].
Conformal wave geometry.
463. H o s o k a w a T., Journ. Sci. Hiroshima Univ., **A8**, 29 (1938) [Z **18**, 283].
Many-body problem in wave geometry.
464. H u N., Proc. Roy. Irish Acad., **A51**, 87 (1947) [MR **8**, 496].
Radiation damping in the general theory of relativity.
465. H u b b l e E. P., Proc. Amer. Phil. Soc., **95**, 461 (1951) [SA **55**, 154].
Explorations in space: the cosmological program for the Palomar telescopes.
466. H u b b l e E. P., Mon. Not. Roy. Astr. Soc., **113**, 658 (1953) [SA **58**, 3].
The law of red-shifts.
467. H u b b l e E. P., T o l m a n R. C., Astrophys. Journ., 82, 426 (1935) [Z **12**, 426].
Two methods of investigating the nature of the nebular red-shift.
468. I k e d a M., Tensor (N. S.), **2**, 102 (1952) [MR **14**, 505].
Note on some special sphericaly symmetric space-times.
469. I k e d a M., Progr. Theor. Phys., **10**, 483 (1953) [MR **15**, 751].
On a five-dimensional representation of the electromagnetic and electron field equations in a curved space-time.

470. I n f e l d L., Phys. Zs., 32, 110 (1931) [Z 1, 34].
Über eine Interpretation der neuen Einsteinschen Weltgeometrie auf dem Boden der klassischen Mechanik.
471. I n f e l d L., Atti Accad. Naz. Lincei Rend., 15, 157 (1932) [Z 4, 232].
Remarques sur le problème de la théorie unitaire des champs.
472. I n f e l d L., Acta Phys. Polon., 3, 1 (1934) [Z 10, 281].
Dirac's equation in the general relativity theory.
473. I n f e l d L., Phys. Rev. 53, 836 (1938) [Z 19, 92].
Electromagnetic and gravitational radiation.
474. I n f e l d L., Canad. Journ. Math., 5, 17 (1953) [MR 14, 806].
The coordinate conditions and the equations of motion.
475. I n f e l d L., Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III, 2, 163 (1954) [MR 16, 409].
Equations of motion and non-harmonic coordinates.
476. I n f e l d L., Acta Phys. Polon., 13, 187 (1954) [MR 16, 531].
On the motion of bodies in general relativity theory.
477. I n f e l d L., Ann. d. Phys., 16, 229 (1955) [MR 17, 674].
Einige Bemerkungen über die Relativitätstheorie.
478. I n f e l d L., Rend. Mat. e Appl., 13, 270 (1955) [MR 17, 813).
The history of relativity theory.
479. I n f e l d L., Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III, 3, 213 (1955) [MR 17, 201].
Equations of motion for linear field theories.
480. I n f e l d L., On equations of motion in general relativity. JRT, 1955, p. 206.
481. I n f e l d L., Schr. Forschungsinst. Math., 1, 202 (1957) [MR 19, 226].
On the equations of motion.
482. I n f e l d L., Rev. Mod. Phys., 29, 398 (1957); Acta Phys. Polon., 16, 177 (1957) [MR 19, 815].
The equations of motion in general relativity theory and the action principle.
483. I n f e l d L., Ann. d. Phys., 6, 341 (1959) [MR 21, 221].
Equations of motion and gravitational radiation.
484. I n f e l d L., P l e b a n s k i J., Acta Phys. Polon., 12, 123 (1953); Proc. Roy. Soc., A222, 224 (1954) [MR 15, 489, 765].
Electrodynamics without potentials.
485. I n f e l d L., P l e b a n s k i J., Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III, 4, 757 (1956) [MR 19, 225].
On a covariant formulation of the equations of motion. Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III, 4, 757 [MR 19, 225].
486. I n f e l d L., P l e b a n s k i J., Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III, 4, 763 (1956) [MR 19, 225].
On the «dipole procedure» in general relativity theory.
487. I n f e l d L., S c h e i d e g g e r A. E., Canad. Journ. Math. 3, 195 (1951) [MR 13, 169].
Radiation and gravitational equations of motion.
488. I n f e l d L., S c h i l d A., Phys. Rev., 67, 121 (1945) [MR 6, 242].
A note on the Kepler problem in a space of constant negative curvature.
489. I n f e l d L., S c h i l d A., Rev. Mod. Phys., 21, 408 (1949) [MR 11, 216].
On the motion of test particles in general relativity.
490. I n f e l d L., v a n d e r W a e r d e n B. L., Die Wellengleichung des Elektrons in der allgemeinen Relativitätstheorie. Sitz. Preuss. Akad. Wiss., 1933, S. 380, 474 [Z 7, 184].
491. I n f e l d L., W a l l a c e P. R., Phys. Rev., 57, 797 (1940) [MR 1, 274].
The equations of motion in electrodynamics.
492. I s h i w a r a J., Tohoku Sci. Rep., 4, 111, 407 (1915) [JF 45, 1395].
Zur relativistischen Theorie der Gravitation.
493. I s h i w a r a J., Tokyo Math. Ges., 9, 326 (1917—1918) [JF 46, 1287].
Eine relativistische Theorie der Gravitation von skalaren Potential.

494. Israel W., Proc. Roy. Soc., A248, 404 (1958).
Discontinuities in spherically symmetric gravitational fields and shells o radiation.
495. Itimaru K., Journ. Sci. Hiroshima Univ., A8, 239 (1938); 10, 151 (1940); 11, 245 (1942) [Z 21, 86; MR 2, 208; 9, 627].
Cosmology in terms of wave geometry. IV. VI. Physical interpretations. X. Observers on the nebulae.
496. Иваненко Д. Д., Бродский А. М., ДАН СССР, 75, 519 (1950) [MR 13, 170].
Затухание гравитационного излучения.
497. Iwatsuki T., Journ. Sci. Hiroshima Univ., A1, 107 (1931) [Z 1, 429].
An example of the biquarification problem of gravity and electricity.
498. Iwatsuki T., Mimura Y., Morinaga K., Journ. Sci. Hiroshima Univ., A7, 255 (1937) [Z 17, 238].
Electromagnetism in wave geometry.
499. Iwatsuki T., Mimura Y., Sibata T., Journ. Sci. Hiroshima Univ., A8, 187 (1938) [Z 22, 426].
The equation of motion of a particle in wave geometry.
500. Iwatsuki T., Sibata T., Journ. Sci. Hiroshima Univ., A10, 247 (1940) [MR 2, 208].
On some characters of time.
501. Jaffé G., Ann. d. Phys., 67, 212 (1922) [JF 48, 1020].
Bemerkungen über die relativistischen Keplerellipsen.
502. Jaiswal J. P., Proc. Benares Math. Soc. (N. S.), 7, No. 1, 17 (1945); No. 2, 1 (1945) [MR 8, 175; 9, 311].
On the electric potential of a single electron in a gravitational field. I.
503. Jaiswal J. P., Ganita, 2, 23 (1951) [MR 14, 592].
On the null geodesics and null cones in some gravitational fields.
504. Jaiswal J. P., Ganita, 2, 62 (1951) [MR 15, 995].
A note on electromagnetic phenomena in gravitational fields.
505. de Jans C, Acad. Roy. Belg. Mémoires 8° (2), 7, fasc 5 (1923) [JF 49, 635].
Sur le mouvement d'une particule matérielle dans un champ de gravitation à symétrie sphérique.
506. de Jans C., Acad. Roy. Belg. Mémoires, 8°(2), 7, fasc 14 (1924) [JF 50, 597].
Sur la stabilité du mouvement d'une particule massique dans le champ de Schwarzschild.
507. Järnefelt G., Ann. Acad. Sic. Fennicae, A53, Nr. 2, 1 (1939) [Z 22, 95].
Zur relativistischen Perihelbewegung der Planetenbahnen.
508. Järnefelt G., Ann. Acad. Sci. Fennicae, A55, Nr. 3 (1940) [MR 7, 341].
Zum Einkörperproblem in dem sich ausdehnenden Raume.
509. Järnefelt G., Ann. Acad. Sci. Fennicae, AI, Math.-Phys., Nr. 12 (1942) [MR 7, 532].
Das Einkörperproblem in dem sich ausdehnenden Raume der Einstein—de Sitter'schen Welt.
510. Järnefelt G., Compt. Rend. Dixième Congrès Math. Scandinaves, 160 (1946) [MR 8, 496].
On the one-body problem in the expanding universe.
511. Jeans J., Lemaître G. et al., Nature, 128, 701 (1931) [Z 2, 437].
Contributions to a British Association discussion on the evolution of the universe.
512. Jebsen J. T., Ark. Mat. Astron. Fys., 15, Nr. 18 (1921) [JF 48, 1037].
Über die allgemeinen kugelsymmetrischen Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen im Vakuum.
513. Jeffery G. B., Proc. Roy. Soc., A99, 123 (1921).
The field of an electron on Einstein's theory of gravitation

514. J e h l e H., Zs. f. Phys., 87, 370 (1934); 94, 692 (1935) [Z 8, 228; 11, 375].
Zur allgemeinen relativistischen Quantenmechanik. I. Geodätische Linie und Quantenmechanik. II. Kosmologische Quantenerscheinungen.
515. J o l y J., Nature, 104, 468 (1920) [JF 47, 821].
Relativity and radio-activity.
516. J o r d a n P., Projektive Relativitätstheorie und Kosmologie, Wiesbaden, 1948 [MR 11, 215].
517. J o r d a n P., Astr. Nachr., 276, 193 (1948) [MR 10, 747].
Fünfdimensionale Kosmologie.
518. J o r d a n P., Akad. Wiss. Mainz Abh. Math.-Nat. Kl., 319 (1950) [MR 13, 79].
Vierdimensionale Begründung der erweiterten Gravitations-Theorie.
519. J o r d a n P., Schwerkraft und Weltall, 2te Auflage, Braunschweig, 1955 [MR 17, 1014] (1te Auflage, 1952 [MR 14, 1022]).
520. J o s e p h V., Proc. Cambr. Phil. Soc., 53, 836 (1957) [MR 19, 1139].
Physical properties of some empty space-times.
521. Jubilee of Relativity Theory, Bern, July 11—16, 1955, Proceedings, ed. by André Mercier and Michel Kervaire, Helv. Phys. Acta, Suppl. IV, Basel, 1956 [MR 19, 506].
522. J u s t K., Zs. f. Phys., 140, 485 (1955) [MR 17, 200].
Neue Feldgleichungen zur Jordanschen Gravitations-Theorie.
523. J u s t K., Zs. f. Phys., 140, 524 (1955); 144, 411 (1956) [MR 17, 200, 908].
Zur Planetenbewegung bei veränderliche Gravitationszahl.
524. J u s t K., Zs. f. Phys., 140, 648 (1955) [MR 17, 305].
Zur Kosmologie mit veränderlicher Gravitationszahl.
525. J u v e t G., Comment. Math. Helv., 3, 154 (1931); 4, 102 (1932) [Z 2, 92; 5, 90].
Sur quelques solutions des équations cosmologiques de la relativité.
526. K a e m p f f e r F. A., Canad. Journ. Phys., 31, 501 (1953) [MR 14, 1023].
The physical meaning of auxiliary conditions in the theory of gravitational waves.
527 K a l i t z i n N. S., Jahrbuch, Staatuniv. Stadt Stalin Fak. Bauwesen, 1, 143 (1953) [MR 19, 103].
Über eine Verallgemeinerung der allgemeinen Relativitätstheorie.
528. K a l u z a T., Zum Unitätsproblem der Physik, Sitz. Preuss. Akad. Wiss., 1921, S. 966 [JF 48, 1032, 1327].
529. K a n t o r W., S z e k e r e s G., Phys. Rev., 104, 831 (1956) [MR 19, 103].
Cosmic time and the field equations of general relativity.
530. K a r m a r k a r K. R., Bull. Calcutta Math. Soc., 39, 30 (1947) [MR 9, 213].
An important particular case of the problem of equivalence.
531. K a r m a r k a r K. R., Proc. Indian Acad. Sci., A26, 52 (1947) [MR 9, 213].
A new theorem on the transformability of a line-element into the spherically symmetric form.
532. K a r m a r k a r K. R., Proc. Nat. Inst. Sci. India, 13, 151 (1947) [MR 10, 214].
On stationary line-elements.
533. K a r m a r k a r K. R., Proc. Indian Acad. Sci., A27, 56 (1948) [MR 9, 538].
Gravitational metrics of spherical symmetry and class one.
534. К а с к а р о в В. П., ЖЭТФ, 27, 563 (1954) [MR 16, 1058].
Об уравнениях движения системы конечных масс в теории гравитации Эйнштейна.
535. K a s n e r E., Amer. Journ. Math., 43, 126 (1921) [JF 48, 1039].
The impossibility of Einstein fields immeresed in flat space of five dimensions.
536. K a s n e r E., Amer. Journ. Math., 43, 130 (1921) [JF 48, 1040].
Finite representation of the solar gravitational field in flat space of six dimensions.
537 K a s n e r E., Amer. Journ. Math., 43, 217 (1921) [JF 48, 1040].
Geometrical theorems on Einstein's cosmological equations.

538. K a s n e r E., Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **11**, 95 (1925) [JF **51**, 707].
Separable quadratic differential forms and Einstein solutions.
539. K a s n e r E., Trans. Amer. Math. Soc., **27**, 101 (1925) [JF **51**, 707].
An algebraic solution of the Einstein equations.
540. K a s n e r E., Trans. Amer. Math. Soc., **27**, 155 (1925) [JF **51**, 708].
Solutions of the Einstein equations involving functions of only one variable.
541. K e r m a c k W. O., M c C r e a W. H., Mon. Not. Roy. Astr. Soc., **93**, 519 (1933) [SA **36**, 965].
Milne's theory of world structure.
542. K e r m a c k W. O., M c C r e a W. H., W h i t t a k e r E. T., Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **53**, 31 (1933) [Z **6**, 224].
On properties of null geodesics, and their application to the theory of radiation.
543. K i l m i s t e r C. W., S t e p h e n s o n G., Nuovo Cimento, **11**, Suppl. **91**, 118 (1954) [MR 16, 870].
An axiomatic criticism of unified field theories.
544. K i l m i s t e r C. W., S t e p h e n s o n G., Nuovo Cimento, **1**, 361 (1955), [MR **16**, 1058].
Field equations in general relativity.
545. K l e i n F., Gött. Nachr., 171 (1918) [JF **46**, 1307].
Über die Differentialgesetze für die Erhaltung von Impuls und Energie in der Einsteinschen Gravitationstheorie.
546. K l e i n F., Gött. Nachr., 394 (1918) [JF 46, 1308].
Über die Integralform der Erhaltungssätze und die Theorie der räumlichgeschlossen Welt.
547. K l e i n F., Proc. K. Akad. Wet. Amsterdam, **21**, 614 (1919) [JF 47, 805].
Bemerkungen über die Beziehungen des de Sitter'schen Koordinatensystems B zu der allgemeinen Welt konstanter positiver Krümmung.
548. K l e i n F., H i l b e r t D., Gött. Nachr., 1915, S. 395; 1917, S. 469 [JF **46**, 1299].
Zu Hilberts erster Note über die Grundlagen der Physik.
549. K l e i n O., Ark. Mat. Astr. Fys., **A34**, No. 19 (1948) [MR **9**, 627].
On a case of radiation equilibrium in general relativity theory and its bearing on the early stages of stellar evolution.
550. K l e i n O., Rev. Mod. Phys. **21**, 531 (1949) [MR **11**, 468].
On the thermodynamical equilibrium of fluids in gravitational fields.
551. K l e i n O., Ark. f. Fys., **7**, 487 (1954) [MR **15**, 995].
On a class of spherically symmetric solutions of Einstein's gravitational equations.
552. K o g b e t l i a n t z E., Ann. phys., **16**, 71 (1931) [Z **3**, 180].
Sur la vitesse de propagation de la gravitation.
553. K o h l e r M., Ann. d. Phys., **16**, 129 (1933) [Z **6**, 231].
Beiträge zum kosmologischen Problem und zur Lichtausbreitung in Schwerfeldern.
554. K o h l e r M., Zs. f. Phys., **131**, 571 (1952); **134**, 286 (1953) [MR **14**, 416, 913].
Die Formulierung der Erhaltungssätze der Energie und des Impulses in der allgemeinen Relativitätstheorie.
555. K o h l e r M., Zs. f. Phys., **148**, 443 (1957); **150**, 118 (1957) [MR **19**, 495; **20**, 735].
Invariante Flächen der Elektrodynamik.
556. K o m a r A., Phys. Rev., **104**, 544 (1956) [MR **18**, 362].
Necessity of singularities in the solution of the field equations of general relativity.
557. K o m a r A., Phys. Rev., **111**, 1182 (1958) [MR **20**, 736].
Construction of a complete set of independent observables in the general theory of relativity.
558. K o m a r A., Phys. Rev., **113**, 934 (1959) [MR **21**, 222].
Covariant conservation laws in general relativity.

559. Компанеец А. С., ЖЭТФ, 34, 7, 659 (1958) [MR 20, 841].
Сильные гравитационные волны в свободном пространстве.
560. Kopff A., Grundzüge der Einsteinschen Relativitätstheorie, Leipzig, 1921 [JF 48, 979].
561. Kopff A., Phys. Zs., 22, 24 (1921), 179 [JF 48, 1021].
Bemerkung zur Rotationsbewegung im Gravitationsfeld der Sterne.
562. Kottler F., Wien. Ber., 131, 119 (1922) [JF 48, 1034].
Maxwellsche Gleichungen und Metrik.
563. Kottler F., Encykl. d. Math. Wiss. VI, 22a, 159 (1922) [JF 48, 1322].
Gravitation und Relativitätstheorie.
564. Kratzer A., Relativitätstheorie, Aschendorffsche Verlag, Münster, 1956 [MR 18, 363].
565. Kronsbein J., Phys. Rev., 109, 1815 (1958) [MR 19, 1237].
Relativity in static spherical and elliptic space (Einstein's universe).
566. Kunii S., Mem. Coll. Sci. Kyoto Univ., A14, 195 (1931) [Z 3, 228].
On a unified theory of gravitational and electromagnetic fields.
567. Kursunoğlu B., Proc Cambr. Phil. Soc. 47, 177 (1951) [MR 12, 757].
Space-time on the rotating disk.
568. Kustaanheimo P., Soc. Sci. Fenn. Comment. Phys.-Math., 13, No. 12 (1948) [MR 10, 578].
Some remarks concerning the connexion between two sphericaly symmetric relativistic metrics.
569. Kustaanheimo P., Proc. Edinburgh Math. Soc., 9, 13 (1953) [MR 15, 564].
A note on the transformability of spherically symmetric metrics.
570. Kustaanheimo P., Soc. Sci. Fenn. Comment. Phys.-Math., 17, No. 11 (1955) [MR 17, 1145].
Some remarks on the general relativity theory of Birkhoff.
571. Kustaanheimo P., Ann. Acad. Sci. Fennicae, A228 (1957).
On the use of a gravitational vector potential in the relativity theory of Birkhoff.
572. Kustaanheimo P., Soc. Sci. Fenn. Comment. Phys.-Math., 21, No. 3 (1958).
Scalar field theory as a theory of gravitation.
573. Kustaanheimo P., Soc. Sci. Fenn. Comment. Phys.-Math., 21, No. 4 (1958).
On a unified field theory based on the special theory of relativity.
574. Kustaanheimo P., Qvist B., Soc. Sci. Fenn. Comment. Phys.-Math., 13, No. 16 (1948) [MR 10, 579].
A note on some general solutions of the Einstein equations in a spherically symmetric world.
575. Lambrecht H., Astron. Nachr., 254, 113 (1935) [Z 10, 321].
Untersuchungen zur Theorie der Spiralnebel.
376. Lameau J., Compt. Rend., 245, 2208 (1957) [MR 20, 116].
Solution à symétrie sphérique des équations de la relativité générale, en choisissant, comme tenseur d'impulsion-énergie, le tenseur de la théorie électromagnétique de Born—Infeld.
577. Lampariello G., Atti Secondo Congresso Un. Mat. Ital. Bologna, 1940, S. 432 [MR 9, 161].
Sull'accelerazione del centro di gravità nel problema relativistico dei tre corpi.
578. Lampariello G., Pont. Acad. Sci. Comment., 6, 813 (1942) [MR 10, 156].
Il problema degli n corpi nella relatività generale.
579. Lanczos C., Phys. Zs., 23, 537 (1922) [JF 48, 1023).
Ein vereinfachendes Koordinatensystem für die Einsteinschen Gravitationsgleichungen.
580. Lanczos C., Phys. Zs., 23, 539 (1922) [JF 48, 1028; Robertson [989]].
Bemerkung zur de Sitterschen Welt.
581. Lanczos C., Zs. f. Phys., 13, 7 (1923) [JF 49, 650].
Zur Theorie der Einsteinschen Gravitationsgleichungen.

582. L a n c z o s C., Zs. f. Phys., **14**, 204 (1923) [JF **49**, 651].
Zum Rotationsproblem der allgemeinen Relativitätstheorie.
583. L a n c z o s C., Zs. f. Phys., **17**, 168 (1923) [JF **49**, 652 (см. также Robertson [989])].
Über die Rotverschiebung in der de Sitterschen Welt.
584. L a n c z o s C., Ann. d. Phys., **74**, 518 (1924) [JF **50**, 584].
Flächenhafte Verteilung der Materie in der Einsteinschen Gravitationstheorie
585. L a n c z o s C., Zs. f. Phys., **21**, 73 (1924) [JF **50**, 594].
Über eine stationäre Kosmologie im Sinne der Einsteinschen Gravitationstheorie.
586. L a n c z o s C., Zs. f. Phys., **32**, 56 (1925) [JF **51**, 706].
Über eine zeitlich periodische Welt und eine neue Behandlung des Problems der Ätherstrahlung.
587. L a n c z o s C., Zs. f. Phys., **32**, 135 (1925) [JF **51**, 707].
Zum Problem der Atherstrahlung in einer räumlich geschlossenen Welt.
588. L a n c z o s C., Zs. f. Phys., **31**, 112 (1925) [JF **51**, 710].
Zum Problem der unendlich schwachen Felder in der Einsteinschen Gravitationstheorie.
589. L a n c z o s C., Zs. f. Phys., **32**, 163 (1925) [FJ **51**, 710].
Zum Wirkungsprinzip der allgemeinen Relativitätstheorie.
590. L a n c z o s C., Acta Litt. Sci. R. Univ. Hugh. Francisco-Josephinae Szeged, **2**, 182 (1925) [JF **51**, 710].
Zur Anwendung des Variationsprinzip in der allgemeinen Relativitätstheorie.
591. L a n c z o s C., Zs. f. Phys., **33**, 128 (1925) [JF **51**, 738].
Stationäre Elektronenbahnen und die Methode der Eigenfunktionen.
592. L a n c z o s C., Math. Ann., **95**, 143 (1925) [JF **51**, 305].
Über tensorielle Integralgleichungen.
593. L a n c z o s C., Zs. f. Phys., **44**, 773 (1927) [JF **53**, 819].
Zur Dynamik der allgemeinen Relativitätstheorie.
594. L a n c z o s C., Phys. Zs., **28**, 723 (1927) [JF **53**, 819].
Zum Bewegungsprinzip der allgemeinen Relativitätstheorie.
595. L a n c z o s C., Math. Naturwiss. Anzeiger Ungarischen Akad. Wiss., **46**, **554** (1929) [JF **55**, 1170].
Die invariante Fassung der Erhaltungssätze in der allgemeinen Relativitätstheorie.
596. L a n c z o s C., Zs. f. Phys., **59**, 514 (1930) [JF **56**, 733].
Über eine invariante Formulierung der Erhaltungssätze in der allgemeinen Relativitätstheorie.
597. L a n c z o s C., Ergebn. d. exakt. Naturwiss., **10**, 97 (1931) [Z **2**, 423].
Die neue Feldtheorie Einsteins.
598. L a n c z o s C., Zs. f. Phys., **73**, 147 (1931) [Z **3**, 177].
Elektromagnetismus als natürliche Eigenschaft der Riemannschen Geometrie.
599. L a n c z o s C., Phys. Rev., **39**, 188, 716 (1932) [Z **4**, 87].
Electricity as a natural property of Riemannian geometry.
600. L a n c z o s C., Zs. f. Phys., **75**, 63 (1932) [Z **4**, 88].
Zum Auftreten des Vektorpotentials in der Riemannschen Geometrie.
601. L a n c z o s C., Ann. d. Phys., **13**, 621 (1932) [Z **4**, 423].
Zur Frage der regulären Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen.
602. L a n c z o s C., Zs. f. Phys., **96**, 76 (1935) [Z **12**, 134].
Ein neue Aufbau der Weltgeometrie.
603. L a n c z o s C., Ann. of Math., **39**, 842 (1938) [Z **19**, 379].
A remarkable property of the Riemann-Christoffel tensor in four dimensions.
604. L a n c z o s C., Phys. Rev., **59**, 708 (1941) [SA **44**, 215].
The total mass of a particle in general relativity.

605. L a n c z o s C., Phys. Rev., **59**, 813 (1941) [MR **2**, 326].
The dynamics of a particle in general relativity.
606. L a n c z o s C., Phys. Rev., **61**, 713 (1942) [MR **4**, 56].
Matter waves and electricity.
607. L a n c z o s C., Rev. Mod. Phys., **21**, 497 (1949) [MR **11**, 548].
Lagrangian multiplier and Riemannian spaces.
608. L a n c z o s C., Nuovo Cimento, **10**, 2 Suppl., 1193 (1955).
Albert Einstein and the theory of relativity.
609. L a n c z o s C., Rev. Mod. Phys., **29**, 337 (1957) [MR **19**, 926].
Electricity and general relativity.
610. L a n c z o s C., Cahiers de Phys., **95**, 247 (1958).
Electricité et relativité générale.
611. L a n c z o s C., Amer. Sci., 47, 41 (1959).
Albert Einstein and the role of theory in contemporary physics.
612. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М., Теория поля, 4-е изд., М., 1962 [MR**13**, 288].
613. v o n L a u e M., Die Relativitätstheorie. 2. Band: Die allgemeine Relativitätstheorie und Einstein's Lehre von der Schwerkraft, Braunschweig, 1921 [JF **48**, 1321].
614. v o n L a u e M., Sitz. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl., 1931, S. 123 [Z **1**, 245 (см. также Robertson [989]).
Die Lichtfortpflanzung in Räumen mit zeitlich veränderlicher Krümmung nach der allgemeinen Relativitätstheorie.
615. v o n L a u e M., Zs. Astrophys., **12**, 208 (1936) [Z **17**, 144].
Theoretisches über die Helligkeit ferner Nebel.
616. v o n L a u e M., Die Relativitätstheorie. Bd. 2, die allgemeine Relativitätstheorie, 4th ed., Braunschweig, 1956.
617. v o n L a u e M., S e n N., Ann. d. Phys., **74**, 252 (1924) [JF **50**, 585].
Die de Sittersche Welt.
618. L e a v i t t W. G., Amer. Math. Monthly, **46**, 26 (1939). [Z **20**, 284].
Planetary orbits in general relativity.
619. L e c a t M., Bibliographie de la relativité, Brussels, 1924 [JF **50**, 576].
620. L e e s A., Phil. Mag., **28**, 385 (1939) [MR **1**, 183].
The electron in general relativity theory.
621. L e m a î t r e G., Journ. Math. Phys., **4**, 188 (1925).
Note on de Sitter's universe.
622. L e m a î t r e G., Ann. Soc. Sci. Bruxelles, **A47**, 49 (1927), Translated in Mon. Not. Roy. Astr. Soc., **91**, 483 (1931) [JF **53**, 902 (см. также Robertson [989])].
Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant, rendant compte de la vitesse radiale de nébuleuses extra-galactiques.
623. L e m a î t r e G., Bull. Astron. Inst. Netherlands, **5**, Nr. 200, 273 (1930) (см. также Robertson [989]).
On the random motion of material particles in an expanding universe. Explanation of a paradox.
624. L e m a î t r e G., Mon. Not. Roy. Astr. Soc., **91**, 490 (1931) Z2, 92 (см. также Robertson [989])].
The expanding universe.
625. L e m a î t r e G., Compt. Rend., **196**, 903 (1933) [Z **6**, 234].
Condensations sphériques dans l'univers en expansion.
626. L e m a î t r e G., Compt. Rend., **196**, 1085 (1933) [Z **6**, 377].
La formation des nébuleuses dans l'univers en expansion.
627. L e m a î t r e G., Ann. Soc. Sci. Bruxelles, **A53**, 97 (1933) [Z **7**, 331].
L'univers en expansion.
628. L e m a î t r e G., Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **20**, 379 (1934) [Z **8**, 379].
Evolution of the expanding universe.

629. Lemaître G., Rev. Mod. Phys., **21**, 357 (1949) [MR **11**, 216].
Cosmological application of relativity.
630. Lense J., Thirring H., Phys. Zs., **19**, 156 (1918) [JF **46**, 1317].
Über den Einfluss der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie.
631. Levi-Civita T., Rend. Acc. Lincei, **26**, 381 (1917) [JF **46**, 1318].
Sulla espressione analitica spettante al tensore gravitazionale nella teoria di Einstein.
632. Levi-Civita T., Rend. Acc. Lincei, **26**, 458 (1917) [JF **46**, 1319].
Statica einsteiniana.
633. Levi-Civita T., Rend. Acc. Lincei, **26**, 519 (1917) [JF **46**, 1320].
Realtà fisica di alcuni spazî normali die Bianchi.
634. Levi-Civita T., Rend. Circ. Mat. Palermo, **42**, 173 (1917).
Nozione di parallelismo in una varietà e consequente specificazione geometrica della curvature Riemanniana.
635. Levi-Civita T., Rend. Acc. Lincei, **26**, 307 (1917); **27**, 3 (1918); **27**, 183, 220, 240, 283, 343 (1918); **28**, 3, 101 (1919) [JF **46**, 1321—1327; **47**, 798].
ds^2 einsteiniani in campi newtoniani.
636. Levi-Civita T., Nuovo Cimento, **16**, 105 (1918) [JF **46**, 1328].
La teoria di Einstein e il principio di Fermat.
637. Levi-Civita T., Math. Ann., **97**, 291 (1926) [JF **52**, 740].
Sur l'écart géodésique.
638. Levi-Civita T., The absolute differential calculus, London, 1927 [JF **53**, 682].
639. Levi-Civita T., Fondamenti di meccanica relativistica, Bologna, 1928 [JF **54**, 939].
640. Levi-Civita T., Rend. Acc. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., **11**, 3, 113 (1930), [JF **56**, 1281].
Caratteristiche e bicaratteristiche delle equazioni gravitazionali die Einstein.
641. Levi-Civita T., Atti Pontif. Accad. Sci., **84**, 332 (1931) [Z **2**, 367].
Rifrazione e riflessione nella relatività generale.
642. Levi-Civita T., Atti Accad. Naz. Lincei Rend., **20**, 398 (1934) [Z **11**, 41].
Perfezionamento della regola di equivalenza fra moti einsteiniani e moti newtoniani.
643. Levi-Civita T., Enseignement Math., **34**, 149 (1935) [Z **13**, 233].
Le problème des deux corps en relativité générale.
644. Levi-Civita T., Amer. Journ. Math., **59**, 9 (1937) [Z **16**, 185].
The relativistic problem of several bodies.
645. Levi-Civita T., Amer. Journ. Math., **59**, 225 (1937) [Z **16**, 282].
Astronomical consequences of the relativistic two-body problem.
646. Levi-Civita T., Le problème des *n* corps en relativité générale, Paris, 1950 [MR **13**, 499].
647. Levinson H. C., Compt. Rend., **176**, 981 (1923) [JF **49**, 648].
Sur le champ gravitationnel de *n* corps dans la théorie de la relativité.
648. Levinson H. C., Proc. Int. Math. Congr. Toronto, **2**, 243 (1928) [JF **54**, 942].
The gravitational field of *n* moving particles in the theory of relativity.
649. Levinson H. C., Zeisler E. B., The law of gravitation in relativity, Chicago, 1931 [Z **2**, 366].
650. Levy H., Atti R. Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Fis. Mat. Nat., **4**, 35 (1926); Annali di Mat., **4**, 107 (1927) [JF **52**, 929; **53**, 820].
Moti einsteiniani di un mezzo disgregato con simmetria sferica.
651. Lewis T., Proc. Roy. Soc., **A136**, 176 (1932) [Z **5**, 269].
Some special solutions of the equations of axially symmetric gravitational fields.
652. Lichnerowicz A., Compt. Rend., **205**, 25 (1937) [Z **17**, 142].
Extension du théorème de Gauss-Whittaker.

653. Lichnerowicz A., Compt. Rend., **206**, 157 (1938) [Z **18**, 185].
Sur les singularités du ds^2 extérieur.
654. Lichnerowicz A., Compt. Rend., **206**, 313 (1938) [Z **18**, 186].
Espaces-temps extérieurs reguliers partout.
655. Lichnerowicz A., Problèmes globaux en mécanique relativiste, Paris, 1939 [MR **1**, 282].
656. Lichnerowicz A., Compt. Rend., **211**, 117 (1940) [MR **3**, 92].
Sur un theorème d'hydrodynamique relativiste.
657. Lichnerowicz A., Compt. Rend., **212**, 421 (1941) [MR **3**, 62].
Sur la définition géométrique des processus materiéls en relativité générale.
658. Lichnerowicz A., Ann. Sci. École Norm. Sup., **58**, 285 (1941) [MR **7**, 140].
Sur l'invariant intégral de l'hydrodynamique relativiste.
659. Lichnerowicz A., Compt. Rend., **213**, 12 (1941) [MR **5**, 130].
Opérateurs hermitiques et espace de Riemann.
660. Lichnerowicz A., Compt. Rend., **213**, 516 (1941) [MR **5**, 130]
Sur l'intégration des équations d'Einstein.
661. Lichnerowicz A., Compt. Rend., **213**, 549 (1941) [MR **5**, 130].
Sur l'intégration des équations de la relativité.
662. Lichnerowicz A., Bull. Sci. Math., **65**, 140 (1941) [MR **7**, 140].
Sur des théorèmes d'unicité relatifs aux équations gravitationnelles du cas intérieur.
663. Lichnerowicz A., Compt. Rend., **216**, 863 (1943) [MR **6**, 73].
Sur l'invariant intégral des équations relativistes de l'électromagnétisme.
664. Lichnerowicz A., Ann. Sci. École Norm. Sup., **60**, 247 (1943) [MR **7**, 397].
Sur les équations relativistes de l'électromagnétisme.
665. Lichnerowicz A., Compt. Rend., **219**, 270 (1944) [MR **7**, 342].
Sur les équations de l'hydrodynamique des fluides visqueux et la notion de fluide incompressible en relativité générale.
666. Lichnerowicz A., Journ. Math. Pures Appl., **23**, 37 (1944) [MR **7**, 266].
L'intégration des équations de la gravitation relativiste et le problème des n corps.
667. Lichnerowicz A., Compt. Rend., **221**, 652 (1945) [MR **7**, 266].
Sur une proposition fondamentale de la théorie relativiste de la gravitation.
668. Lichnerowicz A., Compt. Rend., **222**, 432 (1946) [MR **7**, 397].
Sur le caractère euclidien d'espaces-temps extérieurs statistiques partout réguliers.
669. Lichnerowicz A., Bull. Soc. Math. France, **80**, 237 (1952) [MR **14**, 1133].
Sur les équations relativistes de la gravitation.
670. Lichnerowicz A., Étude mathématique des théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme. 1. Relativité générale classique, Cours professé au Collège de France, Paris, 1953 [MR **15**, 358].
671. Lichnerowicz A., Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme, Paris, 1955 [MR **17**, 199].
672. Lichnerowicz A., Problèmes généraux d'intégration des équations de la relativité. JRT, 1955, p. 176.
673. Lichnerowicz A., Compt. Rend., **246**, 893 (1958) [MR **19**, 1237].
Sur les ondes et radiations gravitationnelles.
674. Lichnerowicz A., Cahiers de Physique, **12**, 287 (1958) [MR **21**, 356].
Ondes électromagnétiques et ondes gravitationnelles en relativité générale.
675. Lichnerowicz A., Fourès-Bruhat Y., Compt. Rend., **226**, 2119 (1948) [MR **10**, 157].
Théorème global sur les ds^2 extérieurs généraux d'Einstein.
676. Lichnerowicz A., Walker A. G., Compt. Rend., **221**, 394 (1945) [MR **7**, 395].
Sur les espaces riemanniens harmoniques de type hyperbolique normal.

677. Лифшиц Е., ЖЭТФ, 10, 116 (1946) [RM 8, 175].
О гравитационной стабильности расширяющейся вселенной.
678. Lindblad B., Astron. Nachr., 257, 195 (1935) [Z 12, 283].
Über die Spiralbildung bei den Nebeln.
679. Lorentz H. A., Proc. K. Akad. Wet. Amsterdam, 19, 751 (1917).
On Hamilton's principle in Einstein's theory of gravitation.
680. Lorentz H. A., Proc. K. Akad. Wet. Amsterdam, 19, 1341, 1354 (1917); 20, 2, 20 (1918) [JF 46, 1328].
On Einstein's theory of gravitation.
681. Lorentz H. A., Nature, 112, 103 (1923) [SA 26, 851].
Influence of the earth's rotation on optical phenomena.
682. Lorentz H. A., Droste J., Amst. Akad. Versl., 26, 392 (1917) [JF 46, 1333].
The motion of a system of bodies under the influence of their mutual attraction according to the theory of Einstein.
683. Lorentz H. A., Einstein A., Minkowski H., Weyl H., The principle of relativity, London, 1923.
684. Ludwig G., Fortschritte der projektiven Relativitätstheorie, Vieweg, Braunschweig, 1951 [MR 14, 213].
685. Majorana Q., Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., 19, 95 (1955) [MR 17, 1145].
Su di una nova teoria della gravitazione.
686. Majumdar S. D., Science and Culture, 12, 295 (1946) [MR 8, 536].
A note on a class of solutions of Einstein's electrostatic field equations.
687. Majumdar S. D., Bull. Calcutta Math. Soc., 38, 85 (1946) [MR 8, 536].
On the relativistic analogue of Earnshaw's theorem on the stability of a particle in a gravitational field.
688. Majumdar S. D., Science and Culture, 12, 344 (1947) [MR 8, 537].
Note on a class of solutions of Einstein's field equations in an electrostatic field.
689. Majumdar S. D., Phys. Rev., 72, 390 (1947) [MR 9, 213].
A class of exact solutions of Einstein's field equations.
690. Mandel H., Abh. Semin. Vektor-u. Tensoranalysis usw., Moskau Liefg., 4, 62 (1937) [Z 17, 236].
Einheitliche Theorie des elektromagnetischen und des Gravitationsfeldes. (Beispiel einer Anwendung der Kongruenztheorie im Riemannschen Raume.)
691. Maravall Casesnoves D., Revista Mat. Hisp.-Amer., 11, 277 (1951) [MR 14, 98].
Структура сред с аксиальной симметрией в общей теории относительности (на испанском).
692. Maravall Casesnoves D., Revista Mat. Hisp.-Amer., 13, 175 (1953) [MR 15, 657].
Релятивистская теория притяжения сферы в присутствии пульсаций или вращения (на испанском).
693. Marcolongo R., Relatività, Messina, 1921 [JF 48, 981].
694. Marder L., Proc. Cambr. Phil. Soc., 53, 194 (1957) [MR 19, 103].
On uniform acceleration in special and general relativity.
695. Marder L., Proc. Roy. Soc., A244, 524 (1958); 246, 133 (1958) [MR 21, 356, 357].
Gravitational waves in general relativity. I. Cylindrical waves. II. The reflexion of cylindrical waves.
696. Marder L., Proc. Roy. Soc., A252, 45 (1959).
Flat space-times with gravitational waves.
697. Margerison T. A., New Scientist, 7, 325 (1960).
A verification of Einstein.

698. M a r i a n i J. Cahiers de Physique, **28**, 23 (1945); **33**, 31 (1948); **34**, 1 (1950) [MR 9, 387; **13**, 501].
Electromagnétisme et relativité. Le magnétisme terrestre comme conséquence de la relativité générale.
699. M a r i o t L., Compt. Rend., **238**, 2055; **239**, 1189 (1954); **241**, 175 (1955) [MR **15**, 995; **16**, 756; 17, 110].
Le champ électromagnétique singulier.
700. M a r i o t L., Compt. Rend., **245**, 630 (1957).
Distribution champ électromagnétique pur-matière chargée.
701. M a r i o t L., Compt. Rend., **245**, 1386 (1957) [MR **19**, 926].
Champ électromagnétique singulier complètement intégrable.
702. M a r t i n D., Proc. Edinburgh Math. Soc., **7**, 39 (1942) [MR **4**, 207].
On the methods of extending Dirac's equation to general relativity.
703. M a s t C. B., S t r a t h d e e J., Proc. Roy. Soc., **A252**, 476 (1959).
On the relativistic interpretation of astronomical observations.
704. M a t h i s s o n M., Zs. f. Phys., **67**, 826 (1931) [Z **1**, 246].
Die Mechanik des Materieteilchens in der allgemeinen Relativitätstheorie.
705. M a t h i s s o n M., Zs. f. Phys., **69**, 389 (1931) [Z **2**, 90].
Bewegungsproblem der Feldphysik und Elektronenkonstanten.
706. M a t h i s s o n M., Acta. Phys. Polon., **6**, 163 (1937) [Z **17**, 430].
Neue Mechanik materieller Systeme.
707. M a t h i s s o n M., Acta. Phys. Polon., **6**, 218 (1937) [Z **17**, 430].
Das zitternde Elektron und seine Dynamik.
708. M a t t e A., Canad. Journ. Math., **5**, 1 (1953) [MR **14**, 1022].
Sur de nouvelles solutions oscillatoires des équations de la gravitation.
709. M a y e r W., T h o m a s T. Y., Lectures on tensor analysis and differential geometry, mimeographed. Inst. Adv. Stud. and Princeton Univ., 1936—1937.
710. M c C o n n e l l A. J., Atti R. Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., **7**, 638 (1928) [JF **54**, 940].
Il principio dell'azione stazionaria e stabilità in un campo statico gravitazionale.
711. M c C o n n e l l A. J., Rend. Circ. Mat. Palermo, **52**, 425 (1928) [JF **54**, 940].
Stabilità in un campo statico gravitazionale.
712. M c C o n n e l l A. J., Annali di Mat., **6**, 207 (1929) [JF **55**, 1032].
Strain and torsion in Riemannian space.
713. M c C r e a W. H., Proc. Edinburgh Math. Soc., **2**, 158 (1931) [Z **1**, 181].
A «cubical» universe.
714. M c C r e a W. H., Phil. Mag., **16**, 707 (1933) [Z **7**, 426].
On the interpretation of Einstein's unified field theory.
715. M c C r e a W. H., Zs. Astrophys., **9**, 290 (1935); **18**, 98 (1939) [Z **11**, 41; **20**, 424].
Observable relations in relativistic cosmology.
716. M c C r e a W. H., Proc. Edinburgh Math. Soc., **5**, 211 (1938) [Z **19**, 286].
Geometrical foundations of certain relativity theories.
717. M c C r e a W. H., Proc. Roy. Soc., **A206**, 562 (1951) [MR **12**, 866].
Relativity theory and the creation of matter.
718. M c C r e a W. H., The Physical Society Reports on progress in physics, **16**, 321 (1953) [SA **56**, 1050).
Cosmology.
719. M c C r e a W. H., M c V i t t i e G. C., Mon. Not. Roy. Astr. Soc., **92**, **7** (1931) [Z **3**, 229].
The expanding universe.
720. M c C r e a W. H., M i k h a i l F. I., Proc. Roy. Soc., **A235**, 11 (1956) [MR **17**, 1144].
Vector-tetrads and the creation of matter.

721. McVittie G. C., Mon. Not. Roy. Astr. Soc., **91**, 274 (1931) [Z **1**, 35].
The problem of n bodies and the expansion of the universe.
722. McVittie G. C., Proc. Edinburgh Math. Soc., **2**, 140 (1931) (Z 1, 244].
Solution with axial symmetry of Einstein's equations of teleparallelism.
723. McVittie G. C., Mon. Not. Roy. Astr. Soc., **92**, 500 (1932) [Z **4**, 425].
Condensations in an expanding universe.
724. McVittie G. C., Mon. Not. Roy. Astr. Soc., **93**, 325 (1933) [Z 7, 84].
The mass-particle in an expanding universe.
725. McVittie G. C., Mon. Not. Roy. Astr. Soc., **94**, 476 (1934) [Z **9**, 239].
Remarks on the geodesics of expanding space-time.
726. McVittie G. C., Proc. Roy. Soc., **A151**, 357 (1935) [Z **12**, 232].
Absolute parallelism and metric in the expanding universe theory.
727. McVittie G. C., Zs. Astrophys., **10**, 382 (1935) [Z **12**, 377].
Gravitation in cosmology theory.
728. McVittie G. C., Mon. Not. Roy. Astr. Soc., **96**, 683 (1936) [Z **14**, 235].
Note on polytropic equilibrium in curved space.
729. McVittie G. C., Cosmological theory, London, 1949 [MR **11**, 468].
730. McVittie G. C., Astron. Journ., **59**, 173 (1954) [MR **16**, 1165].
Relativistic and Newtonian cosmology.
731. McVittie G. C., Astron. Journ., **60**, 105 (1955) [MR **16**, 1163].
Relativity and the statistical theory of the distribution of galaxies.
732. McVittie G. C., General relativity and cosmology, New York, 1956 [MR **19**, 370].
733. Meister H. J., Ann. d. Phys., **19**, 268 (1956) [MR **19**, 615].
Die Bewegungsgleichungen in der allgemeinen Relativitätstheorie.
734. Meister H. J., Zs. d. Phys., **147**, 531 (1957) [MR **18**, 977].
Die Bewegungsgleichungen in der Theorie des Gravitationsfeldes mit einer Feldfunktion.
735. Meister H. J., Papapetrou A., Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, **3**, 163 (1955) [MR **16**, 1166].
Die Bewegungsgleichungen in der allgemeinen Relativitätstheorie und die Koordinatenbedingung.
736. Meksyn D., Phil. Mag., **17**, 99, 476 (1934) [Z **8**, 378].
A unified field theory. I. Electromagnetic field. II. Gravitation.
737. Mie G., Phys. Zs., **15**, 115, 169 (1914) [JF **45**, 1122].
Bemerkungen zu der Einsteinschen Gravitationstheorie.
738. Mie G., Das Prinzip von der Relativität des Gravitationspotential, Elster-Geitel-Festschrift, 1915, S. 251 [JF **45**, 1123].
739. Mie G., Phys. Zs., **18**, 551, 574, 596 (1917) [JF **46**, 1289].
Die Einsteinsche Gravitationstheorie und das Problem der Materie.
740. Mie G., Ann. d. Phys., **69**, 1 (1922) [JF **48**, 1026].
Träge und schwere Masse.
741. Mie G., Die Einsteinsche Gravitationstheorie, Versuch einer allgemein verständlichen Darstellung der Theorie, 2te Auflage, Leipzig, 1923 [JF **49**, 617].
742. van Mieghem J., Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci., **30**, 291, 410 (1944) [MR **8**, 175].
Les ondes gravifiques et les variables de Th. De Donder.
743. Mikhail F. I., Proc. Cambr. Phil. Soc., **48**, 608 (1952) [MR **14**, 417].
The relativistic clock problem.
744. Milkutat E., Astron. Nachr., **266**, 41 (1938) [Z **18**, 430].
Zur Instabilität des Universums; Eine Bemerkung zur Boltzmann-Statistik im expandierenden sphärischen Weltmodell.
745. Milne E. A., Relativity, gravitation and world-structure, Oxford, 1935 [Z **11**, 279].
746. Milne E. A., Proc. Roy. Soc., **A158**, 324 (1937); **159**, 171, 526 (1937) [Z **16**, 185].
Kinematics, dynamics, and the scale of time.

747. M i l n e E. A., Journ. London Math. Soc., **15**, 44 (1940) [MR **2**, 25].
Kinematical relativity.

748. M i l n e E. A., Kinematic relativity; A sequel to Relativity, gravitation and worldstructure, Oxford, 1948 [MR **10**, 578].

749. M i l n e r S. R., Phil. Mag., **44**, 705 (1922) [SA **26**, 30].
Tubes of electromagnetic force.

750. M i m u r a Y., Journ. Sci. Hiroshima Univ., **A6**, 203 (1936) [Z **13**, 368].
Microscopic field theory.

751. M i m u r a Y., Journ. Sci. Hiroshima Univ., **A7**, 81 (1937) [Z **17**, 237].
Geometrization of the laws of physics.

752. M i m u r a Y., Japan Journ. Phys., **14**, 17 (1942) [MR **12**, 569].
Sinopsis of wave geometry.

753. M i m u r a Y., H o s o k a w a T., Journ. Sci. Hiroshima Univ., **A7**, 249 (1937) [Z **17**, 238].
Physics and geometry.

754. M i m u r a Y., H o s o k a w a T., Journ. Sci. Hiroshima Univ., **A9**, 217 (1939) [Z **22**, 186].
Space, time and the laws of nature.

755. M i m u r a Y., I w a t s u k i T., Journ. Sci. Hiroshima Univ., **A5**, 205 (1935) [Z **12**, 233].
Theory of gravitation based on wave geometry.

756. M i m u r a Y., I w a t s u k i T., Journ. Sci. Hiroshima Univ., **A7**, 259 (1937) [Z **17**, 238].
New foundations of atomic structure.

757. M i m u r a Y., I w a t s u k i T., Journ. Sci. Hiroshima Univ., **A8**, 193 (1938) [Z **20**, 191].
Cosmology in terms of wave geometry. I. General discussion.

758. M i n e u r H., Bull. Soc. Math. France, **56**, 50 (1928) [JF **54**, 948].
Sur les ondes de gravitation.

759. M i n e u r H., L'univers en expansion, Paris, 1933 [Z **6**, 376].

760. M i n k o w s k i H., Phys. Zs., **10**, 104 (1909).
Raum und Zeit.

761. M i n k o w s k i H., Das Relativitätsprinzip, Deutsche Math.-Ver., **24**, 372 (1915); Ann. d. Phys., 47, 927 (1915) [JF, **45**, 1113; **46**, 1283].

762. d e M i r a F e r n a n d e z A., Atti Accad. Naz. Lincei Rend., **15**, 797 (1932) [Z **4**, 424].
Sulla teoria unitaria dello spazio fisico.

763. M i s n e r C. W., W h e e l e r J. A., Ann. of Phys., **2**, 525 (1957) [MR **19**, 1237].
Classical physics as geometry: Gravitation, electromagnetism, unquantized charge and mass as properties of empty space.

764. M i t t e r O. K., Tôhoku Math. Journ., **34**, 110 (1931) [Z **2**, 302].
On a solution of Einstein's gravitational equations $G_{\mu\nu}=0$, symmetrical about an axis.

765. M o g h e D. N., Proc. Indian Acad. Sci., **A10**, 399 (1939) [MR **1**, 184].
On the stability of an isolated fluid sphere.

766. M o g h e D. N., S a s t r y R. V., Proc. Nat. Acad. Sci. Allahabad, **6**, 91 (1936) [Z **14**, 283].
The field of a non-static spherical condensation.

767. M ø l l e r C., The theory of relativity, Oxford, 1952 [MR **14**, 212].

768. M ø l l e r C., Ann. of Phys., **4**, 347 (1958) [MR **20**, 116].
On the localization of energy of a physical system in the general theory of relativity.

769. M ø l l e r C., Über die Energie nichtabgeschlossener Systeme in der allgemeinen Relativitätstheorie, Max Planck Festschrift, Berlin, 1958.

770. M o o n P. B., Nature, 185, 427 (1960).
Developments in gamma-ray optics.
771. M o r i n a g a K., Journ. Sci. Hiroshima Univ., A5, 151 (1935); 6, 103 (1936) [Z 12, 232; 13, 228].
Wave geometry; Geometry in microscopic space.
772. M o r i n a g a K., Journ. Sci. Hiroshima Univ., A7, 49 (1937) [Z 17, 237].
Wave geometry including Schwarzschild's and de Sitter's solution.
773. M o r i n a g a K., Journ. Sci. Hiroshima Univ., A7, 169 (1937) [Z 17, 238].
On the general parallel displacement which makes $ds\ \Psi=0$ invariant.
774. M o r i n a g a K., Journ. Sci. Hiroshima Univ., A7, 173 (1937) [Z 17, 238].
Geometrical interpretations of wave geometry.
775. M o r i n a g a K., Journ. Sci. Hiroshima Univ., A7, 263 (1937) [Z 17, 238].
The hydrogen atom in terms of wave geometry.
776. M o r i n a g a K., T a k e n o H., Journ. Sci. Hiroshima Univ., A6, 191 (1936) [Z 13, 368].
On some solutions of $^1/_2 \sqrt{\Delta}\varepsilon_{stpq}K_{lm}{}^{\cdot\cdot pq}=K_{lmst}$.
777. M o r l e y F., Amer. Journ. Math., 43, 29 (1921) [JF 48, 1040].
Note on Einstein's equation of an orbit.
778. M o r r i s T. F., Phys. Rev., 69, 541 (1946) [MR 7, 532].
The two-body problem in Einstein's and Birkhoff's theories.
779. M o r t o n W. B., Phil. Mag., 42, 511 (1921) [JF 48, 1329].
The forms of planetary orbits on the theory of relativity.
780. M ö s s b a u e r R. L., Zs. f. Phys., 151, 124 (1958) [SA 61, 834].
Kernresonanzfluoreszenz von Gammastrahlung in Ir^{191}.
781. M ö s s b a u e r R. L., Naturwiss, 45, 538 (1958) [SA 62, 469].
Kernresonanzabsorption von Gammastrahlung in Ir^{191}.
782. M ö s s b a u e r R. L., Zs. Naturforsch. 14a, 211 (1959).
Kernresonanzabsorption von γ-strahlung in Ir^{191}.
783. M u k e r j i B. C., Zs. f. Phys., 101, 270 (1936) [Z 14, 283].
Über elektromagnetische Wellen im Friedmannschen Raum.
784. M u k e r j i B. C., Bull. Calcutta Math. Soc., 30, 95 (1938) [Z 20, 284].
Two cases of exact gravitational fields with axial symmetry.
785. M u k e r j i B. C., Zs. Astrophys., 15, 1 (1938).
On the possibility of expansion of a slowly rotating mass of incoherent particles under gravitational forces.
786. M u k e r j i B. C., Phil. Mag., 26, 1068 (1938) [Z 20, 92].
On gravitational waves in linearized fields.
787. M u r n a g h a n F. D., Vector analysis and the theory of relativity, Baltimore, 1922 [JF 48, 1064].
788. M u r n a g h a n F. D., Phil. Mag., 43, 580 (1922) [JF 48, 1330].
The deflexion of a ray of light in the solar gravitational field.
789. N a g y K., Bull. Acad. Polon., Cl. III, 4, 683 (1956) [MR 18, 856].
Über die Bewegungsgleichungen des Pol-Dipol-Teilchens.
790. N a r i a i H., Sci. Rept. Tôhoku Univ., Ser. I, 34, 160 (1950) [MR 14, 1133].
On some static solutions of Einstein's gravitational field equations in a spherically symmetric case.
791. N a r i a i H., Sci. Rep. Tôhoku Univ., Ser. I, 35, 62 (1951) [MR 14, 1133].
On a new cosmological solution of Einstein's field equations of gravitation.
792. N a r i a i H., U e n o Y., Progr. Theor. Phys., 20, 703 (1958) [MR 20, 938].
On the tests of gravitational theories in terms of an artificial satellite.
793. N a r l i k a r V. V., Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 96, 263 (1936) [Z 13, 329].
The stability of a particle in a gravitational field.
794. N a r l i k a r V. V., Phil. Mag., 22, 767 (1936) [Z 15, 278].
A generalization of Schwarzschild's interior solution.

795. Narlikar V. V., Proc. Indian Acad. Sci., **A14**, 187 (1941) [MR **3**, 212].
The gravitational equations of motion in relativity.
796. Narlikar V. V., Proc. Nat. Inst. Sci. India, 7, 237 (1941) [MR **8**, 536].
The two-boby problem in Einstein's new relativity.
797. Narlikar V. V., Current Sci., **10**, 164 (1941) [MR **8**, 536].
The consistency of Einstein's new relativity with the geodesic postulate.
798. Narlikar V. V., Karmarkar K. B., Nature, **157**, 515 (1946) [MR **7**, 531].
Geodesic form of Schwarzschild's exterior solution.
799. Narlikar V. V., Karmarkar K. R., Current Sci., **15**, 69 (1946) [MR **8**, 536].
On a curious solution of relativistic field equations.
800. Narlikar V. V., Moghe D. N., Mon. Not. Roy. Astr. Soc., **95**, 735 (1935) [Z **12**, 377].
A note on an isotropic solution in relativity.
801. Narlikar V. V., Moghe D. N., Phil. Mag., **20**, 1104 (1935) [Z **13**, 40].
Some new solutions of the differential equations for isotropy.
802. Narlikar V. V., Patwardhan C. K., Vaidya P. C., Proc. Nat. Inst. Sci. India, **9**, 229 (1943) [MR **8**, 536].
Some new relativistic distributions of radial symmetry.
803. Narlikar V. V., Prasad A., Proc. Indian Acad. Sci., **A30**, 181 (1949) [MR **11**, 468].
The Doppler effect in the field of a thick spherical shell.
804. Narlikar V. V., Rao B. R., Proc. Nat. Inst. Sci. India, **A21**, 416 (1955) [MR **18**, 177].
The problem of motion in general relativity.
805. Narlikar V. V., Singh J., Phil. Mag., **23**, 628 (1937) [Z **16**, 185].
The geodesic postulate in general relativity.
806. Narlikar V. V., Singh K. P., Proc. Nat. Inst. Sci. India, **14**, 121 (1948) [MR **10**, 214].
On a gravitational invariant.
807. Narlikar V. V., Singh K. P., Bull. Calcutta Math. Soc., **43**, 168 (1951) [MR **14**, 914].
Stationary gravitational fields.
808. Narlikar V. V., Vaidya P. C., Current Sci., **11**, 390 (1942) [MR **8**, 536].
The equations of fit in general relativity.
809. Narlikar V. V., Vaidya P. C., Nature, **159**, 642 (1947) [MR **8**, 608].
A spherically symmetric non-static electromagnetic field.
810. Narlikar V. V., Vaidya P. C., Proc. Nat. Inst. Sci. India, **14**, 53 (1948) [MR **10**, 214].
Non-static electromagnetic fields with spherical symmetry.
811. Neumann E. R., Vcrlesungen zur Einführung in die Relativitätstheorie Jena, 1922 [JF **48**, 980].
812. Newman E., Goldberg J. N., Phys. Rev., **114**, 1391 (1959).
Measurement of distance in general relativity.
813. Nohl W., Comment. Math. Helv., **29**, 338 (1955) [MR **17**, 1142].
Kosmologische Lösungen eines homogenen Wirkungsprinzip.
814. Nordström G., Ann. d. Phys., **40**, 856 (1913) [JF **44**, 772].
Träge und schwere Masse in der Relativitätstheorie.
815. Nordström G., Ann. d. Phys., **42**, 533 (1913) [JF **44**, 890].
Zur Theorie der Gravitation vom Standpunkt des Relativitätsprinzip.
816. Nordström G., Ann. d. Phys., **43**, 1101 (1914) [JF **45**, 1124].
Die Fallgesetze und Planetenbewegungen in der Relativitätstheorie.
817. Nordström G., Proc. K. Akad. Wet. Amsterdam, **19**, 884 (1917) [JF **46**, 1344].
Einstein's gravitation theory and Herglotz' mechanics of continua.

818. N o r d s t r ö m G., Proc. K. Akad. Wet. Asmterdam, **20**, 1076 (1918).
On the mass of material system according to the gravitation theory of Einstein.

819. N o r d s t r ö m G., Proc. K. Akad. Wet. Amsterdam, **20**, 1238 (1918) [JF, **46**, 1346].
On the energy of the gravitational field in Einstein's theory.

820. N o r d s t r ö m G., Proc. K. Akad. Amsterdam, **21**, 68 (1917) [JF **46**, 1347].
Calculation ot some special cases in Einstein's theory of gravitation.

821. N o v o b a t z k y K., Zs. f. Phys., **72**, 683 (1931) [Z **3**, 178].
Erweiterung der Feldgleichungen.

822. N o v o b a t z k y K., Zs. f. Phys., **89**, 373, 750 (1934) [Z **10**, 89, 90].
Universelle Feldtheorie.

823. N u y e n s M. Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci., **8**, 567 (1922) [JF **48**, 1332].
Trajectoire d'un point électrisé dans le champ dû à un électron pur.

824. N u y e n s M., Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci., **8**, 755 (1922) [JF **48**, 1332].
Trajectoire d'un point matérial dans le champ dû à sphère matérielle.

825. N u y e n s M., Compt. Rend., **176**, 1376 (1923) [JF **49**, 642].
Champ gravifique dû à une sphère massique, en tenant compte de la constante cosmique.

826. N u y e n s M., Etude synthétique des champs massiques à symétrie sphérique, Association Française Grenoble, 1925, p. 57 [JF **52**, 928].

827. N u y e n s M., Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci., 113 (1925).
Sphère massique dans les univers d'Einstein et de de Sitter.

828. N u y e n s M., Bull. Acad. Bruxelles, **13**, 440 (1927) [JF **53**, 823].
Solution du problème d'Eddington.

829. N u y e n s M., Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci., **15**, 811 (1929) [JF **55**, 1169].
Méthode nouvelle d'intégration des équations gravifiques à symétrie sphérique.

830. N u y e n s M., Compt. Rend., **190**, 43 (1930) [JF **56**, 1284].
Méthode nouvelle d'intégration des équations gravifiques d'un champ massique et électromagnétique à symétrie sphérique.

831. O 'B r i e n S., S y n g e J. L., Comm. Dublin Inst. Adv. Stud., **A9** (1952) [MR **14**, 913].
Jump conditions at discontinuities in general relativity.

832. O g u r a K., Compt. Rend., **173**, 521 (1921) [JF **48**, 1042].
Sur le champ statique de gravitation dans l'espace vide.

833. O g u r a K., Compt. Rend., **173**, 641 (1921) [JF **48**, 1042].
Sur la courbure des rayons lumineux dans le champ de gravitation.

834. O g u r a K., Compt. Rend., **173**, 766 (1921) [JF **48**, 1042].
Extension d'un théoreme de Liouville au champ de gravitation.

835. O g u r a K., Tôhoku Math. Journ., **22**, 14 (1922) [JF **48**, 1042].
Sur le champ de gravitation dans l'espace vide.

836. O g u r a K., Japan Phys.-Math. Soc. Proc., **6**, 103 (1924) [JF **50**, 575].
Sur le mouvement d'une particule dans le champ d'un noyau chargé.

837. O p p e n h e i m e r J. R., S n y d e r H., Phys. Rev., **56**, 455 (1939) [Z **22**, 281].
On continued gravitational contraction.

838. O p p e n h e i m e r J. R., V o l k o f f G. M., Phys. Rev., **55**, 374 (1939) [Z **20**, 285]
On massive neutron cores.

839. O'R a i f e a r t a i g h L., Proc. Roy. Soc., **A245**, 202 (1958) [MR **20**, 114].
A static generalization of the Einstein universe.

840. O'R a i f e a r t a i g h L., Proc. Roy. Irish Acad., **A59**, 15 (1958) [MR **20**, 455].
Fermi coordinates.

841. O'R a i f e a r t a i g h L., S y n g e J. L., Proc. Roy. Soc., **A246**, 299 (1958) [MR **20**, 114].
A property of empty space-time.

842. P a g e L., Phys. Rev., **49**, 254 (1936) [Z **13**, 234].
A new relativity: I. Fundamental principles and transformations between accelerated systems.
843. P a i n l e v é P., Compt. Rend., **173**, 677 (1921) [JF **48**, 997].
La mécanique classique et la théorie de la relativité.
844. P a i n l e v é P., Compt. Rend., **173**, 873 (1921) [JF **48**, 998].
La gravitation dans la méchanique de Newton et dans la mécanique d'Einstein.
845. P a i n l e v é P., Compt. Rend., **174**, 1137 (1922) [JF **48**, 998].
La théorie classíque at la théorie einsteinienne de la gravitation.
846. P a l a t i n i A., Ven. Ist. Atti., **78**, 589 (1918—1919) [JF **46**, 1328].
Moti einsteiniani stazionari.
847. P a l a t i n i A., Rend. Circ. Mat. Palermo, **43**, 203 (1919).
Deduzione invariantiva delle equazioni gravitazionali dal principio di Hamilton.
848. P a l a t i n i A., Lomb. Ist. Rend., **54**, 463 (1921) [JF **48**, 1045].
Sulle equazioni della statica einsteiniana in seconda approssimazione.
849. P a l a t i n i A., Lomb. Ist. Rend., **54**, 570 (1921) [JF **48**, 1045].
L'analogo einsteiniano dei potenziali cilindrici in seconda approssimazione.
850. P a l a t i n i A., Rend. Accad. Loncei, **32**(1), 263 (1923) [JF **49**, 634].
Sopra i potenziali simmetrici che conducono alle soluzioni longitudinali delle equazioni gravitazionali di Einstein.
851. P a p a p e t r o u A., Prakt. Akad. Athēnōn, **18**, 313 (1943) [MR **14**, 807].
Ondes gravifiques du corpuscule mono-bipolaire.
852. P a p a p e t r o u A., Prakt. Akad. Athēnōn, **18**, 317 (1943) [MR **14**, 806].
La loi des moments dans un système quelconque de coordonnées.
853. P a p a p e t r o u A., Prakt. Akad. Athēnōn, **19**, 224 (1944) [MR **11**, 215].
La théorie de la gravitation dans la relativité restreinte.
854. P a p a p e t r o u A., Proc. Roy. Irish Acad., **A51**, 191 (1947) [MR **10**, 157].
A static solution of the equations of the gravitational field for an arbitrary charge distribution.
855. P a p a p e t r o u A., Proc. Roy. Irish Acad., **A52**, 11 (1948) [MR **10**, 157].
Einstein's theory of gravitation and flat space.
856. P a p a p e t r o u A., Proc. Phys. Soc., **A64**, 57, 302 (1951) [MR **12**, 546; **13**, 695]
Equations of motion in general relativity.
857. P a p a p e t r o u A., Proc. Roy. Soc., **A209**, 248 (1951) [MR **13**, 695].
Spinning test-particles in general relativity. I.
858. P a p a p e t r o u A., Ann. d. Phys., **12**, 309 (1953) [MR **15**, 358].
Eine rotationssymmetrische Lösung in der allgemeinen Relativitätstheorie.
859. P a p a p e t r o u A., Math. Nachr., **12**, 129, 143 (1954) [MR **16**, 634].
Eine neue Theorie des Gravitationsfeldes.
860. P a p a p e t r o u A., Zs. f. Phys., **139**, 518 (1954) [MR **16**, 870].
Eine Theorie des Gravitationsfeldes mit einer Feldfunktion.
861. P a p a p e t r o u A., Ann. d. Phys., **17**, 214 (1956) [MR **18**, 261].
Rotverschiebung und Bewegungsgleichungen.
862. P a p a p e t r o u A., Ann. Inst. Henri Poincaré, **15**, 173 (1957) [MR **19**, 1020].
Le problème du mouvement dans la relativité générale et dans la théorie du champ unifié d'Einstein.
863. P a p a p e t r o u A., Ann. d. Phys., **20**, 399 (1957) [MR **19**, 1020].
Über periodische nichtsinguläre Lösungen in der allgemeinen Relativitätstheorie.
864. P a p a p e t r o u A., Schr. Forschungsinst Math., **1**, 210 (1957) [MR **19**, 814].
Eine neue Formulierung in der Relativitätstheorie.
865. P a p a p e t r o u A., Ann. d. Phys., **1**, 186 (1958) [MR **20**, 938].
Über periodische Gravitations- und elektromagnetische Felder in der allgemeinen Relativitätstheorie.

866. Papapetrou A., Ann. d. Phys., **2**, 87 (1958) [MR **21**, 356].
Über zeitabhängige Lösungen der Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie.
867. Papapetrou A., Treder H., Ann. d. Phys., **3**, 360 (1959).
Zur Frage der Existenz von singularitätsfreien Lösungen der allgemein-relativistischen Feldgleichungen, die Teilchenmodelle darstellen könnten.
868. Papapetrou A., Treder H., Math. Nachr., **20**, 53 (1959).
Das Sprungproblem erster Ordnung in der allgemeinen Relativitätstheorie.
869. Papapetrou A., Urich W., Ann. d. Phys., **14**, 220 (1954) [MR **16**, 80].
Zur Kohlerschen Formulierung der Gravitationstheorie.
870. Papapetrou A., Urich W., Zs. Naturforsch., **10a**, 109 (1955) [MR **16**, 872].
Das Pol-Dipol-Teilchen im Gravitationsfeld und elektromagnetischen Feld.
871. Park D., Phys. Rev., **99**, 1324 (1955) [MR **17**, 306].
Radiations froma sprinning rod.
872. Parsons J. D., Proc. Edinburgh Math. Soc., **3**, 37 (1932) [Z **4**, 88].
Solution with axial symmetry of Einstein's equations of teleparallelism.
873. Pastori M., Ist. Lombardo Rend., **72**, 179 (1939) [Z **21**, 180].
I principali invarianti del campo elettromagnetico in teoria della relatività.
874. Pastori M., Ist. Lombardo. Rend., **72**, 409 (1939) [Z **22**, 176; MR **1**, 182].
Propagazione delle azioni gravitazionali ed elettromagnetische.
875. Patwardhan G. K., Vaidya P. C., Journ. Univ. Bombay (N. S.), **12**, pt. 3, 23 (1943) [MR **7**, 88].
Relativistic distributions of matter of radial symmetry.
876. Pauli W., Phys. Zs., **20**, 25 (1919) [JF **47**, 791].
Über die Energiekomponenten des Gravitationsfeldes.
877. Pauli W., Phys. Zs., **20**, 457 (1919) [JF 47, 791].
Zur Theorie der Gravitation und Elektrizität von H. Weyl.
878. Pauli W., Encykl. d. Math. Wiss., **2**, 539 (1921) [JF, **48**, 977].
Relativitätstheorie.
879. Pauli W., Ann. d. Phys., **18**, 305 (1933) [Z **7**, **425**].
Über die Formulierung der Naturgesetze mit fünf Koordinaten; I. Klassische Theorie.
880. Pauli W., Solomon J., Journ. Phys. Rad., **3**, 452, 582 (1932) [Z **6**, 85, 229].
La théorie unitaire d'Einstein et de Mayer et les équations de Dirac.
881. Pauli W., Theory of Relativity, London, 1958.
[Имеется перевод 1-го изд. (Leipzig, 1921): В. Паули, Теория относительности, М.—Л., 1947.)
882. Pendse C. G., Phil. Mag., **34**, 377 (1943) [MR **5**, 131].
On null geodesics and null-corpuscules in the theory of relativity.
883. Penfield R. H., Zatzkis H., Acta Phys. Austriaca, **10**, 87 (1956) [MR **17**, 1016].
On the determination of the equations of motion from a general, covariant, non-linear field theory by the approximation method of Einstein, Infeld, and Hoffmann.
884. Peres A., Rosen N., Nuovo Cimento, **13**, 430 (1959).
On Cauchy's problem in general relativity.
885. Peres A., Rosen N., Phys. Rev., **115**, 1085 (1959).
Nonlinear effects in gravitational radiation.
886. Петров А. З., ДАН СССР, **81**, 149 (1951) [MR **13**, 581].
О пространствах, определяемых полями тяготения.
887. Петров А. З., О полях гравитации, Юбилейный сб. «125 лет неевклидовой геометрии Лобачевского», 1826—1951, М.—Л., 1952, стр. 179 [MR 14, 1016].
888. Петров А. З., Уч. зап. Казан. Гос. Унив., **112**, 27 (1952) [MR **20**, 736].
Регулярные пространства Эйнштейна, допускающие транзитивную группу движений.

889. Петров А. З., Уч. зап. Казан. Гос. Унив., 112, 35 (1952) [MR 20, 736].
Поля тяготения с комплексными стационарными кривизнами.
890. Петров А. З., Уч. зап. Казан. Гос. Унив., 114, кн. 8, 55 (1954) [MR 17, 892].
Классификация пространств, определяющих поля тяготения.
891. Петров А. З., ДАН СССР, 105, № 5, 905 (1955) [MR 18, 101].
О пространствах максимальной подвижности, определяемых полями тяготения.
892. Петров А. З., Уч. зап. Казан. Гос. Унив., 115, кн. 14, 41 (1955) [MR 19, 714].
О полях тяготения простого типа с вещественными стационарными кривизнами.
893*. Петров А. З., ДАН СССР, 16, № 2, 211 (1948).
О кривизне римановых пространств.
894*. Петров А. З., Изв. Казан. физ.-мат. Общества при Казан. Гос. Унив., 14, сер. 3 (1949) (Уч. зап. Казан. Гос. Унив. 109, кн. 4).
О геодезическом отображении римановых пространств неопределенной метрики.
895*. Петров А. З., Уч. зап. Казан. Авиац. инст., № 9 (1947).
Один тип пространств Эйнштейна.
896*. Петров А. З., Уч. зап. Казан. Гос. Унив., 109, кн. 4, 37 (1947); 110, кн 3, 5 (1950).
К теореме о главных осях тензора.
897*. Петров А. З., Уч. зап. Казан. Гос. Унив., 110, кн. 3, 5 (1950).
Об одновременном приведении тензора и бивектора к каноническому виду.
898*. Петров А. З., Уч. зап. Казан. Гос. Унив., 111, 87 (1951).
О существовании в поле тяготения гармонической функции, зависящей только от расстояния.
899*. Петров А. З., УФН, 11, 70 (1956).
Классификация пространств, определяемых полями тяготения по группам движений.
900*. Петров А. З., Изв. Вуз. Мат., № 6, 45 (1958).
Классификация полей тяготения общего вида.
901*. Петров А. З., Изв. Вуз. Мат., № 2, 9 (1958).
О симметрических полях тяготения.
902*. Петров А. З., Уч. зап. Казан. Гос. Унив., 118, кн. 6, 3 (1958).
О решении уравнений поля тяготения.
903*. Петров А. З., Пространства Эйнштейна. Физматгиз, 1961.
904. Петров П. И., ДАН СССР, 113, 1217 (1957) [MR 20, 330].
Инварианты второго порядка.
905. Петрова Н. М., ЖЭТФ, 19, 989 (1949) [MR 11, 467].
Об уравнениях движения и тензоре массы для системы конечной массы в общей теории относительности.
906*. Петров А. З., Затворников С. В., Уч. зап. Казан. Гос. Унив., 117, кн. 9, 35 (1957).
О движении в неприводимых римановых симметрических пространствах первого класса.
907*. Петров А. З., Кайгородов В. Р., Абдулин М. И., Изв. Вуз. Мат., № 6 (1959).
Классификация полей тяготения общего вида по группам движений. I.
908*. Петров А. З., Кайгородов В. Р., Абдулин М. И., II, Изв. Вуз. Мат., № 1 (1960), III, № 4 (1960).
909. Pham Mau Quan, Compt. Rend., 236, 2299 (1953) [MR 14, 1134].
Thermodynamique d'un fluide relativiste.
910. Pham Mau Quan, Compt. Rend., 237, 22 (1953) [MR 14, 1135].
Le problème de Cauchy pour un fluide parfait thermodynamique.
911. Pham Mau Quan. Compt. Rend., 238, 324 (1954) [MR 15, 752].
Mouvements permanents d'un fluide parfait thermodynamique.

912. Pham Mau Quan, Compt. Rend., 240, 598 (1955) [MR 16, 872].
Les équations du champ pour un schéma fluid-champ électromagnétique.
913. Pham Mau Quan, Compt. Rend., 240, 733 (1955) [MR 16, 872].
Le problème de Cauchy relatif à un schéma fluid-champ électromagnétique.
914. Pham Mau Quan, Ann. Mat. Pura Appl., 38, 121 (1955) [MR 17, 1143].
Sur une théorie relativiste des fluides thermodynamique.
915. Pham Mau Quan, Journ. Rat. Mech. Anal., 5, 473 (1956) [MR 17, 1144].
Etude électromagnétique et thermodynamique d'une fluide relativiste chargé.
916. Pham Mau Quan, Compt. Rend., 242, 465 (1956) [MR 17, 1144].
Sur les équations de l'électromagnétism dans la matière.
917. Pham Mau Quan, Compt. Rend., 242, 875 (1956) [MR 17, 1144].
Projections des géodésiques de longueur nulle et rayons électromagnétique dans un milieu en mouvement permanent.
918. Pham Mau Quan, Arch. Rational Mech. Anal., 1, 54 (1957) [MR 19, 926].
Inductions électromagnétique en relativité général et principe de Fermat.
919. Pham Mau Quan, Compt. Rend., 245, 1782 (1957) [MR 19, 1139].
Inductions électromagnétique dans un milieu anisotrope relativist.
920. Pham Mau Quan, Compt. Rend., 246, 707 (1958) [MR 19, 1237].
Sur les équations de l'induction électromagnétique.
921. Pham Mau Quan, Compt. Rend., 246, 2734 (1958) [MR 20, 102].
Induction électromagnétique singulière.
922. Pham Mau Quan, Enseignement Math., 4, 41 (1958) [MR 20, 841].
Sur le principe de Fermat.
923. Pham Mau Quan, Cahiers de Phys., 12, 297 (1958) [MR 21, 222].
Induction électromagnétique en relativité générale.
924. Pierucci M., Nuovo Cimento, 5, 572 (1957) [MR 19, 104].
Sull'età dell'universo.
925. Pirani F. A. E., Proc. Cambr. Phil. Soc., 50, 637 (1954) [MR 16, 184].
On the influence of the expansion of space on the gravitational field surrounding an isolated body.
926. Pirani F. A. E., Proc. Roy. Soc., A228, 455 (1955) [MR 16, 871].
On the energy-momentum tensor and the creation of matter in relativistic cosmology.
927. Pirani F. A. E., On the definition of inertial systems in general relativity, JRT, 1955, p. 198 [MR 19, 506].
928. Pirani F. A. E., Acta Phys. Polon., 15, 389 (1956) [MR 19, 509].
On the physical significance of the Riemann tensor.
929. Pirani F. A. E., Bull. Acad. Polon. Sci., 5, 143 (1957) [MR 19, 1140].
Tetrad formulation of general relativity theory.
930. Pirani F. A. E., Phys. Rev., 105, 1089 (1957) [MR 20, 489].
Invariant formulation of gravitational radiation theory.
931. Pirani F. A. E., Proc. Roy. Soc., A252, 96 (1959).
Gravitational waves in general relativity. IV. The gravitational field of a fast-moving particle.
932. Pirani F. A. E., Schild A., Phys. Rev., 79, 986 (1950) [MR 13, 306].
On the quantization of Einstein's gravitational field equations.
933. Pirani F. A. E., Schild A., Skinner R., Phys. Rev., 87, 452 (1952) [NR 14, 418].
Quantitazion of Einstein's gravitational field equations.
934. Polvani G., Finzi B., Bianchi E., Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, 7, 397 (1933) [Z 10, 89].
Velosità della luce ed espansione dell'universo.
935. Popovici A., Acad. R. P., Romîne. Bul. Sti. Sect. Sci. Mat. Fiz., 6, 65 (1954) [MR 17, 1017].

Déduction variationnelle des équations gravifique et électromagnétique, conformes covariantes de IIe ordre.

936. Pound R. V., Rebka G. A., Phys. Rev. Lett., **3**, 439 (1959).
Gravitational red-shift in nuclear resonance. (См. перевод в сборнике «Новейшие проблемы гравитации», ИЛ, 1961.)

937. Pound R. V., Rebka G. A., Phys. Rev., Lett., **3**, 554 (1959).
Resonant absorption of the 14.4-kev γ-ray from 0.10-μsec Fe^{57}.

938. Power E. A., Wheeler J. A., Rev. Mod. Phys., **29**, 480 (1957) [MR **19**, 816].
Thermal Geons.

939. Pycha Z., Atti. Accad. Naz. Lincei Rend., **15**, 820 (1932) [Z **5**, 90].
Sulla relatività nel microcosmo.

940. Qvist B., Soc. Sci. Fenn. Comment. Phys.-Math., **13**, Nr. 11 (1948) [MR **10**, 578].
On a spherical cymmetric mass concentration in an expanding universe.

941. Rabe E., Astr. Nachr., **275**, 251 (1947) [MR **10**, 745].
Zur Singularität der Schwarzschild'schen Lösung für r-$2m$.

942. Rabe E., Zs. Astrophys., **25**, 255 (1948) [MR **11**, 217].
Eine regularisierende Zeittransformation in der metrischen Kosmologie.

943. Racine C., Compt. Rend., **192**, 1533 (1931) [Z **1**, 427].
Contribution a l'étude du problème statique dans la théorie de la relativité.

944. Racine C., Compt. Rend., **193**, 1167 (1931) [Z **3**, 179].
Sur les équations de la gravitation d'Einstein.

945. Racine C., Journ. Indian Math. Soc. (N. S.), **2**, 76 (1936) [Z **15**, 87].
On the most general static field in the relativity theory.

946. Racine C., Journ. Indian Math. Soc. (N. S.), **5**, 156, 165 (1941) [MR **4**, 56].
Contribution to the relativistic problem of n bodies.

947. Radon J., Abhand. Math. Sem. Hamburg. Univ., **1**, 268 (1922) [JF **48**, 1032].
Über statische Gravitationsfelder.

948. Rainich G. Y., Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **10**, 124, 294 (1924); Bull. Amer. Math. Soc., **30**, 294 (1924) [JF **50**, 597, 603].
Electrodynamics in general relativity theory.

949. Rainich G. Y., Trans. Amer. Math. Soc., **27**, 106 (1925) [JF **51**, 713].
Electrodynamics in generale relativity.

950. Rainich G. Y., Mathematics of relativity, New York, 1950 [MR **13**, 78].

951. Randers G., Phys. Rev., **59**, 195 (1941) [MR **2**, 208].
On an asymmetrical metric in the four-space of general relativity.

952. Raychaudhuri A., Phys. Rev., **86**, 90 (1952) [MR **14**, 416].
Condensations in expanding cosmological models.

953. Raychaudhuri A., Bull. Calcutta Math. Soc., **44**, 31 (1952) [MR **14**, 592].
Radiation sphere in Einstein universe.

954. Raychaudhuri A., Zs. f. Phys., **135**, 225 (1953) [MR **15**, 168].
Raine Strahlungsfelder mit Zentralsymmetrie in der allgemeinen Relativitätstheorie.

955. Raychaudhuri A., Phys. Rev., **89**, 417 (1953) [MR **14**, 914].
Arbitrary concentrations of matter and the Schwarzschild singularity.

956. Raychaudhuri A., Phys. Rev., **98**, 1123 (1955) [MR **16**, 1059].
Relativistic cosmology. I.

957. Raychaudhuri A., Zs. Astrophys., **37**, 103 (1955) [MR **17**, 420].
Perturbed cosmological models.

958. Raychaudhuri A., Proc. Phys. Soc., **72**, 263 (1958).
An anisotropic cosmological solution in general relativity.

959. Rayner C. B., Foundations and applications of Whitehead's theory of relativity, Thesis, University of London, 1953.

960. Rayner C. B., Proc. Roy. Soc., **A222**, 509, 1954 ([MR **15**, 835].
The application of the Whitehead theory of relativity to non-static, spherically symmetric systems.

961. R a y n e r C. B., Proc. Roy. Soc., A232, 135 (1955) [MR 17, 545].
Effects of rotation of the central body on its planetary orbits, after the Whitehead theory of gravitation.

962. R a y n e r C. B., Proc. Phys. Soc., B68, 944 (1955) [MR 17, 794].
Whitehead's law of gravitation in a space-time of constant curvature.

963. R a y n e r C. B., Compt. Rend., 248, 929 (1959) [MR 21, 222].
Mouvement rigide en relativité générale.

964. R a y n e r C. B., Compt. Rend., 248, 2725 (1959) [MR 21, 475].
Sur une solution générale des équations intérieures d'Einstein pour un mouvement de groupe.

965. R a y n e r C. B., Compt. Rend., 249, 1327 (1959).
Trois remarques concernant un théorème récent.

966. R a y n e r C. B., Compt. Rend., 249, 1461 (1959).
Une forme simple pour le tenseur de Ricci sous conditions de rigidité.

967. R a y n e r C. B., Compt. Rend., 249, 1614 (1959).
Sur une simplification des équations extérieures d'Einstein, pour un mouvement de groupe.

968. R e i c h e l P., Basic notions of relativistic hydromagnetics, AEC Research and Development Report NYO-7697, Institute of Mathematical Sciences, New York Univ., 1958.

969. R e i c h e n b ä c h e r E., Zs. Astrophys., 7, 309 (1933) [Z 7, 427].
Die Gestalt der Spiralarme.

970. R e i c h e n b ä c h e r E., Zs. Astrophys., 7, 364 (1933) [Z 8, 135].
Die Symmetrie der Spiralen.

971. R e i c h e n b ä c h e r E., Zs. Astrophys., 22, 230 (1943) [MR 6, 242].
Der Doppler-Effekt im allgemeinen Feld.

972. R e n a u d i e J., Compt. Rend., 240, 399, 2380, (1955) [MR 17, 675].
Théorie unitaire à six dimensions. Équations du champ. Interprétation pour le champ mésonique-électromagnétique.

973. Р я б у ш к о А. П., ЖЭТФ, 33, 1387 (1957); ЖЭТФ, 33, 1067 (1958) [MR 21, 222].
Уравнения движения вращающихся масс в общей теории относительности.

974. Р я б у ш к о А. П., Ф и с н е р И. З., ЖЭТФ, 34, 1189 (1958); ЖЭТФ, 34 (7), 822 (1958) [MR 21, 222].
Движение вращающихся масс в общей теории относительности.

975. R i c c i G., L e v i-C i v i t a T., Math. Ann., 54, 125, 608 (1901) [JF 49, 551].
Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications.

976. R i c e J., Relativity. A systematic treatment of Einstein's theory, London, 1923 [JF 49, 620].

977. R i e s z M., L'équation de Dirac en relativité générale. Tolfte Skandinaviska Matematikerkongressen, Lund, 1953, p. 241 [MR 16, 756].

978. R i n d l e r W., Mon. Not. Roy. Astr. Soc., 116, 335 (1956) [MR 18, 782].
On the coordination of the Riemannian and kinematic techniques in theoretical cosmology, with particular reference to the shift-distance law.

979. R i n d l e r W., Mon. Not. Roy. Astr. Soc., 116, 662 (1956) [MR 19, 288].
Visual horizons in world models.

980. R o b b A. A., A theory of time and space, Cambridge, 1914.

981. R o b b A. A., The absolute relations of space and time, Cambridge, 1921 [JF 48, 1064].

982. R o b b A. A., Geometry of space and time, Cambridge, 1936 [Z 13, 233].

983. R o b e r t s o n H. P., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 11, 590 (1925) [JF 51, 708].
Transformations of Einstein space.

984. R o b e r t s o n H. P., Bull. Amer. Math. Soc., 31, 115, 490 (1925) [JF 51, 726].
On certain solutions of Einstein's cosmological equations.

985. R o b e r t s o n H. P., Trans. Amer. Math. Soc., 29, 481 (1927) [JF 53, 820].
Dynamical space-times which contain a conformal euclidean 3-space.

986. R o b e r t s o n H. P., Phil. Mag., 5, 835 (1928) [JF 54, 949].
On relativistic cosmology.

987. R o b e r t s o n H. P., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., **15**, 822 (1929) [JF 55, 496].
On the foundations of relativistic cosmology.
988. R o b e r t s o n H. P., Ann. of Math., **33**, 496 (1932) [Z **5**, 119].
Groups of motions in spaces admitting absolute parallelism.
989. R o b e r t s o n H. P., Rev. Mod. Phys., **5**, 62 (1933) [Z **6**, 231].
Relativistic cosmology.
990. R o b e r t s o n H. P. Astrophys. Journ., **82**, 284 (1935); **83**, 187, 257 (1936) [Z **13**, 39; **14**, 87].
Kinematics and world-structure.
991. R o b e r t s o n H. P., Phys. Rev., **49**, 755 (1936) [Z **14**, 86].
An interpretation of Page's «New Relativity».
992. R o b e r t s o n H. P., Mon. Not. Roy. Astr. Soc., **97**, 423 (1937) [Z **16**, 282].
Dynamical effects of radiation in the solar system.
993. R o b e r t s o n H. P., Proc. Edinburgh. Math. Soc., **5**, 63 (1937) [Z **17**, 96].
Test corpuscules in general relativity.
994. R o b e r t s o n H. P., Zs. Astrophys., **15**, 69 (1938) [Z **18**, 191].
The apperent luminosity of a receding nebula.
995. R o b e r t s o n H. P., Ann. of Math., **39**, 101 (1938) [Z **18**, 282].
Note on the preceding paper: The two body problem in general relativity.
996. R o b e r t s o n H. P., Cosmlogical theory, JRT, 1955, p. 128.
997. R o s e n N., Phys. Rev., **57**, 147, 150 (1940) [MR **1**, 183].
General relativity and flat space.
998. R o s e n N., Phys. Rev., **57**, 154 (1940) [MR **1**, 183].
Note on ether-drift experiments.
999. R o s e n N., Phys. Rev., **71**, 54 (1947) [MR **8**, 411].
Notes on rotation and rigid bodies in relativity theory.
1000. R o s e n N., Rev. Mod. Phys., **21**, 503 (1949) [MR **11**, 215].
A particle at rest in a static gravitational field.
1001. R o s e n N., Bull. Res. Council Israel, **3**, 328 (1954) [MR **16**, 756].
Some cylindrical gravitational waves.
1002. R o s e n N., Gravitational waves, JRT, 1955, p. 171.
1003. R o s e n N., Phys. Rev., **110**, 291 (1958).
Energy and momentum of cylindrical gravitational waves.
1004. R o s e n N., S h a m i r H., Rev. Mod. Phys., **29**, 429 (1957) [MR **19**, 927].
Gravitational field of an axially symmetric system in first approximation.
1005. le R o u x J., Compt. Rend., **172**, 1227 (1921) [JF **48**, 994].
Sur la théorie de la relativité et le mouvement séculaire du périhélie de Mercure.
1006. le R o u x J., Compt. Rend., **172**, 1467 (1921) [JF **48**, 994].
La loi de gravitation et ses conséquences.
1007. le R o u x J., Compt. Rend., **175**, 809 (1922) [JF **48**, 996].
Sur la gravitation dans mécanique classique et dans la théorie d'Einstein.
1008. R o y S. K., Proc. Nat. Acad. Sci. India, **A10**, 1 (1940) [MR **8**, 176].
Certain inconsistencies in the mathematical theory of a new relativity of Dr Sir Shah Sulaiman.
1009. R u m e r G., Nachr. Ges. Wiss., Göttingen, Kl. II., Nr. 16, 148 (1931) [Z **3**, 33].
Zur allgemeinen Relativitätstheorie.
1010. R u m e r G., Abh. Semin. Vektor- u. Tensor-analysis usw., Moskau Leifg., **4**, 105 (1937) [Z **17**, 429].
Über eine geometrische Deutung der Materie in der allgemeinen Relativitätstheorie.
1011. Р у м е р Ю. Б., ЖЭТФ, **19**, 86, 207, 868 (1949); **21**, 454, 1403, (1951); **22**, 742 (1952); **23**, 35 (1952) [MR **10**, 580; **11**, 401; **12**, 887; **13**, 786; **14**, 606, 706].
Действие как пространственная координата.
1012. Р у м е р Ю. Б., УМН, **10**, № 1, 210 (1955) [MR **17**, 95].
Пространство, время и действие.

1013. R u s e H. S., Proc. Math. Soc., **31**, 225 (1930) [JF **56**, 663].
Some theorems in the tensor calculus.
1014. R u s e H. S., Proc. Math. Soc., **32**, 87 (1931) [Z **1**, 169].
Taylor's theorem in the tensor calculus.
1015. R u s e H. S., Quart. Journ. Math., Oxford Ser., **2**, 190 (1931) [Z **2**, 352].
An absolute partial differential calculus.
1016. R u s e H. S., Proc. Edinburgh Math. Soc., **2**, 135 (1931) [Z **1**, 63].
On the «elementary» solution of Laplace's equation.
1017. R u s e H. S., Proc. Edinburgh Math. Soc., **2**, 181 (1931) [Z **2**, 262].
Generalised solutions of Laplace's equation.
1018. R u s e H. S., Atti Pontif. Accad. Sci., **84**, 662 (1931) [Z **4**, 232].
Note on refraction and reflection in general relativity.
1019. R u s e H. S., Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **52**, 183 (1932) [Z **4**, 424].
On the definition of spatial distance in general relativity.
1020. R u s e H. S., Quart. Journ. Math. Oxford Ser., **3**, 15 (1932) [Z **4**, 297]..
Generalized solutions of some partial differential equations of mathematical physics.
1021. R u s e H. S., Proc. Math. Soc., **33**, 66 (1932c) [Z **2**, 413].
Normal covariant derivatives.
1022. R u s e H. S., Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **53**, 79 (1933) [Z **6**, 375].
On the measurement of spatial distance in a curved space-time.
1023. R u s e H. S., Proc. Edinburgh Math. Soc., **4**, 144 (1935) [Z **12**, 180].
Gauss's theorem in a general space-time.
1024. R u s e H. S., Proc. Math. Soc., **41**, 302 (1936) [Z **14**, 423].
On the geometry of the electromagnetic fild in general relativity.
1025. R u s e H. S., Proc. Edinburgh Math. Soc., **6**, 24 (1939—1941) [Z **21**, 158).
Solutions of Laplace's equation in an n-dimensional space of constant curvature.
1026. R u s e H. S., Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **62**, 64 (1944) [MR **6**, 106].
On the line-geometry of the Riemann tensor.
1027. R u s e H. S., Journ. Math. Soc., **19**, 168 (1944) [MR 7, 80].
Sets of vectors in a V_4 defined by the Riemann tensor.
1028. R u s e H. S., Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **A62**, 156 (1945) [MR 7, 395].
The Riemann tensor in a completely harmonic V_4.
1029. R u s e H. S., Quart. Journ. Math. Oxford Ser., **17**, 1 (1946) [MR **7**, 395].
The five-dimensional geometry of the curvature tensor in a Riemannian V_4.
1030. R u s e H. S., Proc. Edinburgh Math. Soc., **7**, 144 (1946) [MR **7**, 395].
A. G. D. Watson's principal directions for a Riemannian V_4.
1031. R u s e H. S., Journ. London Math. Soc., **31**, 243 (1946) [MR **9**, 102].
On simply harmonic spaces.
1032. R u s e H. S., Phil. Mag., **38**, 408 (1947) [MR **9**, 249].
Multivectors and catalytic tensors.
1033. R u s e H. S., Proc. London Math. Soc., **50**, 75 (1948) [MR **10**, 66].
The self-polar Riemann complex for a V_4.
1034. R u s e H. S., Proc. London Math. Soc., **50**, 317 (1948) [MR **10**, 266].
On simply harmonic'kappa-spaces' of four dimensions.
1035. R u s e H. S., Quart. Journ. Math., Oxford Ser., **20**, 218 (1949) [MR **11**, 461].
On parallel fields of planes in a Riemannian space.
1036. R u s e H. S., Proc. Roy. Soc. Edinburg, **A63**, 78 (1950) [MR **12**, 358].
Parallel planes in a Riemannian V_4.
1037. R u s e H. S., Proc. London Math. Soc., **53**, 13 (1951) [MR **13**, 280].
The Riemann complex in a four-dimensional space of recurrent curvature.
1038. R u s e H. S., Proc. London Math. Soc., **53**, 212 (1951) [MR **13**, **280**].
A classification of K^*-spaces.
1039. R u s s e l l B., Proc. Cambr. Phil. Soc., **32**, 216 (1936) [Z **14**, **195**].
On order in time.

1040. S a k u m a K., S i b a t a T., Journ. Sci. Hirosima Univ., **A11**, 273 (1942) [MR **9**, 627].
Generalized geodesic lines and equations of motion in wave geometry.

1041. S a l z m a n G., T a u b A. H., Phys. Rev., **95**, 1659 (1954) [MR **16**, 185].
Born-type rigid motion in relativity.

1042. S a t o I., Sci. Rep. Tôhoku Univ., **33**, 30 (1949) [MR **12**, 149].
An attempt to unite the quantum theory of wave field with the theory of general relativity.

1043. S c h e i d e g g e r A. E., Proc. Second Canadian Math. Congress, Vancouver, 218 (1949), Toronto [MR **13**, 170].
On gravitational radiation.

1044. S c h e i d e g g e r A. E., Phys. Rev., **82**, 883 (1951) [MR **13**, 170].
Gravitational transverse-transverse waves.

1045. S c h e i d e g g e r A. E., Rev. Mod. Phys., **25**, 451 (1953) [MR **15**, 656].
Gravitational motion.

1046. S c h e i d e g g e r A. E., Phys. Rev., **99**, 1883 (1955) [MR **17**, 545].
Gravitational radiation.

1047. S c h e i d e g g e r A. E., K r o t k o v R. V., Phys. Rev., **89**, 1096 (1953) [MR **15**, 85].
Relativistic statistical mechanics.

1048. S c h e r r e r W., Comm. Math. Helv., **26**, 184 (1952); **27**, 157 (1953) [MR **14**, 417; **15**, 170].
Metrische Feld und vektorielles Materiefeld.

1049. S c h e r r e r W., Zs. f. Phys., **138**, 16 (1954) [MR **16**, 79].
Grundlagen zu einer linearen Feldtheorie.

1050. S c h e r r e r W., Zs. f. Phys., **139**, 44 (1954); **140**, 164, 374 (1955); **144**, 373 (1956) [MR **16**, 635; **17**, 305, 909].
Zur linearen Feldtheorie. I. Ein Wirkungsprinzip und seine Anwendung in der Kosmologie. II. Schwache Felder. III. Die Gravitationsgleichungen. IV. Statische Felder.

1051. S c h i f f e r J. P., M a r s c h a l l W., Phys. Rev. Lett., **3**, 556 (1959).
Recoilles resonance absorption of gamma rays in Fe^{57}.

1052. S c h i l d A., Phys., Rev., **66**, 340 (1944) [MR **6**, 241].
On Milne's theory of gravitation.

1053. S c h i l d A., Proc. Roy. Soc., **A235**, 202 (1956) [MR **17**, 1245].
On gravitational theories of the Whitehead type.

1054. S c h m u t z e r E., Zs. f. Phys., **143**, 479 (1955) [MR **17**, 1015].
Bemerkungen zum einheitlichen Variationsprinzip für die mechanischen elektrodynamischen und Gravitations-Grundgesetze.

1055. S c h o u t e n J. A., Der Ricci-Kalkül. Eine Einführung in den naueren Methoden und Probleme der mehrdimensionalen Differentialgeometrie, Berlin, 1924 [JF **50**, 588].

1056. S c h o u t e n J. A., Journ. Math. Phys., **10**, 239, 272 (1931) [Z **4**, 230].
Dirac equations in general relativity.

1057. S c h o u t e n J. A., Zs. f. Phys., **81**, 129 (1933) [Z **6**, 230].
Zur generallen Feldtheorie, Ableitung des Impulsenergiestromprojektors aus einem Variationsprinzip.

1058. S c h o u t e n J. A., Zs. f. Phys., **81**, 405 (1933) [Z **6**, 376].
Zur generallen Feldtheorie. Raumzeit und Spinraum. (G. F. V.).

1059. S c h o u t e n J. A., Ann. Inst. H. Poincaré, **5**, 51 (1935) [Z **11**, 137].
La théorie projective de la relativité.

1060. S c h o u t e n J. A., Tensor analysis for physicists, Oxford, 1951, [MR **13**, 493].

1061. S c h o u t e n J. A., Ricci-Calculus. An introduction to tensor analysis and its geometrical applications, 2nd ed., Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1954 [MR **16**, 521].

1062. S c h o u t e n J. A., van D a n t z i g D., Akad. Wetensch. Amsterdam Proc., **35**, 642 (1932) [Z **5**, 90].
Zum Univizierungsproblem der Physik. Skizze einer generellen Feldtheorie.

1063. Schouten J. A., van Dantzig D., Akad. Wetensch. Amsterdam Proc., **35**, 843 (1932) [Z **5**, 271].
Zur generellen Feldtheorie. Diracsche Gleichungen und Hamiltonsche Funktion.

1064. Schouten J. A., van Dantzig D., Zs. f. Phys., **78**, 639 (1932) [Z **6**, 230].
Generelle Feldtheorie.

1065. Schouten J. A., Haantjes J., Zs. f. Phys., **89**, 357 (1934) [Z 10, **89**].
Generelle Feldtheorie. VIII. Autogeodätische Linien und Weltlinien.

1066. Schouten J. A., Struik D. J., Amer. Journ. Math., **43**, 213 (1921) [JF **48**, 859].
On some properties of general manifolds relating to Einstein's theory of gravitation.

1067. Schouten J. A., Struik D. J., Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie, Bd. 1 (Schouten) Algebra und Übertragungslehre, Bd. 2 (Struik) Geometrie [Z **11**, 174; **19**, 183]. 1935, 2te Aufl., 1938.
(См. перевод: Схоутен И. А., Стройк Дж., Д., Новые методы дифференциальной геометрии, М.—Л., 1939.)

1068. Schrödinger E., Phys., Zs., **19**, 4 (1918) [JF **46**, 1314].
Die Energiekomponenten des Gravitationsfeldes.

1069. Schrödinger E., Phys. Zs., **19**, 20 (1918) [JF **46**, 1316].
Über ein Lösungssystem der allgemein kovarianten Gravitationsgleichungen.

1070. Schrödinger E., Ann. d. Phys., **82**, 265 (1927) [JF **53**, 831].
Der Energieimpulssatsz der Materiewellen.

1071. Schrödinger E., Physica, **6**, 899 (1939) [Z **22**, 43; MR **1**, 125].
The proper vibrations of the expanding universe.

1072. Schrödinger E., Proc. Roy. Irish. Acad., **A46**, 25 (1940) [MR **2**, 265].
Maxwell's and Dirac's equations in the expanding universe.

1073. Schrödinger E., Proc. Roy. Irish. Acad., **A51**, 163 (1947); **51**, 205 (1948); 52, 1 (1948) [MR **9**, 310].
The final affine field laws.

1074. Schrödinger E., Space-time structure, Cambridge, 1950 [MR **12**, 546].

1075. Schrödinger E., Expanding universe, Cambridge, 1956 [MR **17**, 1015].

1076. Schücking E., Zs. f. Phys., **137**, 595 (1954) [MR **16**, 1164].
Das Schwarzschildsche Linienelement und die Expansion des Weltalls.

1077. Schücking E., Heckmann O., World models, Inst. Internat. Physique Solvay, Onzième Conseil de Physique, Bruxelles, 1958, p. 149.

1078. Schwarzschild K., Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie, Sitz. Preuss. Akad. Wiss., 1916, S. 189.

1079. Schwarzschild K., Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie. Sitz. Preuss. Akad. Wiss. (1916), S. 424 [JF **46**, 1297].

1080. Selety F., Ann. d. Phys., **68**, 281 (1922) [JF **48**, 1029].
Beiträge zum kosmologischen Problem.

1081. Sen D. K., Zs. f. Phys., **149**, 311 (1957) [MR **19**, 817].
A static cosmological model.

1082. Sen N. R., Ann. d. Phys., **73**, 365 (1924) [JF **50**, 584].
Über die Grenzbedigungen des Schwerefeldes an Unstetigkeitsflächen.

1083. Sen N. R., Proc. Roy. Soc., **A116**, 73 (1927) [JF **53**, 821].
On Fresnel's convection coefficient in general relativity.

1084. Sen N. R., Indian Phys.-Math. Journ., **3**, 89 (1932) [Z **5**, 91].
On radiation in the expanding universe.

1085. Sen N. R., Proc. Roy. Soc., **A140**, 269 (1933) [Z **6**, 377].
On Eddington's problem of the expansion of the universe by condensation.

1086. Sen N. R., Mon. Not. Roy. Astr. Soc., **94**, 550 (1934) [Z **9**, 236].
On the equilibrium of an incompressible sphere.

1087. Sen N. R., Zs. Astrophys., **9**, 215 (1934) [Z **10**, 283].
On the stability of cosmological models.

1088. Sen N. R., Zs. Astrophys., **9**, 315 (1935) [Z **10**, 323].
On a minimum property of the Friedmann universe.
1089. Sen N. R., Zs. Astrophys., **10**, 291 (1935) [Z **12**, 135].
On the stability of cosmological models with non-vanishing pressure.
1090. Sen N. R., Sz. Astrophys., **14**, 157 (1937) [Z **17**, 240].
On the size of a very dense sphere.
1091. Sen N. R., Chatterjee N. K., Zs. Astrophys., **7**, 188 (1933). [Z **7**, 265].
On Schwarzschild's problem of the gaseous sphere.
1092. Sen N. R., Ghosh N. N., Bull. Calcutta Math. Soc., **20**, 245 (1930) [JF **56**, 1284].
Note on the statical gravitational field with axial symmetry.
1093. Sen N. R., Roy T. C., Zs. Astrophys., **34**, 84 (1954) [MR **17**, 305].
On a steady gravitational field of a star cluster free from singularities.
1094. Sharpless S., The scale of the universe, Astr. Soc. of the Pacific Leaflet 290, June 1953.
1095. Широков М. Ф., Вестник Моск. унив., № 4, 67 (1947) [MR **10**, 498].
О роли гравитации в структуре элементарных частиц.
1096. Широков М. Ф., ЖЭТФ, **27**, 251 (1954) [MR **16**, 1058].
О центре инерции в общей теории относительности.
1097. Широков М. Ф., Бродовский В. Б., ЖЭТФ, **4**, 904 (1957) [MR **19**, 509].
Об уравнениях движения конечных масс в общей теории относительности.
1098. Sibata T., Journ. Sci. Hiroshima Univ., **A5**, 189 (1935) [Z **12**, 233].
A first approximate solution of the Morinaga's equation $\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\varepsilon_{stpq}K_{lm}^{\cdot\cdot pq} = K_{lmst}$.
1099. Sibata T., Journ. Sci. Hiroshima Univ., **A7**, 151 (1937) [Z **17**, 238].
Geometry in spin-space.
1100. Sibata T., Journ. Sci. Hiroshima Univ., **A8**, 51 (1938) [Z **18**, 187].
Wave geometry unifying Einstein's law of gravitation and Born's theory of electrodynamics.
1101. Sibata T., Journ. Sci. Hiroshima Univ., **A8**, 199 (1938) [Z **21**, 86].
Cosmology in terms of wave geometry, II. De Sitter type universe and Einstein type universe.
1102. Sibata T., Journ. Sci. Hiroshima Univ., **A11**, 231 (1942) [MR **9**, 627].
On space which has the homogeneous property for obserwation systems.
1103. Sibata T., Morinaga K., Journ. Sci. Hiroshima Univ., **A6**, 173 (1936) [Z **13**, 368].
Complete and simpler treatment of wave geometry.
1104. Sibata T., Sakuma K., Journ. Sci. Hiroshima Univ., **A11**, 255 [MR **9**, 627].
Cosmology in terms of wave geometry. XI. The solar system as a local irregularity in the universe.
1105. Silberstein L., Phil. Mag., **37**, 230 (1919) [JF **47**, 813].
Boundary difficulties of Einstein's gravitation theory.
1106. Silberstein L., The theory of general relativity and gravitation, Toronto, 1922 [JF **48**, 1063].
1107. Silberstein L., The theory of relativity, 2nd ed., London, 1924 [JF **50**, 605].
1108. Silberstein L., The size of the universe, Oxford, 1930.
1109. Silberstein L., Phys. Rev., **49**, 268 (1936) [Z **13**, 287].
Two-centers solution of the gravitational field equations, and the need for a reformed theory of matter.
1110. Silberstein L., Phil. Mag., **24**, 814 (1937) [Z **17**, 333].
On Einstein's gravitational field equations.
1111. Singer S. F., Phys. Rev., **104**, 11 (1956) [MR **18**, 782].
Application of an artifical satellite to the measurement of the general relativistic «red shift».
1112. W. de. Sitter, Mon. Not. Roy. Astr. Soc., **76**, 699 (1916); **77**, 155 (1916); **78**, 3 (1917) (см. также Robertson [989]).
On Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences.

1113. de Sitter W., Proc. K. Akad. Wet. Amsterdam, **19**, 367 (1917) [JF **46**, 1333]. Planetary motion and the motion of the moon according to Einstein's theory.

1114. de Sitter W., Proc. K. Akad. Wet. Amsterdam, **19**, 527 (1917) [JF **46**, 1335]. On the relativity of rotation in Einstein's theory.

1115. de Sitter W., Proc. K. Akad. Wet. Amsterdam, **19**, 1217 (1917) [JF **46**, 1336 (см. также Robertson [989])].
On the relativity of inertia. Remarks concerning Einstein's latest hypothesis.

1116. de Sitter W., Proc. K. Akad. Wet. Amsterdam, **20**, 229 (1918) [JF **46**, 1339]. Proc. K. Akad. Wet. Amsterdam, **20**, 229 (1918) [JF **46**, 1939].

1117. de Sitter W., Proc. K. Akad. Wet. Amsterdam, **20**, 1309 (1918).
Further remarks on the solutions of the field-equations of Einstein's theory of gravitation.

1118. de Sitter W., Bull. Astron. Inst. Netherlands, **5**, 211, Nr. 193 (1930).
The expanding universe. Discussion of Lemaître's solution of the equations of the inertial field.

1119. de Sitter W., Bull. Astron. Inst. Netherlands, **5**, 274 Nr. 200 (1930).
Further remarks on the astronomical consequences of the theory of the expanding universe.

1120. de Sitter W., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., **16**, 474 (1930) [JF **56**, 789].
On the distances and radial velocities of extragalactic nebulae, and the explanation of the latter by the relativity theory of inertia.

1121. de Sitter W., Bull. Astron. Inst. Netherlands, **6**, Nr. 223, 141 (1931).
Some further computations regarding non-static universes.

1122. de Sitter W., Proc. K. Akad. Wet. Amsterdam, **35**, 596 (1932) [Z **4**, 425].
On the expanding universe.

1123. de Sitter W., Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **93**, 628 (1933) [Z **7**, 331].
On the expanding universe and the time-scale.

1124. de Sitter W., Bull. Astron. Inst. Netherlands, **7**, 97 (1933) [Z **7**, 331].
On the motion and mutual perturbations of material particles in an expanding universe.

1125. de Sitter W., Bull. Astron. Inst. Netherlands, **7**, 205 (1934) [Z **9**, 334].
On distance, magnitude and related quantities in an expanding universe.

1126. Soh H. P., Journ. Math., Phys., **12**, 298 (1939) [Z **7**, 84].
A theory of gravitation and electromagnetism.

1127. Sokolnikoff I. S., Tensor analysis, New York-London, 1951 [MR **13**, 584].

1128. Stellmacher K., Math. Ann., **115**, 136 (1937) [Z **17**, 213].
Zum Anfangswertproblem der Gravitationsgleichungen.

1129. Stephenson G., Kilmister C. W., Nuovo Cimento, **10**, 230 (1953) [MR **14**, 1134].
A unified theory of gravitation and electromagnetism.

1130. van Stockum W. J., Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **57**, 135 (1937) [Z **16**, 283].
The gravitational field of a distribution of particles rotating about an axis of symmetry.

1131. van Stockum W. J., Proc. Roy. Irish Acad., **A44**, 109 (1938) [Z **18**, 282].
The precession of the inertial frame of a rotating body.

1132. Straneo P., Atti R. Accad. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., **33**, 404 (1924) [JF **50**, 686].
Intorno alla teoria dei campi einsteiniani a simmetria assiale.

1133. Straneo P., Atti R. Accad. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., **33**, 468 (1924) [JF **50**, 686].
Deduzione e interpretazione di qualche ds^2 einsteiniano simmetrico intorno ad un asse.

1134. Straneo P., Atti R. Accad. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., **33**, 547 (1924) [JF **50**, 686].
Considerazioni generali sui campi einsteiniani a simmetria assiale.

1135. S t r a n e o P., Compt. Rend., **192**, 1364 (1931) [Z **1**, 429].
Théorie unitaire de la gravitation et de l'électricité.
1136. S t r a n e o P., Atti R. Accad. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., **13**, 364 (1931) [Z **1**, 429].
Intorno alla «teoria unitaria» della gravitazione e dell' elettricità.
1137. S t r a n e o P., Gleichungen zu einer einheitlichen Feldtheorie. Sitz. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl. 1931, S. 319 [Z **2**, 300].
1138. S t r a n e o P., Atti R. Accad. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., **15**, 563 (1932) [Z **4**, 424].
I tensori energetici nella teoria a geometrizzazione assoluta.
1139. S t r a n e o P., Zs. f. Phys., **77**, 829 (1932) [Z **5**, 271].
Enheitliche Feldtheorie der Gravitation und Elektrizität.
1140. S t r u i k D. J., Theory of linear connections, Berlin, 1934 [Z **8**, 84].
1141. S t r u v e O., Sky and Telescope, **12**, 203, 238 (1953).
The distance scale of the universe.
1142. S t u e c k e l b e r g E. C. G., Helv. Phys. Acta, **14**, 588 (1941) [MR **4**, 56].
Remarque à propos de la création de paires de particules en théorie de relativité.
1143. S t u e c k e l b e r g E. C. G., Helv. Phys. Acta, **15**, 23 (1942) [MR **4**, 56].
La mécanique du point matériel en théorie de relativité et en théorie des quanta.
1144. S t u e c k e l b e r g E. C. G., W a n d e r s G., Helv. Phys. Acta, **26**, 307 (1953) [MR **15**, 358].
Thermodynamique en relativité générale.
1145. S u b r a m a n i a n S., Boll. Un. Mat. Ital., **13**, 233 (1934) [Z **10**, 131].
Deviazione geodetica in uno spazio a curvatura constante.
1146. S u l a i m a n S., Phil. Mag., **28**, 227 (1939) [MR **1**, 184].
The astronomical consequences of relativistic two-body problem.
1147. S u l a i m a n S., Proc. Nat. Acad. India, **A10**, 14 (1940) [MR **8**, 176].
Reply to the preceding paper.
1148. S y n g e J. L., Nature, **108**, 275 (1921) [JF **49**, 660].
A system of space-time coordinates.
1149. S y n g e J. L., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., **8**, 198 (1922) [JF **48**, 843].
Principal directions in a Reimannian space.
1150. S y n g e J. L., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., **8**, 204 (1922) [JF **48**, 843].
Principal directions in the Einstein solar field.
1151. S y n g e J. L., Phil. Mag., **1**, 913 (1925) [JF **51**, 713].
An alternative treatment of Fermat's principle for a stationary gravitational field.
1152. S y n g e J. L., Proc. London Math. Soc., **25**, 247 (1926) [JF **52**, 738].
First and second variations of the length integral in Riemannian space.
1153. S y n g e J. L., Phil. Trans. Roy. Soc., **A226**, 33 (1926) [JF **52**, 798].
On the geometry of dinamics.
1154. S y n g e J. L., Proc. Roy. Irish. Acad., **A39**, 10 (1929) [JF **56**, 619].
The displacement or deviation of circles in Reimannian space.
1155. S y n g e J. L., Proc. London Math. Soc., **32**, 241 (1931) [Z **2**, 154].
A characteristic function in Riemannian space and its applications to the solution of geodesic triangles.
1156. S y n g e J. L., Trans. Roy. Soc. Canada, III, **28**, 127 (1934) [Z **10**, 186].
The energy tensor of a continuous medium.
1157. S y n g e J. L., Ann. of Math., **35**, 705 (1934) [Z **10**, 131].
On the deviation of geodesics and null-geodesics, particulary in relation to the properties of spaces of constant curvature and indefinite line-element.
1158. S y n g e J. L., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., **20**, 635 (1934) [Z **10**, 323].
On the expansion or contraction of a symmetrical cloud under the influence of gravity.
1159. S y n g e J. L., Univ. of Toronto Studies, App. Math. Ser., 1 (1935) [Z **12**, 231].
Principal nul-directions defined in space-time by an electromagnetic field.

1160. S y n g e J. L., Quart. Journ. Math. Oxford Ser. **6**, 199 (1935) [Z **12**, 181].
The proportionality of energy and frequency for a photon in general relativity.
1161. S y n g e J. L., Duke Math. Journ., **1**, 527 (1935) [Z **13**, 36].
On the neighbourhood of a geodesic in Riemannian space.
1162. S y n g e J. L., Nature, **138**, 28 (1936).
Equivalent particle observers.
1163. S y n g e J. L., Trans. Roy. Soc. Canada, III, **30**, 165 (1936) [Z **15**, 234].
Limitations on the behaviour of an expanding universe.
1164. S y n g e J. L., Proc. Roy. Soc., **A157**, 434 (1936) [Z **15**, 235].
Integral electromagnetic theorems in general relativity.
1165. S y n g e J. L., Quart. Journ. Math., Oxford Ser., 7, 316 (1936) [Z **15**, 416].
On the connectivity of spaces of positive curvature.
1166. S y n g e J. L., Proc. Roy. Soc., **A160**, 187 (1937) [Z **16**, 283].
A criticism of the method of expansion in powers of the gravitational constant in general relativity.
1167. S y n g e J. L., Proc. Edinburgh Math. Soc., **5**, 93 (1937) [Z **16**, 421].
On the concept of gravitational force and Gauss's theorem in general relativity.
1168. S y n g e J. L., Proc. London Math. Soc., **43**, 376 (1937) [Z **18**, 185].
Relativistic hydrodynamics.
1169. S y n g e J. L., Proc. Symp. on Appl. Math., Amer. Math. Soc., **2**, 21 (1950) [MR **11**, 401].
Electromagnetism without metric.
1170. S y n g e J. L., Proc. Roy. Irish Acad., **A53**, 83 (1950) [MR **12**, 546].
1171. S y n g e J. L., Inst. Fluid Mech. and Appl. Math., Univ. Maryland, Lect. Ser., **5** (1951) [MR **13**, 501].
1172. S y n g e J. L., Proc. Roy. Soc., **A211**, 303 (1952) [MR **14**, 99].
Orbits and rays in the gravitational field of a finite sphere according to the theory of A. N. Whitehead.
1173. S y n g e J. L., Geometrical mechanics and de Broglie waves, Cambridge, 1954 (MR **15**, 566].
1174. S y n g e J. L., Proc. Roy. Soc., **A226**, 336 (1954) [MR **16**, 410].
Note on the Whitehead-Rayner expanding universe.
1175. S y n g e J. L., Relativity: the special theory, Amsterdam, 1956 [MR **17**, 1013].
1176. S y n g e J. L., Comm. Dublin Inst. Adv. Stud., **A12** (1956) [MR **18**, 703].
Geometrical optics in moving dispersive media.
1177. S y n g e J. L., Proc. Roy. Irish Acad., **A58**, 29 (1957) [MR **19**, 1140].
An invariant gravitational density.
1178. S y n g e J. L., Proc. Roy. Irish Acad., **A59**, 1 (1957) [MR **20**, 116].
A model in general relativity for the instantaneous transformation of a massive particle into radiation.
1179. S y n g e J. L., The relativistic gas, Amsterdam, 1957.
1180. S y n g e J. L., Adv. of Sci., **55**, 207 (1957).
How stands the theory of gravitation today?
1181. S y n g e J. L., Proc. Edinburgh Math. Soc., **11**, 39 (1958) [MR **20**, 616].
Whittaker's contributions to the theory of relativity.
1182. S y n g e J. L., The geometry of space-time. C.I.M.E. Sestriere (1958) (mimeographed lectures, Ist. Mat. Univ. Roma).
1183. S y n g e J. L., Math. Zs., **72**, 82 (1959).
A theory of elasticity in general relativity.
1184. S y n g e J. L., Bull. Calcutta Math. Soc. (1960).
On some special coordinate systems in general space-time.
1185. S y n g e J. L., Tensorial conservation laws in general relativity. Colloque Internat sur les théories relativistes de la gravitation, Royaumont, 1960.
1186. S y n g e J. L., Some properties of a world function. Colloque sur la théorie de la relativité, Bruxelles, 1960.

1187. S y n g e J. L., Relativity based on chronometry, Monograph on Gravitation. Warsaw, 1960.

1188. S y n g e J. L., Rend. Sem. Nat. Fis. Milano, 1960.
Optical observations in general relativity.

1189. S y n g e J. L., M c C o n n e l l A. J., Phil. Mag., **5**, 241 (1928) [JF **54**, 775].
Riemannian null-geometry.

1190. S y n g e J. L., S c h i l d A., Tensor calculus, Toronto, 1956 [MR **11**, 400].

1191. S z e k e r e s G., Phys. Rev., **97**, 212 (1955) [MR **16**, 869].
New formulation of the general theory of relativity.

1192. S z e k e r e s G., Phys. Rev., **104**, 1791 (1956) [MR **18**, 703].
Ether drift and gravitational motion.

1193. T a k a s u T., Proc. Japan Acad., **29**, 533 (1953); **30**, 702 (1954) [MR **16**, 184, 1058].
A necessary unitary field theory as a non-holonomic Lie geometry realized in the three-dimensional Cartesian space.

1194. T a k a s u T., Yokohama Math. Journ., **1**, 263 (1953) [MR **16**, 184].
A necessery unitary field theory as a non-holonomic Lie geometry realized in the three-dimensional Cartesian space and its quantum mechanics.

1195. T a k a s u T., Proc. Japan Acad., **30**, 814 (1954) [MR **16**, 1165].
Equations of motion of a free particle in the author's general relativity as a non holonomic Laguerre geometry in the moving three-dimensional Cartesian space.

1196. T a k e n o H., Journ. Sci. Hiroshima Univ., **A6**, 147 (1936) [Z **13**, 367].
Projective wave geometry.

1197. T a k e n o H., Journ. Sci. Hiroshima Univ., **A7**, 39 (1937) [Z **17**, 236].
Projective wave geometry and de Sitter's space.

1198. T a k e n o H., Journ. Sci. Hiroshima Univ., **A8**, 223 (1958) [Z **21**, 86].
Cosmology in terms of wave geometry. III. Momentum-density vector of nebulae.

1199. T a k e n o H., Journ. Sci. Hiroshima Univ., **A9**, 195 (1939) [Z **22**, 426].
Cosmology in terms of wave geometry. V. Universe with Born-type electromagnetism.

1200. T a k e n o H., Journ. Sci. Hiroshima Univ., **A10**, 173 (1940); **11**, 201 (1942) [MR **2**, 208; **9**, 539].
Cosmology and conformally flat space.

1201. T a k e n o H., Journ. Sci. Hiroshima Univ., **A12**, 125 (1942) [MR **10**, 158].
Equations characterizing various Riemannian spaces in cosmology.

1202. T a k e n o H., Journ. Math. Soc. Japan, **3**, 317 (1951) [MR **13**, 985].
Theory of spherically symmetric space-times. I. Characteristic sistems.

1203. T a k e n o H., Progr. Theor. Phys., **8**, 317 (1952) [MR **14**, 417].
On the spherically symmetric space-times in general relativity.

1204. T a k e n o H., Journ. Sci. Hiroshima Univ., A16, 67, 291, 299, 497, 507 (1952—1953) [MR **15**, 565].
Theory of the spherically symmetric space-times. II—VI.

1205. T a k e n o H., Progr. Theor. Phys., **10**, 431 (1953) [MR **15**, 565].
A generalization of special Lorentz transformation in de Sitter space-time.

1206. T a k e n o H., Progr. Theor. Phys., **10**, 509 (1953) [MR **15**, 566].
Static spherically symmetric space-times in general relativity.

1207. T a k e n o H., Progr. Theor. Phys., **11**, 392 (1954) [MR **16**, 409].
The problem of many bodies and the superposition of spherically symmetric space-times in general relativity.

1208. T a k e n o H., Tensor (N. S.), **4**, 9 (1954) [MR **16**, 635].
On solutions of electromagnetic equation in non-static spherically symmetric space-times.

1209. T a k e n o H., Tensor (N. S.), 5, 23 (1955) [MR 17, 545].
On groups of conformal transformations in spherically symmetric space-times.

1210. T a k e n o H., Tensor, 5, 71 (1955) [MR 17, 908].
On solutions of the field equations in general relativity with an electromagnetic field.

1211. T a k e n o H., Tensor (N. S.), 6, 15 (1956) [MR 18, 704].
On the theory of gravitational waves.

1212. T a k e n o H., Tensor (N. S.), 7, 97 (1957); 8, 59 (1958) [MR 21, 475].
On plane wave solutions of field equations in general relativity.

1213. T a k e n o H., I k e d a M., Journ. Sci. Hiroshima Univ., A17, 75 (1953) [MR 15, 565].
Theory of the spherically symmetric space-time. VII.

1214. T a k e n o H., U e n o Y., Progr. Theor. Phys., 15, 322 (1956) [MR 19, 926].
On the wave theory of light in general relativity. III. Electromagnetic four-potential (части I и II, см. Ueno [1298]).

1215. T a k e u c h i T., Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, 15, 217 (1933) [Z 7, 186].
Universe without curvature.

1216. T a u b A. H., Phys. Rev., 74, 328 (1948) [MR 10, 72].
Relativistic Rankine — Hugoniot equations.

1217. T a u b A. H., Ann. of Math., 53, 472 (1951) [MR 12, 865].
Empty space-times admitting a three parameter group of motions.

1218. T a u b A. H., Phys. Rev., 94, 1468 (1954) [MR 16, 185].
General relativistic variational principle for perfect fluids.

1219. T a u b A. H., Phys. Rev., 103, 454 (1956) [MR 18, 177].
Isentropic hydrodynamics in plane symmetric space-times.

1220. T a u b A. H., Illinois Journ. Math., 1, 370 (1957) [MR 19, 816].
Singular hypersurfaces in general relativity.

1221. T a u b A. H., Phys. Rev., 107, 884 (1957) [MR 19, 1139].
Approximate solutions of the Einstein equations for isentropic motions of plane-symmetric distributions of perfect fluids.

1222. T a u b A. H., Arch. Rational Mech. Analysis, 3, 312 (1959) [MR 21, 869].
On circulation in relativistic hydrodynamics.

1223. T a u b e r G. E., Canad. Journ. Phys., 33, 824 (1955) [MR 17, 675].
On equations of motion in general relativity.

1224. T a u b e r G. E., Canad. Journ. Phys., 35, 477 (1957) [MR 19, 103].
The gravitationsl fields of electric and magnetic dipoles.

1225. T a y l o r N. W., Australian Journ. Sci. Res., A5, 423 (1952) [MR 14, 806].
A simplified form of the relativistic electromagnetic equations.

1226. T a y l o r N. W., Australian Journ. Phys., 6, 1 (1953) [MR 14, 915].
The relativistic electromagnetic equations in a material medium.

1227. T e i s s e y r e R., Acta. Phys. Polon., 13, 45 (1954) [MR 15, 751].
Note on the problem of coordinate conditions and equations of motion in general relativity theory.

1228. T e m p l e G., Proc. Phys. Soc., 36, 176 (1923) [SA 27, 592].
Whitehead's theory of relativity.

1229. T e m p l e G., Proc. Roy. Soc., A154, 354 (1936) [Z 13, 371].
Gauss's theorem in general relativity.

1230. T e m p l e G., Proc. Roy. Soc., A168, 122 (1938) [Z 19, 380].
New systems of normal coordinates for relativistic optics.

1231. T e m p l e G., Proc. Phys. Soc., 51, 465 (1939) [Z 21, 181].
Relativistic cosmology.

1232. T h a c k e r a y A. D., W e s s e l i n k A. J., Nature, 171, 693 (1953) [SA 56, 684].
Distances of the Magellanic clouds.

1233. T h i r r i n g H., Phys. Zs., 19, 33 (1918); 22, 29 (1921) [JF 46, 1316; 48, 1018).
Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie.

1234. T h i r r i n g W., Fortschr. Phys., 7, 79 (1959).
Lorentz-invariante Gravitationstheorien.

1235. T h i r y Y., Journ. Math. Pures Appl., 30, 275, 317 (1951) [MR 13, 787].
Étude mathématique des équations d'une théorie unitaire à quinze variables de champ.

1236. T h i r y Y., Compt. Rend., 235, 1480 (1952) [MR 14, 591].
Sur une généralisation du problème de Schwarzschild à une théorie unitaire.

1237. T h i r y Y., Compt. Rend., 241, 691 (1955) [MR 17, 200].
Sur le caractère statique d'un modèle d'univers stationaire en théorie unitaire de Jordan — Thiry.

1238. T h o m a s L. H., Ann. of Math., 42, 113 (1941) [MR 2, 216].
On unitary representations of the group of de Sitter space.

1239. T h o m a s L. H., Rev. Mod. Phys., 17, 182 (1945) [MR 7, 397].
Relativistic invariance.

1240. T h o m a s T. Y., Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 15, 906 (1929) [JF 55, 502].
On the existence of integrals of Einstein's gravitational equations for free space and their extension to *n* variables.

1241. T h o m a s T. Y., Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 16, 761, 830 (1930); 17, 48, 111, 199, 325 (1931) [Z 1, 243, 427].

1242. T h o m a s T. Y., The differential invariants of generalized spaces, Cambridge, 1934 [Z 9, 85].

1243. T h o m a s T. Y., Rec. Math. Moscou (N. S.), 3, 331 (1938) [Z 19, 279].
New theorems on Reimann-Einstein spaces.

1244. T h o m s e n G., Atti R. Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., 5, 778 (1927) [J. F 53, 819].
Sopra la meccanica relativistica dei sistemi olonomi.

1245. T h o m s e n G., Atti R. Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., 5, 866 (1927) [JF 53, 819].
Sulla cinematica dei corpi rigidi nella relatività generale.

1246. T h o m s e n G., Atti R. Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., 5, 977 (1927) [JF 53, 819].
Sulla dinamica dei corpi rigidi nella relatività generale.

1247. T h o m s e n G., Atti R. Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., 6, 37 (1927) [JF 53, 819].
Sulla rotazione della Terra nella meccanica relativistica.

1248. T h o m s e n G., Math. Zs., 29, 96 (1928); 30, 939 (1929) [JF 54, 941; JF 55, 505].
Über die Bewegung eines kleinen starren Probekörpers in beliebig vorgegeben Gravitationsfeldern.

1249. T i e t z e H., Math. Zs., 16, 308 (1923); 18, 324 (1923) [JF 49, 546].
Über parallelverschiebung in Reimannschen Räumen.

1250. T o l m a n R. C., Proc. Nat. Acad. U. S. A., 14, 268 (1928) [JF 54, 947].
On the extension of thermodynamics to general relativity.

1251. T o l m a n R. C., Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 14, 348 (1928) [JF 54, 947].
On the energy and entropy of Einstein's closed universe.

1252. T o l m a n R. C., Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 14, 353 (1928) [JF 54, 947].
On the equilibrium between radiation and matter in Einstein's closed univers.

1253. T o l m a n R. C., Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 14, 701 (1928) [JF 54, 947].
Further remarks on the second law of thermodynamics in general relativity.

1254. T o l m a n R. C., Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 15, 297 (1929) [JF 55, 496].
On the possible line elements for universe.

1255. T o l m a n E. C., Phys. Rev., 35, 875 (1930) [JF 56, 743].
On the use of the energy-momentum principle in general relativity.

1256. T o l m a n R. C., Phys. Rev., 35, 896 (1930) [JF 56, 744].
On the use of the entropy principle in general relativity.

1257. T o l m a n R. C., Phys. Rev., 35, 904 (1930) [JF 56, 744].
On the weight of heat and thermal equilibrium in general relativity.

1258. T o l m a n R. C., Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **16**, 320 (1930) [JF **56**, 1365].
The effect of the annihilation of matter on the wavel-ength of light from the nebulae.

1259. T o l m a n R. C., Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **16**, 409 (1930) [JF **56**, 1365].
More complete discussion of the time dependence of the non-static line element for the universe.

1260. T o l m a n R. C., Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **16**, 511 (1930) [JF **56**, 1365].
On the estimation of distance in a curved universe with a non-static line element.

1261. T o l m a n R. C., Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **16**, 582 (1930) [JF **56**, 1365].
Discussion of various treatments which have been given to the non-static line element for the universe.

1262. T o l m a n R. C., Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **17**, 153 (1931) [Z **1**, 255].
On thermodynamic equilibrium in a static Einstein universe.

1263. T o l m a n R. C., Phys. Rev., **37**, 1639 (1931) [Z **2**, 437 (см. также Robertson [989])].
On the problem of the entropy of the universe as a whole.

1264. T o l m a n R. C., Phys. Rev., **38**, 797 (1931) [Z **3**, 39 (см. также Robertson [989])].
Non-static model of universe with reversible annihilation of matter.

1265. T o l m a n R. C., Phys. Rev., **38**, 1758 (1934) [Z **3**, 180 (см. также Robertson [989])].
On the theoretical requirements for a periodic behaviour of the universe.

1266. T o l m a n R. C., Science, 367 (1932) [Z **4**, 232 (см. также Robertson [989])].
Models of the physical universe.

1267. T o l m a n R. C., Phys. Rev., **39**, 320 (1932) (см. также Robertson [989]).
Possibilities in relativistic thermodynamics for irreversible processes without exhaustion of free energy.

1268. T o l m a n R. C., Bull. Amer. Math. Soc., **39**, 49 (1933) [Z **6**, 231].
Thermodynamics and relativity.

1269. T o l m a n R. C., Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **20**, 169 (1934) [Z **9**, 41].
Effect of inhomogeneity on cosmological models.

1270. T o l m a n R. C., Relativity, thermodynamics and cosmology, Oxford, 1934 [Z **9**, 413].

1271. T o l m a n R. C., Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **21**, 321 (1935) [Z **12**, 41).
Thermal equilibrium in a gravitational field.

1272. T o l m a n R. C., Phys. Rev., **55**, 364 (1939) [Z **20**, 284].
Static solutions of Einstein's field equations for spheres of fluid.

1273. T o l m a n R. C., E h r e n f e s t P., P o d o l s k y B., Phys. Rev., **37**, 602 (1931) [Z **1**, 246].
On the gravitational field produced by light.

1274. T o l m a n R. C., R o b e r t s o n H. P., Phys. Rev., **43**, 564 (1933) [Z **6**, 376].
On the interpretation of heat in relativistic thermodynamics.

1275. T o l m a n R. C., W a r d M., Phys. Rev., **39**, 835 (1932) [Z **4**, 89 (см. также Robertson [989])].
On the behavior of non-static models of the universe when the cosmological constant is omitted.

1276. T o l o t t i C., Atti Accad. Naz. Lincei Rend., **21**, 326 (1935) [Z **11**, 378].
Calcolo del tensoro di Ricci-Einstein nel caso ortogonale.

1277. T o l o t t i C., Atti Accad. Naz. Lincei Rend., **21**, 488 (1935) [Z **12**, 41].
Equazioni gravitazionali di Einstein per gli universi dotati di completa simmetria attorno ad un centro.

1278. T o l o t t i C., Atti Accad. Naz. Lincei Rend., **21**, 572 (1935) [Z **12**, 41].
Caso tipico di universi dinamici dotati di completa simmetria attorno ad un centro.

1279. T o l o t t i C., Atti Accad. Naz. Lincei Rend., **25**, 377 (1937) [Z **17**, 142].
Sulla generalizzazione delle equazioni di Dirac allo spazio della relatività generale.

1280. T o n n e l a t M. A., Ann. phys., **15**, 144 (1941) [MR **7**, 101].
Sur la théorie du photon dans un espace de Riemann.

1281. T o n n e l a t M. A., Compt. Rend., **218**, 305 (1944) [MR 7, 102].
La particule de spin 2 et la loi de gravitation d'Einstein dans le cas de présence de matière.

1282. T o n n e l a t M. A., La théorie du champ unifié d'Einstein et quelques-uns de ses développement, Paris, 1955. [MR 17, 907].

1283. T r a u t m a n A., Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III, 4, 439 (1956) [MR **18**, 703].
On a generalisation of the Einstein—Infeld approximation method.

1284. T r a u t m a n A., Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III, **4**, 443 (1956) [MR **18**, 703].
Solution of the one-body problem by the Einstein—Infeld approximation method.

1285. T r a u t m a n A., Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III, **5**, 273, XXIII (1957) [MR **19**, 509].
Discontinuities of field derivatives and radiation in covariant theories.

1286. T r a u t m a n A., Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III, **5**, 721, LXIII (1957) [MR **19**, 815].
On the conservation theorems and coordinate systems in general relativity.

1287. T r a u t m a n A., Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III, **5**, 1115 (1957) [MR **19**, 1020].
Proof of the non-existence of periodic gravitational fields representing radiation.

1288. T r a u t m a n A., Compt. Rend., **246**, 1500 (1958) [MR **19**, 1237].
Sur la propagation des descontinuités du tenseur dè Riemann.

1289. T r a u t m a n A., Lectures on general relativity, King's College, London, 1958 (mimeographed).

1290. T r a u t m a n A., Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astr. Phys., **6**, 403 (1958) [MR **20**, 616].
Boundary conditions at infinity for physical theories.

1291. T r a u t m a n A., Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astr. Phys., **6**, 407 (1958) [MR **20**, 616].
Radiation and boundary conditions in the theory of gravitation.

1292. T r e d e r H., Ann. d. Phys., **2**, 225 (1958).
Stosswellen des Gravitationsfeldes.

1293. T r e f e t z E., Math. Ann., **86**, 317 (1922) [JF **48**, 1035].
Das statische Gravitationsfeld zweier Massenpunkte in der Einsteinschen Theorie.

1294. T r o u s s e t J., Compt. Rend., **174**, 1160 (1922) [JF **48**, 999].
Les lois de Kepler et les orbites relativistes.

1295. T r o u s s e t J., Compt. Rend., **176**, 888 (1923) [JF **49**, 649].
L'observation des planètes peut-elle fournir des arguments pour ou contre la relativité?

1296. T r u m p l e r P. J., Observational results on the light deflection and on the redshift in star spectra, JRT, 1955, p. 106.

1297. U d e s c h i n i P., Atti Accad. Naz. Lincei Rend., **25**, 231 (1937) [Z **16**, 283].
Una soluzione relativa alla espansione dell'universo.

1298. U e n o Y., Progr. Theor. Phys., **10**, 442 (1953); **12**, 461 (1954) [MR **15**, 655; **16**, 872].
On the wave theory of light in general reativity. I. Path of light. II. Light as the electromagnetic wave.

1299. U t i y a m a R., Phys. Rev., **101**, 1597 (1956) [MR **17**, 1163].
Invariant theoretical interpretation of interaction.

1300. V a i d y a P. C., Current Sci., **12**, 183 (1943) [MR **8**, 536].
The external field of a radiating star in general relativity.

1301. V a i d y a P. C., Journ. Univ. Bombay (N. S.), **14**, Pt. 3, 4 (1945) [MR **7**, 397].
Spherically symmetric line-elements used in general relativity.

1302. V a i d y a P. C., Phys. Rev., **83**, 10 (1951) [MR **13**, 169].
Nonstatic solutions of Einstein's field equations for spheres of fluid radiating energy.

1303. V a i d y a P. C., Proc. Indian Acad. Sci., **A33**, 264 (1951) [MR **13**, 391].
The gravitational field of a radiating star.

1304. V a i d y a P. C., Proc. Nat. Acad. Sci. India, **A21**, 193 (1951) [MR **14**, 914].
Radiation absorbing systems.

1305. V a i d y a P. C., Journ. Univ. Bombay A (NS) **21**, No. 32, 1 (1952) [MR **14**, 914].
The boundary conditions in gravitational fields of spherical symmetry.
1306. V a i d y a P. C., Bull. Calcutta Math. Soc., **47**, 77 (1955) [MR **17**, 1144].
The general relativity field of a radiating star.
1307. V a i d y a P. C., S h a h K. B., Proc. Nat. Inst. Sci. India, **A23**, 534 (1957) [MR **20**, 115].
A radiating mass particle in an expanding universe.
1308. V e b l e n O., Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **2**, 192 (1922) [JF **48**, 843].
Normal coordinates for the geometry of paths.
1309. V e b l e n O., Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **8**, 347 (1922) [JF **48**, 843].
Projective and affine geometry of paths.
1310. V e b l e n O., Invariants of quadratic differential forms, Cambridge, **1927** [JF **53**, 681].
1311. V e b l e n O., Projective Relativitätstheorie, Berlin, 1933 [Z **6**, 419] (Библиография).
1312. V e b l e n O., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., **21**, 484 (1935) [Z **12**, 181].
A conformal wave equation.
1313. V e n t u r e l l i L., Atti Accad. Naz. Lincei Rend., **27**, 224 (1938) [Z **18**, 430].
La statica einsteiniana nell'interno di una massa fluida gravitante.
1314. V e s c a n T. T., Compt. Rend., **225**, 278 (1947) [MR **9**, 213].
Note sur une nouvelle solution des équations de la gravifique relativiste et ses conséquences cosmologiques.
1315. V e s s i o t E., Compt. Rend., **166**, 349 (1918).
Sur la propagation par ondes et la theórie de la relativité generale.
1316. V i l m a z H., Phys. Rev., **111**, 1417 (1958) [MR **20**, 8410].
New approach to general relativity.
1317. V i n e y I. E., L e y b o u r n e G. G., Phil. Mag., **15**, 33 (1933) [Z **6**, 232]
Gravitation and electricity. II.
1318. V i n e y I. E., L i v e n s G. H., Phil. Mag., **14**, 243 (1932) [Z **5**, 271].
Gravitation and electricity.
1319. V o g t H., Astron. Nachr., **241**, 217 (1931) [Z **1**, 109].
Die Instabilität der Welt.
1320. V o g t H., Astron. Nachr., **243** (1931) [Z **3**, 38].
Zur Dynamik der Spiralnebel.
1321. V o g t H., Astron. Nachr., **245**, 281 (1932) [Z **4**, 192].
Die Expansion des Universums und ihr Einfluss auf die Entwicklung von kosmischen Objekten.
1322. V o g t H., Astron. Nachr., **247**, 169 (1932) [Z **6**, 36].
Bemerkung zur Dynamik der Spiralnebel.
1323. V o g t H., Astron. Nachr., **246**, 343 (1932) [Z **6**, 36].
Über das in den Spiralnebeln geltende Kraftgesetz.
1324. V o g t H., Astron. Nachr., **257**, 1 (1935) [Z **12**, 283].
Zur Theorie der Spiralnebel.
1325. V o g t H., Astron. Nachr., **268**, 291 (1939) [Z **20**, 428].
Zur Deutung der Gestalt der Spiralnebel.
1326. V o l k o f f G. M., Phys. Rev., **55**, 413 (1939) [Z **20**, 285].
On the equilibrium of massive spheres.
1327. W a l k e r A. G., Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **52**, 345 (1932) [Z **6**, 30].
Relative coordinates.
1328. W a l k e r A. G., Quart. Journ. Math., Oxford Ser., **4**, 71 (1933) [Z **6**, 375].
Spatial distance in general relativity.
1329. W a l k e r A. G., Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **94**, 159 (1933) [Z **10**, 89].
Distance in an expanding universe.
1330. W a l k e r A. G., Quart. Journ. Math., Oxford Ser., **6**, 81 (1935) [Z **12**, 134].
On Riemannian spaces with spherical symmetry about a line, and the conditions of isotropy in general relativity.

1331. W a l k e r A. G., Proc. Edinburgh Math. Soc., 4, 170 (1935) [Z 12, 180].
Note on relativistic mechanics.
1332. W a l k e r A. G., Proc. Edinburgh Math. Soc., 4, 238 (1936) [Z 14, 87].
The Boltzmann equation in general relativity.
1333. W a l k e r A. G., Proc. Edinburgh Math. Soc., 7, 16 (1942) [MR 4, 17].
Note on a distance invariant and the calculation of Ruse's invariant.
1334. W a l k e r A. G., Journ. London Math. Soc., 19, 219 (1944) [MR 7, 265].
Completely symmetric spaces.
1335. W a l k e r A. G., Journ. London Math. Soc., 20, 93 (1945) [MR 7, 529].
A particular harmonic Riemannian space.
1336. W a l k e r A. G., Journ. London Math. Soc., 20, 159 (1945) [MR 7, 529].
On completely harmonic spaces.
1337. W a l k e r A. G., Proc. Roy. Soc. Edinburgh, A62, 164 (1946) [MR 7, 531].
A theory of ragraduation in general relativity.
1338. W a l k e r A. G., Journ. London Math. Soc., 21, 47 (1946) [MR 8, 351].
1339. W a l k e r A. G., Rev. Sci., 85, 131 (1947) [MR 9, 222].
Durées et instants.
Symmetric harmonic spaces.
1340. W a l k e r A. G., Proc. Roy. Soc. Edinburgh, A62, 319 (1948) [MR 9, 626].
Foundations of relativity. I, II.
1341. W a l k e r A. G., Quart. Journ. Math., Oxford Ser., 20, 135 (1949) [MR 11, 460].
On parallel fields of partially null vector spaces.
1342. W a l k e r A. G., Quart. Journ. Math., Oxford Ser., 1, 69 (1950) [MR 11, 688].
Canonical form for a Riemannian space with a parallel field of null planes.
1343. W a l k e r A. G., Quart. Journ. Math., Oxford Ser., 1, 147 (1950) [MR 12, 205].
Canonical forms. II. Parallel partially null planes.
1344. W a l k e r A. G., Proc. London Math. Soc., 52, 36 (1950) [MR 12, 283].
On Ruse's spaces of recurrent curvature.
1345. W a l l a c e P. R., Amer. Journ. Math., 63, 729 (1941) [MR 3, 212].
Relativistic equations of motion in electromagnetic theory.
1346. W a t a g h i n G., Atti. Accad. Naz. Lincei Rend., 26, 285 (1937) [Z 18, 186].
Sopra un sistema di equazioni gravitazionali del primo ordine. I.
1347. W e b e r J., W h e e l e r J. A., Rev. Mod. Phys., 29, 509 (1957) [SA 61, 264; MR 20, 1134].
Reality of the cylindrical gravitational waves of Einstein and Rosen.
1348. W e r f e l i A., W i l k e r P., Zs. f. Phys., 130, 256 (1951) [MR 13, 394].
Über mechanische und relativistiche Erhaltungssätze.
1349. d e W e t J. S., Proc. Cambr. Phil. Soc., 43, 511 (1947) [MR 9, 128].
Symmetric energy-momentum tensors in relativistic field theories.
1350. W e y l H., Ann. d. Phys., 54, 117 (1917) [JF 46, 1303].
Zur Gravitationstheorie.
1351. W e y l H., Gravitation und Elektrizität, Sitz. Preuss. Akad. Wiss., 1918, S. 465 [JF 46, 1300].
1352. W e y l H., Math. Zs., 2, 384 (1918) [JF 46, 1301].
Reine Infinitesimalgeometrie.
1353. W e y l H., Phys. Zs., 20, 31 (1919) [JF 47, 782].
Über die statischen kugelsymmetrischen Lösungen von Einsteins' kosmologischen Gravitationsgleichungen.
1354. W e y l H., Ann. d. Phys., 59, 101 (1919) [JF 47, 783].
Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie.
1355. W e y l H., Ann. d. Phys., 59, 185 (1919) [JF 47, 800].
Bemerkung über die axialsymmetrischen Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen.
1356. W e y l H., Phys. Zs., 21, 649 (1920).
Electrizität und gravitation.

1357. W e y l H., Phys. Zs., **22**, 473 (1921) [JF **48**, 1027].
Über die physikalischen Grundlagen erweiterten Relativitätstheorie.

1358. W e y l H., Ann. d. Phys., **65**, 541 (1921) [JF **48**, 1027].
Feld und Materie.

1359. W e y l H., Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. 99 (1921) [JF **48**, 844].
Zur Infinitesimalgeometrie: Einordnung der projectiven und konformen Auffassung.

1360. W e y l H., Space, time, atter. Transhated by H. L. Brose, London, 1922 [JF **48**, 1059].

1361. W e y l H., Math. Zs., **13**, 142 (1922).
Neue Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen.

1362. W e y l H., Raum-Zeit-Materie, 5-te Aufl., Berlin, 1923 [JF **49**, 616].

1363. W e y l H., Phys. Zs., **24**, 230 (1923) [JF **49**, 654 (см. также Robertson [989])].
Zur allgemeinen Relativitätstheorie.

1364. W e y l H., Mathematische Analyse des Raumproblems. Vorlesungen gehalten in Barcelona und Madrid, Berlin, 1923 [JF **49**, 494].

1365. W e y l H., Naturwiss., **12**, 561, 585, 604 (1924) [JF **50**, 600].
Was ist Materie?

1366. W e y l H., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., **15**, 323 (1929); Rice Institute Pamphlet, **16**, 280 (1929) [JF 55, 513].
Gravitation and the electron.

1367. W e y l H., Zs. f. Phys., **56**, 330 (1929) [JF **55**, 513].
Elektron und Gravitation. I.

1368. W e y l H., Phil. Mag., **9**, 936 (1930) [JF **56**, 1286].
Redshift and relativistic cosmology.

1369. W e y l H., Naturwiss., **19**, 49 (1931) [Z **1**, 33].
Geometrie und Physik.

1370. W e y l H., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., **30**, 205 (1944) [MR **6**, 72].
Comparison of a degenerate form of Einstein's with Birkhoff's theory of gravitation.

1371. W e y l H., Amer. Journ. Math., **66**, 591 (1944) [MR **6**, 240].
How far can one get with a linear field theory of gravitation in flat space-time?

1372. W e y l H., Phys. Rev., 77, 699 (1950) [MR **11**, 410].
A remark on the coupling of gravitation and electron.

1373. W e y l H., Naturwiss., **38**, 73 (1951) [MR **12**, 577].
50 Jahre Relativitätstheorie.

1374. W e y l H., Symmetry, Princeton, 1952 [MR **14**, 16].

1375. W e y s s e n h o f f J., Bull. Int. Acad. Polon. Sci., **A252** (1937) [Z **17**, 334].
Metrisches Feld und Gravitationsfeld.

1376. W e y s s e n h o f f J., Über die klassisch-relativistische Behandlung des Sprinproblem. Max-Planck Festschrift, 1958, S. 155.

1377. W h e e l e r J. A., Phys. Rev., **97** 511 (1955) [MR **16**, 756].
Geons.

1378. W h i t e h e a d A. N., The principle of relativity, with applications to physical science, Cambridge, 1922 [JF **48**, 1063].

1379. W h i t r o w G. J., Nature, **156**, 365 (1945) [MR 7, 88].
The two-body problem in Milne's theory of gravitation.

1380. W h i t r o w G. J., The structure and evolution of the universe, London, 1959.

1381. W h i t t a k e r E. T., Proc. Roy. Soc., **A113**, 496 (1927) [JF **53**, 827].
On Hilbert's world-function.

1382. W h i t t a k e r E. T., Proc. Roy. Soc., **A116**, 720 (1927) [JF **53**, 820].
On electric phenomena in a gravitation field.

1383. W h i t t a k e r E. T., Proc. Cambr. Phil. Soc., **24**, 32 (1928) [JF **54**, 942].
Note on the law that light-rays are null geodesics in a gravitational field.

1384. W h i t t a k e r E. T., Journ. London Math. Soc., **3**, 137 (1928) [JF **54**, 945].
The influence of gravitation on electromagnetic phenomena.

1385. W h i t t a k e r E. T., Proc. Roy. Soc., **A120**, 1 (1928) [JF 54, 945].
On the potential of electromagnetic phenomena in a gravitational field.

1386. W h i t t a k e r E. T., Proc. Roy. Soc., **A133**, 93 (1931). [Z 2, 367 (см. также Robertson [989])].
On the definition of distance in curved space, and the displacement of spectral lines from distant sources.

1387. W h i t t a k e r E. T., Proc. Roy. Soc., **A149**, 384 (1935) [Z 11, 377].
On Gauss' theorem and the concept of mass in general relativity.

1388. W h i t t a k e r E. T., A history of the theories of aether and electricity, Vol. II, The modern theories, 1900—1926, London, 1953 [MR 15, 769].

1389. W i g n e r E. P., Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **36**, 184 (1950) [MR 11, 546].
Some remarks on the infinite de Sitter space.

1390. W i g n e r E. P., Rev. Mod. Phys., **29**, 255 (1957) [MR 19, 925].
Relativistic invariance and quantum phenomena.

1391. W i l k e r P., Zs. f. Phys., **130**, 245 (1951) [MR 13, 394].
Zur homogenisierung des kanonischen Formalismus.

1392. W i l l m o r e T. J., Proc. Edinburgh Math. Soc., **10**, 131 (1956) [MR 17, 782].
On compact Riemannian manifolds with zero Ricci curvature.

1393. W i n t e r b e r g F., Astronaut. Acta, **2**, 25 (1956) [MR 18, 261].
Relativistische Zeitdilatation eines künstlichen Satelliten.

1394. W o d e t z k y J., Astron. Nachr., **267**, 127 (1938) [Z 19, 286].
Zur kosmologischen Deutung der Friedmannschen Gleichungen.

1395. W u n d h e i l e r A., Atti R. Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., **12**, 644 (1930) [JF 56, 618].
Une simple démonstration de la formule de l'écart géodésique.

1396. W y m a n M., Phys. Rev., **66**, 267 (1944) [MR 6, 241].
Static isotropic solutions of Einstein's field equations.

1397. W y m a n M., Proc. First Canad. Math. Congress, Montreal, **90** (1945) [MR 8, 496].
Isotropic solutions of Einstein's field equations.

1398. W y m a n M., Phys. Rev., **70**, 74 (1946) [MR 7, 531].
Schwarzschild interior solution in an isotropic coordinate system.

1399. W y m a n M., Phys. Rev., **75**, 1930 (1949) [MR 11, 60].
Radially symmetric distributions of matter.

1400. Y a m a m o t o H., Japan. Journ. Phys., **11**, 35 (1936) [Z 16, 422].
On equations for the Dirac electron in general relativity.

1401. Y a m a m o t o H., Journ. Phys., **12**, 27 (1938) [SA 41, 531].
A note on the relativistic wave equations.

1402. Y a m a m o t o H., Mem. Coll. Sci. Kyoto Imp. Univ., **A22**, 225 (1939) [MR 1, 190].
On the gravitational perturbation for the Dirac electron.

1403. Y a n o K., Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, **19**, 867, 945 (1937) [Z 17, 333, 430].
Sur la théorie unitaire non holonome des champs.

1404. Y a n o K., Proc. Imp. Acad. Japan, **14**, 325 (1938) [Z 20, 93].
Sur la nouvelle théorie unitaire de MM. Einstein et Bergmann.

1405. Y a n o K., M u t o Y., Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, **18**, 142 (1936) [Z 14, 80].
Notes on the deviation of geodesics and the fundamental scalar in a Riemannian space.

1406. Z a y c o f f R., Zs. f. Phys., **67**, 135 (1931); **69**, 428 (1931) [Z 1, 34, 427].
Über die Einsteinsche Theorie des Fernparallelismus. II.

1407. Z a y c o f f R., Ann. d. Phys., **9**, 715 (1931) [Z 2, 90].
Zur relativistischen Synthese der Feldvorstellung.

1408. Z a y c o f f R., Zs. Astrophys., **6**, 193 (1933) [Z 6, 376].
Zur relativistischen Kosmogonie. II.

1409. Z a y c o f f R., Zs. f. Phys., **85**, 788 (1933) [Z 7, 426].
Integrale Theorie von Feld und Materie.

1410. З е л ь м а н о в А. Л., ДАН СССР, **107**, 815 (1956) [MR 18, 781].
Хронометрические инварианты и сопутствующие координаты в общей теории относительности.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Александров В. 237
Араки (Araki H.) 188

Балац (Balazs N. L.) 9, 324
Басс (Bass L.) 9
Бах (Bach R.) 264
Бергман (Bergmann P. G.) 8, 168, 217, 257, 264
Бертотти (Bertotti B.) 9
Биркгофф (Birkhoff G. D.) 237, 248, 253
Бонди (Bondi H.) 161, 267, 274, 279, 291
Боннор (Bonnor W. B.) 10, 168, 176, 297, 298, 311
Бридгман (Bridgman P. W.) 98
Брилл (Brill D. R.) 188
Бриллюэн (Brillouin L.) 319

Вавилов С. И. 257, 274
Вебер (Weber J.) 188
Веблен (Veblen O.) 56
Вейль (Weyl H.) 10, 228, 264, 299, 311

Гамильтон (Hamilton W. R.) 320
Гекманн (Heckmann O.) 274
Гёдель (Gödel K.) 281, 283
Гильберт (Hilbert D.) 101
Главатый (Hlavaty V.) 299
Гоффман (Hoffmann B.) 128, 168
Гриффиц (Griffith B. A.) 126

Дармуа (Darmois G.) 264
Джебсен (Gebsen J. T.) 237
Джильвари (Gilvarry J. J.) 253
Дингл (Dingle H.) 232
Дэс (Das A.) 9, 128, 264, 311
Дюффен (Duffin R. J.) 355

Зальцман (Salzman G.) 153
Зингер (Singer S. F.) 128

Израэль (Israel W.) 9, 43, 231
Инфельд (Infeld L.) 168, 217

Кази (Chazy J.) 178, 264
Кермак (Kermack W. O.) 274
Кларк (Clark G. L.) 168, 264
Клименс (Clemence G. M.) 253
Козырев Н. А. 126
Коринальдези (Corinaldesi E.) 217
Курзон (Curzon H. E. J.) 268

Ландау Л. Д. 217
Ланчос (Lanczos C.) 9, 26, 113, 214
Леви-Чивита (Levi-Civita T.) 20, 197, 264, 328, 348
Лекат (Lecat M.) 358
Лифшиц Е. М. 217
Лишнерович (Lichnerowicz A.) 11, 43, 183, 184, 197, 304
Лэнс (Lense J.) 264

Мажумдар (Majumdar S. D.) 311
Мак-Витти (McVittie G. C.) 182, 232, 248, 253, 255, 257, 274, 278, 279, 285
Мак-Кри (McCrea W. H.) 274
Мардер (Marder L.) 297
Марджерисон (Margerison T. A.) 344
Маршалл (Marshall W.) 344
Маст (Mast C. B.) 9, 332
Мёллер (Møller C.) 14, 24, 121, 217, 257
Месбауэр (Mossbauer R. L.) 344
Ми (Mie G.) 248
Милн (Milne E. A.) 274
Минковский (Minkowski H.) 8, 9
Мун (Moon P. B.) 344
Муто (Muto Y.) 50

Нордстрем (Nordström G.) 248

О'Брайен (O'Brien S.) 9
О'Райфертай (O'Raifeartaigh L.) 9, 13, 80, 239

Папапетру (Papapetrou A.) 217, 311
Пастори (Pastori M.) 197

Паули (Pauli W.) 8, 45, 158, 177, 248, 342, 348
Паунд (Pound R. V.) 344
Петров А. З. 41, 184, 202, 221, 232, 273, 286
Пирани (Pirani F. A. E.) 9, 291
Плебанский (Plebanski J.) 168

Ребка (Rebka G. A.) 344
Рейнер (Rayner C. B.) 9, 153
Риччи (Ricci G.) 348
Робертсон (Robertson H. P.) 273, 274
Робинсон (Robinson I.) 291
Розен (Rosen N.) 153, 269, 297
Рузе (Ruse H. S.) 7, 50

Синг (Synge J. L.) 11, 25, 42, 45, 50, 60, 99, 104, 126, 140, 153, 176, 206, 213, 274, 301, 319, 329
Ситтер де (Sitter W. de) 280
Стокум (Stockum W. J. van) 264
Стретди (Strathdee J.) 9, 332
Стройк (Struik D. J.) 13, 58
Схоутен (Schouten J. A.) 13, 45, 50, 58, 273

Тауб (Taub A. H.) 153, 285
Темпл (Temple G.) 81
Тирринг (Thirring H.) 264
Толман (Tolman R. C.) 182, 232, 257, 274, 280
Тоннела (Tonnelat M. A.) 299

Уайтхед (Whitehead A. N.) 248, 253
Уилер (Wheeler J. A.) 188
Уиттекер (Whittaker E. T.) 277, 288, 299
Уолкер (Walker A. G.) 21

Фам Мау Кан (Pham Mau Quan) 184, 299, 304, 344
Ферми (Fermi E.) 13, 80
Финлай-Френдлих (Finlay-Freundlich E.) 257
Фок В. А. 168
Фуре-Брюа (Fourès-Bruhat Y.) 184, 188, 304

Хаджихара (Hagihara Y.) 251

Шайдегер (Scheidegger A. E.) 168
Шварцшильд (Schwarzschild K.) 237
Шилд (Schild A.) 11, 25, 42, 45, 213, 217, 301
Шиффер (Schiffer J. P.) 344
Шредингер (Schrödinger E.) 9, 225, 299
Шукинг (Schüking E.) 274

Эддингтон (Eddington A. S.) 8
Эйзенхарт (Eisenhart L. P.) 202
Эйнштейн (Einstein A.), 7, 9, 98, 158, 168, 177, 217, 253, 280, 297, 299, 348
Эрец (Erez G.) 269

Яно (Yano K.) 50

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аберрация (звездная) 30, 331
— постоянная 332
— тензор, см. Тензор аберрации
— уравнение 336
Адиабатическое равновесие 150, 155
Ангстрем 356
Атмосфера 178, 357
Афелий 251

Базисная линия 80
— — времениподобная 81
Баллистическое самоубийство 127
Бар 178, 357
Бианки тождества 24, 58
Биркгоффа теорема 237, 297
Бихарактеристика 196, 304
Будущего область 27, 99, 175

Вакуум, см. Пространство пустое
Вариационный принцип 16
Вариационные принципы в геометрической оптике 320—328
Ватерпас 132
Вектор, бесконечно малая мера 12, 104
— бесконечно малый, 12, 104
— — — величина 12
— — — длина 105
— — — конечная мера 12
— — — условие ортогональности 105
— времениподобный 12, 101, 106, 137, 280
— дуальный 48
— изотропный 101, 106
— индикатор 12
— касательный 19, 20, 21, 137
— Киллинга 203
— магнитный трехмерный 300, 309
— норма, см. Вектора величина
— нулевой 12, см. также Вектор изотропный
— отклонения 26, 106
— первой кривизны 334
Вектор пространственноподобный 12, 102, 106, 163
— спина 152
— частоты волны четырехмерный 315, 316
— числовой 145
— электрический трехмерный 300, 309
Векторный базис 74, 75
Весы и меры 354
Винтовая линия 20
Внутренние взаимодействия 142
Волн гравитационных общая теория 187
Волна 33—36, 187
— в гамильтоновой теории 33
— — геометрической оптике 314
— — диспергирующей среде 317
— 4-вектор частоты 315, 316
— временноподобная 316
— гравитационная 187, 290
— — плоская 290
— гребень 99, 314
— единичная 38, 290
— изотропная 37, 316
— кинематика в пространстве — времени 314
— период 314
— пространственноподобная 316
— световая 304
— скорость 314
— — обратная 316
— трехмерная 314
— ударная 193, 194, 304
— — гравитационная 196
— — объемная и необъемная 290
— — электромагнитная в вакууме 304
— фазовая 314
— цилиндрическая 295, 297
— частота 314
— электромагнитная 304
Волновая функция 176
Волновое уравнение обобщенное 302
Вращение Земли 126, 356, 357
— и перенос Ферми 22, 120, 153, 341
— — эффект Саньяка 342
— континуума, см. Континуум

Вращение матрица, см. Матрица спина
— перигелия 251
— с постоянными коэффициентами 81
— тела 132, 171, 264
— угловая скорость 108
Временна́я последовательность 99
Время 99, 104, 354
— абсолютное 248
— измерение 99, 125, 337, 354
— координатное 99
— путешествия 107
— собственное 99, 243, 248, 249
Вселенная 166, 206, 274
— возраст 279, 356
— зарождение 279
— расширяющаяся 274
— статическая 325
— Эйнштейна — де Ситтера 273

Газ 150, 155
Галактики масса 161
— спектр 274
Гамильтона теория 31
— функция главная (характеристическая) 33
Гамильтона — Якоби метод 317
— — уравнение 319
Гаусса—Остроградского теорема 44, 166, 241, 243, 309
— — для звезды конечного радиуса 241
— — — статического пространства 288
— — обобщение 48, 244
Геодезическая 14, 15, 69, 139, 258
— в гамильтоновой теории 35
— — координатах Ферми 86
— — оптических координатах 86
— — поле Солнца 248
— временноподобная 35, 38, 223
— в слабом поле 257
— дифференциальное уравнение 40
— замкнутая 224
— изотропная, см. Изотропная геодезическая
— пространственноподобная 23, 35, 38
—, уравнение 89
Геодезические линии тока 155
Геодезический треугольник бесконечно малый 72, 74
— — конечный 69, 74
Геодезическое отклонение 78
— — уравнение 26, 330
— — инвариантное 28
Гипербола постоянной кривизны 20
Гиперповерхность изотропная 36
— разрыва 11, 42, 236
Гипотезы геодезических 102, 146, 249, 303, 329
— о согласованности 100
— Римана 101
Год 125
Гравитационная постоянная 159, 357
Гравитационное поле 121, 221, 331, 347
— — в вакууме (пустом пространстве) 159, 161, 187, 196, 236, 247, 248
— — Земли и Солнца 248, 254, 260
— — напряженность 133, 243
— — с аксиальной симметрией 265
— — систематическое измерение 140
— — слабое 165, 176, 209, 248, 257
— — статистическое измерение 130
— — статическое 178, 237, 260, 331
— — стационарное 237, 256
— — сферически симметричное 221, 236, 247, 249
Гравитон 197
Грамм 279
Грина теорема 44, 148, 201, 206
— — обобщение 48
Группа движений 202, 297

Давление 146
— атмосферное 178, 357
— в Земле 156
— и гравитационное натяжение 178
— изотропное 285
— и плотность 189, 245
— как собственное значение 155
— положительное 163
— постоянное вдоль линии тока 190
Даламбера оператор, см. Оператор
Движение жесткое 153, 157, 347
— без источников и стоков 153, 190
— в электромагнитном поле 302
— идеальной жидкости 154, 167, 189
— изолированного тела 169
— континуума 150, 153
— невращательное 153
Дельта-функция 12, 25, 300
Динамический метод 130
Дисперсия 324
Дифференцирование 23, 350
— абсолютное 140, 350
— ковариантное 13, 51
— правила коммутации 23
— — оператор 42
Длина 101, 161
— Ферми 341
Допплера эффект 110, 112, 255, см. также Спектральное смещение

Жесткость в смысле Борна 106, 153
Жидкая сфера однородная 246
Жидкость заряженная 300
— идеальная 155, 163, 244, 281
— масса 164, 173, 244
— некогерентная 154, 155, 159, 303
— со сферической симметрией 244, 269

Закон движения 130
Заряд, плотность относительная 300
— полный 312
— собственная плотность 299
— 4-скорость 299
— электрический, сохранение 309
Земли масса 161, 357
— орбита и скорость 356, 357
— радиус орбиты 134

Излучение атома или частицы 99, 319
— Черенкова 320
— электромагнитное 100
Измерение направления 108
Изотропная геодезическая 15, 27—30, 37, 69
— — в когерентной системе 37
— — — поле Солнца 248, 254
— — — пространстве де Ситтера 223, 226
— — — расширяющейся вселенной 275
— — — случае заряженной жидкости 304
— — и аберрация 330
— — — дифференциальная хронометрия 337
— — — спектральное смещение 110, 255
— — как бихарактеристика 196
— — — гравитационный луч 197
— — — мировая линия фотона 103
— — отклонение 27, 223
— — при модифицированной метрике в оптике 324
Изотропный конус 27, 101
— — в импульсном пространстве 143
Икарус (астероид) 253
Импульс внутренний 142
— — отталкивания 142
— — притяжения 142
— пространство четырехмерное 143
— статистика 143
— четырехмерный 143, 146
Импульс четырехмерный гравитационный 208
— — дифференциальное уравнение сохранения 148
— — механический 208
— — полный 208

Инвариант двухточечный 51, 80
— малый 121
— трехточечный 71
Инвариантности принципы 215
Инвариантные компоненты 300
— —дуального тензора 308
Интерферометр 337
— Майкельсона и Морли 337
Искусственный спутник 121, 128
Источники 298

Каноническая форма 32
Канонические уравнения 37
Канонический параметр 15, 20, 27, 37
Касательная единичная 202
Квадруполь 269
Киллинга уравнения 203
Коммутации правила 23
Континуум, вращение 151
— динамика 150, 153
— кинематика 150
— 4-скорость 154
Координаты гауссовы 39, 238
— — косоугольные 39, 304
— — нормальные 39, 40, 184, 189
— — полярные 229
— декартовы 82
— допустимые 11, 39, 40, 43, 291
— изотермические 232
— изотропно-полугеодезические 40
— изотропные 230
— квазидекартовы 74, 78, 293
— — закон преобразования при переносе начала 79
— кривизн 230, 231, 238
— логарифмические 239
— мнимые 349
— нормальные 75
— нулевые 164
— однородные 232
— оптические 80
— — ковариантные 81
— — контравариантные 81
— — метрика 82
— полугеодезические 40
— Ферми 80, 94, 124, 126, 151, 230, 339
— — ковариантные 80
— — контравариантные 80
— — метрика 82
— цилиндрические 264
Координатные условия 161
Космологическая постоянная 158, 221, 236, 273
— теория 279

Коши данные 94, 186, 187, 191, 292
— проблема 167, 184, 302
— — в нормальных гауссовых координатах 189
— — для жидкости идеальной 189
— — — некогерентной заряженной жидкости 303
Красная линия кадмия 100, 125
Кривая временноподобная 20, 134
— пространственноподобная 20, 134, 137, 139
Кривизна вторая 19
— гауссова 249
— детектор пятиточечный 342
— измерение 337
— линии тока 155, 157, 170, 172
— малая 29, 59, 69, 73, 74
— первая 19, 115, 139
— пространства 29, 30, 72
— риманова 24
— — для двумерного элемента в пространстве— времени 115, 134, 346
— — пространства — времени 73
— скалярная 271
— субинвариантная 42
— третья 19
Кривизны инвариант 24, 180
— — в проблеме Коши 186, 190
— — — случае электромагнитного поля 324
— — для гауссовых координат 41
— — — конформно-связанных пространств — времен 271
— — — пространства — времени типа Геделя 282
— — — статического пространства — времени 180
— — и изменение сигнатуры 349
— полосы 30
— радиус 125, 357
— тензор, см. Тензор Римана

Лагранжа метод 150
— множитель 316
— уравнения 274
— функция 32
Лагранжиан 249, 274, 293
Лапласа оператор, см. Оператор Л.
Лапласа уравнение 194
— — в случае аксиальной симметрии (в цилиндрических координатах) 265, 267
Линейное приближение 167, 176
Линии тока 150
— — геодезические 155
— — кривизна, см. Кривизна линий тока
— — некогерентной жидкости 155
— — нормальная конгруэнция 153
— — расширение трубки 153
— — трубка 153
Лоренца индексы 18, 146
— матрица 18, 75
— преобразования 17, 75
Луна 121
— масса 161, 356, 357
— радиус 356, 357
— расстояние от Земли 356
— скорость 357
Лучевая скорость 318
Лучи 33, 36
— в диспергирующей среде 317
— — римановом пространстве — времени 35
— временноподобные 38, 318
— гравитационные 197
— изотропные 36, 318
— оптические 318
— пространственноподобные 38
— света, отклонение 254
— скорость относительно среды 326
— уравнения 249, 317

Майкельсона — Морли эксперимент 338, 342, 344
Максвелла уравнения 299, 301, 307, 309
Малость 59
Марс 329
Масса 158
— в секундах 161
— галактики 161
— звезды 241
— Земли 161, 357
— инертная и гравитационная, эквивалентность 154
— Луны 161, 356, 357
— осциллирующая 298
— положительная и отрицательная 167
— частицы инвариантная (собственная) 102
Материальная частица 99, 102, 142
Материальные среды, статистическая модель 142
Матрица Лоренца 18, 75, 90
— натяжений 146, 151
— распространения натяжений 151
— спина (вращений) 151
Мера вектора 12

Мера кривой 12
— пространственная 104
Меркурий 253
Метод динамический 130
— итераций 59, 179
— обратной связи 169
— операционный 98
— последовательных приближений 167
Метод g 165, 185
Метод T 167, 185
Методы теории групп в общей теории относительности 182, 184, 264
Метрика в квазидекартовых координатах 77
— — координатах Ферми 72
— — случае аксиальной симметрии 264
— — — сферической симметрии 228
— — оптических координатах 72
— для жидкой сферы 247
— — поля Солнца 249
— — пространства электровакуума 310
— конформно-плоская 271
— конформно-статическая 288
— Минковского 176
— ортогональная 232
— плоская 312
— положительно определенная 70
— статическая 237
— стационарная 237
— — и изменение сигнатуры 349
— физическая 312
— Шварцшильда 237
Метрический тензор, см. Тензор м.
Метрическая форма, см. Форма м.
Мировая линия 99, 110, 206
— — прямая 137
— — регулируемая 107
— — свободной частицы 102
— — центра масс 217
Мировая функция 14, 16, 50, 74, 93, 203, 255, 330
— — в координатах Ферми 93
— — — плоском пространстве — времени 50
— — для плоской гравитационной волны 293
— — — поля Солнца 260
— — — слабого поля 257
— — и временноподобная кривая 89, 93
— — — главная функция Гамильтона 38
— — —группа движений 202
— — — дифференциальная хронометрия 339
Мировая функция и интегральные законы сохранения 204
— — — отражающийся фотон 115
— — — спектральное смещение 113, 250, 255, 261, 341
— — ковариантные производные 63, 67, 68
— — пределы совпадения 54, 58
— — производные 90
— — трансформационные свойства 51
— — уравнение в частных производных 53, 261
Молекула 155

Наблюдения астрономические 329
— контролируемые 97
— математические 97
— неконтролируемые 97
— оптические 331
— физические 97
Направление 109
— измерение 109
Направляющие косинусы (коэффициенты) 110, 135, 136, 333
— — для излучения и приема 117, 135, 136
— — телескопа для звездной аберрации 333
Натяжение 132, 146, 163
Натянутая струна 138
Начало координат 74
Небесная механика 158
Нормаль вторая 19
— первая 19, 139
— третья 19
Ньютона второй закон 159
Ньютоновская астрономия 248, 251, 329
— гидродинамика 155, 164
— теория 137, 138
— — гравитации 248
— — сравнение с теорией относительности 137, 138, 157, 161, 189, 244, 248, 329

Облако пыли, см. Некогерентная жидкость
Одновременность абсолютная, физический смысл 137
Окружность временноподобная 19
Оператор Даламбера 174
— — обобщенный 301
— Лапласа 237
— Лапласа тензорный 188
— параллельного переноса 52, 58, 60, 64, 66, 79, 110, 223

Оператор параллельного переноса, ковариантная производная 64, 66
— проектирования 152, 334
Операции управляемые 108
Оптика 315
— геометрическая 314
— — в статическом пространстве 325, 331
— физическая 195
Орбитальное уравнение 251
Орбиты 248
— гиперболического типа 248
— релятивистские 252
— эллиптического типа 248
Ортогональность векторов 105
Осциллирующие массы 298

Падающее яблоко (тело) 121, 130, 244
Парадокс Даламбера 59
— часов 128
Парсек 356
Передача информации 318
Перенос параллельный 20, 21, 110
— — оператор, см. Оператор
— — уравнение 60
— Ферми 22, 92, 109, 113, 342
— — физическая интерпретация 120
— Ферми — Уолкера 21, 61, 80, 134
Пересечение геодезических 51, 59, 62, 78, 193
Перигелий 251
— смещение 252, 255
Пифагора теорема 105, 315
Планка постоянная 113, 314
Плотность 161, 278, 280
— в расширяющейся вселенной 279
— 3-импульса 146
— 4-импульса 208
— массы собственная 154
— 4-момента импульса 208
— ньютоновская и в теории относительности 161
— положительная и отрицательная 163, 166, 185, 193, 272, 280, 284
— тензорная 213
— электрического заряда собственная 300
— энергии 146
— — собственная 154
Поверхность гамильтонова 31
— изотропная 37, 194, 304
— ориентируемая 46
Показатель преломления 317
Поле гравитационное, см. Гравитационное поле
Поле жидкости 244
— полное 239
— Солнца 248
— тензорное симметричное 183
— — сопряженное 183
— Шварцшильда внешнее 236, 289, 332
— — полное 244
— электромагнитное 299
Поля со сферической симметрией 221
— Эйнштейна 174
— — линейное приближение 176
— — статические 178
Поляризация поверхности 147
Поляризованная мишень 143
Поляризованное число частиц 144
Поляризованный множитель 144
Потенциал 313
— гравитационный 133, 159, 264
— запаздывающий 174, 182, 298
— ньютоновский 133, 134, 159, 160, 167, 180, 181
— — аналоги в теории относительности 12
— опережающий 174
— четырехмерный 301
Поток величины q 144
— гравитационного момента импульса 208
— магнитного вектора 309
— полного момента импульса 205, 208
— полного 4-импульса 145, 154, 205
— числовой 145
— электрического вектора 309
— энергии поляризованный 146
Правило перестановок 52
— суммирования Эйнштейна 348
Пределы совпадения 53, 54, 58, 59, 123, 208
Притяжение 142
Причинность 228, 318
Проблема двух тел 162, 165, 267
Произведение скалярное 20
Производные абсолютные 13
— — физический смысл 140
— ковариантные 13, 52, 64, 66
— частные 13
Пространство антиподное 224
— де Ситтера 225
— — — метрическая форма 273
— замкнутое двумерное 309
— — евклидово 46
— постоянной кривизны 24
— пустое (вакуум) 159, 187, 196, 236, 247, 300
— — для электромагнитного поля 299

Пространство статическое 237
— стационарное 237
— типа Геделя 230
— электровакуума 309
Пространство — время 11, 99, 138, 202
— конформно-плоское 270
— конформно-соответствующее 270
— кривизна 89, 91, 102, 223, 342
— — риманова, см. Кривизна
— метрическая форма в квазидекартовых координатах 77
— Минковского 221
— плоское 24, 30
— постоянной кривизны 221
— риманово 34, 99
— с евклидовой точки зрения 209
— — малой кривизной 71, 83
— статическое 286, 310
— Ферми 338
Прошедшего область 27, 99, 175, 279
Прямые линии 212, 258
Псевдорасстояние 275
Псевдотензор 217
— энергии 219
Пуассона уравнение 159, 166, 194
Пульсирующая звезда 239

Радиоволны 103
Разрывы непрерывности 42, 245, 291
Распределения функция 144
— — моменты 145
Расстояние 276
— астрономическое 277
— оптическое 343
— пространственное 12, 101, 105
— Ферми 338
— функция 50
Релятивистская проблема многих тел 254
Репер ортонормированный 17, 28
— условие ортонормируемости 17
Ряды бесконечные 54
— степенные, разложение по малому параметру 120

Саньяка эффект 342
Сведение к точке 48
Светимость собственная 277
Свободное падение 121
Секунда 125, 158, 161, 279, 354
Сигнал 109
Сигнатура 11, 101, 165, 169, 210, 237, 280, 292, 349
Сила 130, 132
— гравитационная 102, 161, 178
Сила пондеромоторная 303
Символ Кристоффеля 13, 180, 233, 270, 281
— Кронекера 12
— — обобщенный 25, 300
Симметрия аксиальная 264
— сферическая 221
— тензора и псевдотензора энергии 145
— уравнения 23
— условия 167
Система координат 108
— отнесения 107
— отсчета инерциальная 159
— — невращающаяся 22
— покоя 149
— Ферми 108, 111, 120
Скалярное произведение 104
Скорость групповая 319, 327
— луча относительно среды 318, 326
— относительная 110, 113
— радиальная 111
— света 88, 114, 319
— средняя динамическая 149
— — кинематическая 149
— угловая 127
— удаления 111
— фундаментальная 319
— четырехмерная континуума 154
Смещение космологическое 274, 322, 331
— — и эффект Допплера 110, 112, 255, 257, 262
— — формула 256, 347
— красное 112, 128, 255, 326
— — — среде 344
— — для спутника Сириуса 257
— спектральное 111
— — и мировая функция 225, 261
— — — частота 112
— — — энергия 111
— в поле Солнца или в статическом поле 254, 255, 261
Событие 99
Солнечная система 162, 193, 321
Сохранение, законы 24
— — в статистической модели 146
— — дифференциальные 201
— — для тензора Эйнштейна 200
— — интегральные 198
— — с вектором Киллинга 204
— — евклидовой точки зрения 212
— — — псевдотензором 218, 219
— — — тензором Римана 204
— заряда уравнения 303, 309

Сохранение импульса 198
— — и энергии, законы 24
— массы, уравнения 303
— момента импульса 198
— уравнения 154, 301
— 4-импульса, уравнение 148
— числа частиц, уравнение 149
Спектр галактик 274
Спектрометр 330
Спектроскопия 100
Специальная теория относительности 107, 221, 222, 229
Спин 171
Спутник Сириуса 257
Среда 317
— диспергирующая 317
— недиспергирующая 319, 324
— прозрачная 319
— уравнение 317
Статистическое равновесие 150, 155
Стационарного времени принцип 329
Стокса теорема 44, 307
— — обобщенная 45, 199
— формула 47, 48
Субтензор Римана 42
— Риччи 42
— Эйнштейна 42

Тейлора формула 70
Телескоп 330
Тело абсолютно жесткое 137
— вращающееся 171
— заряженное 310
— изолированное 213
— невращающееся 267
Тензор аберрации 333
— абсолютно антисимметричный 25
— двухточечный 52
— дивергенция 302
— дискриминантный 24, 45
— Киллинга 203
— ковариантный 306
— контравариантный 306
— кососимметричный 25, 301
— кривизны, см. Тензор Римана
— Леви-Чивита 25
— метрический 11, 158, 183, 215, 270, 299, 324
— натяжений 154, 163
— относительный 213
— перестановок 300
— распространения натяжений 157, 347
— Римана (кривизны) 23, 41, 62, 71, 134, 141, 160, 204, 233, 241, 271, 281, 286, 291, 329, 332, 349
Тензор Римана в пустом пространстве — времени 285
— — — гауссовых координатах 41
— — — случае сферической симметрии 233
— — дважды дуальный 25, 207
— — для гравитационной волны 292
— — — конформно-статической метрики 288
— — — конформных пространств — времен 271
— — — плоского пространства — времени 24
— — — пространства типа Геделя 281, 282
— — — статического поля 180
— — — сферической симметрии 234
— — и законы сохранения 204
— — — изменение сигнатуры 350
— — — измерение гравитационного поля 102, 121, 124, 130, 140, 160
— — симметризованный 56, 58, 93
— — собственный тензор 205
— Риччи 24, 41, 180, 233, 265, 282, 292, 349
— — в гауссовых координатах 41
— — — случае аксиальной симметрии 265
— — — — сферической симметрии 233
— — для гравитационной волны 292
— — — конформно-статической метрики 288, 289
— — — конформных пространств — времен 271
— — — плоского пространства — времени 24
— — — пространств типа Геделя 282
— — — статического поля 180
— — и изменение сигнатуры 350
— — при разрывах 42
— симметричный 215
— спина (вращений) 152
— фундаментальный 11
— Эйнштейна 24, 41, 43, 158, 180, 200, 234, 271, 283, 287
— — второе расширение 56
— — для гауссовых координат 41
— — — конформной метрики 271
— — — конформно-статической метрики 288, 289
— — — пространств типа Геделя 283
— — — статических пространств 180
— — — сферической симметрии 234
— — и законы сохранения 200
— — — изменение сигнатуры 350

Тензор Эйнштейна и уравнения поля 158
— — при разрыве 42
— — собственные значения и собственные векторы 163.
— электромагнитной энергии 299
— электромагнитный дуальный 300
— энергии 145, 150, 158, 221, 239, 244
— энергии-импульса 153
— энергии континуума 153
Тензорный вес относительный 213
Теория поля, единая 299
Топология 224
Точка 32
— базисная 205
— (событие) 101
Точки идентифицируемые и симметрия 229
— сопряженные 59
Триада ортонормированная, см. Репер
Трубка мировых линий 215

Угол 109
— азимутальный 230
— измерение 109
— полярный 230
— фаза 314
Уравнения гидродинамики 162
— движения 198, 302
— — в вакууме 288
— — заряженной частицы 303
— — изолированного тела 213
— — произвольной сплошной среды 157
— — центра масс 215
— поля 157, 161, 169, 221, 236, 239, 287, 302, 309
Ускорение абсолютное 155, 157, 170, 172
— в гравитационном поле 126
— силы тяжести 334
Условия интегрируемости 153
— ортогональности 105
— ортонормированности 17
— связанности 44, 236
— совместности 186
— соединения 42, 44, 163, 170, 181, 236

Ферма принцип 320, 324
— — релятивистский аналог 328
Ферми закон 109
— 3-репер и 4-репер 22, 80, 108, 123, 151
Фиолетовое смещение 347
Форма изотермическая 265
— квадратичная 101, 230, 349
— метрическая 11, 41, 84, 211
— — внешняя 243
— — внутренняя 243
Форма метрическая в случае сферической симметрии 228, 232, 241
— — — статической вселенной 325
— — для координат Ферми 84
— — — конформно-статического пространства 288
— — — пространства де Ситтера 273
— — — — типа Геделя 281
— — — — Эйнштейна — де Ситтера 278
— — — статического пространства 286
— — изотропный вид 239
— фундаментальная, см. Форма метрическая
Фотон 102, 103, 109, 134, 142, 304, 319, 330
— в диспергирующей среде 317
— 4-импульс 330
— отражающийся 113
— статистика 143
— траектория 104
— энергия 111
Фотонная пушка 113
Френе—Серре формулы 17, 89, 118, 126, 139
Функция аналитическая 54, 265
— гармоническая 167, 265, 288, 311
— характеристическая или главная 32—33
Фурье-преобразования 290

Хабла постоянная 278
Характеристики 193, 304, см. также Волны ударные
Характеристическая кривая 193
— функция 50
Хрометрическое уравнение 105
Хронометрия 99
— в римановом пространстве — времени 97
— дифференциальная 337
Хэвисайда — Лоренца закон 303

Центр масс изолированного тела 214
— — траектория 206
Циклическая перестановка 307
Циркуляция 33

Частица материальная 99, 103, 142
— 4-импульс 102
— 4-скорость 102
— пробная 244, 303, см. также Гипотезы геодезических
— свободная 102, 109
— собственная масса 102
— траектория 104

Частицы, аннигиляция и порождение 146
— отождествимые 150
Часы 100
— атомные 100, 354
— стандартные 99

Эйлера метод 150
— углы 75
Эйлера — Лагранжа уравнения 322, 324
Эйнштейна формула для отклонения луча света 256
Эквивалентность 288
— инертной и гравитационной масс 154
Экстремалей связная система 33
Экстремаль 32, 33, 324
— гамильтонова 35
Экстремум 32
Эксцентриситет 252
Электромагнетизм 298
— интегральные теоремы 306
Электрон 161, 356
Элемент действия 318
Элементарная евклидовость 267
Эмиссия 111, 112
Энергия 106, 142, 158, 163, 201
— положительная плотность 273
— поток 273
Эфир 329

Якоби эллиптическая функция 251
Ячейка ориентированная 45
— элементарная 45
— — ребро 45
— — тензорный объем 45, 47

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора 5

Предисловие 7

Глава I. Основные тензорные формулы для риманова пространства — времени 11

§ 1. Метрический тензор и допустимые координаты 11

§ 2. Производные и геодезические 13

§ 3. Ортонормированные реперы и формулы Френе — Серре . . . 17

§ 4. Параллельный перенос и перенос Ферми — Уолкера 20

§ 5. Тензоры Римана, Риччи и Эйнштейна 23

§ 6. Отклонение геодезических 26

§ 7. Гамильтонова теория лучей и волн 31

§ 8. Гауссовы координаты 39

§ 9. Условия соединения на трехмерной гиперповерхности разрыва 42

§ 10. Теоремы Стокса и Грина 47

Глава II. Мировая функцяя Ω 51

§ 1. Мировая функция Ω и ее ковариантные производные как двухточечный инвариант и двухточечные тензоры 51

§ 2. Пределы совпадения 53

§ 3. Вычисление вторых производных мировой функции с помощью оператора параллельного переноса 59

§ 4. Вычисление ковариантных производных от оператора параллельного переноса 64

§ 5. Вычисление высших производных мировой функции 66

§ 6. Решение конечных геодезических треугольников в пространстве — времени с малой кривизной 69

§ 7. Решение бесконечно малых геодезических треугольников . . 72

§ 8. Квазидекартовы координаты 74

§ 9. Изменение начала квазидекартовых координат 78

§ 10. Координаты Ферми и оптические координаты 80

§ 11. Метрики для координат Ферми и оптических координат . . . 82

§ 12. Геодезические в координатах Ферми и оптических координатах 86

§ 13. Мировая функция и ее производные для двух точек на временноподобной кривой 90

§ 14. Мировая функция в координатах Ферми для двух точек на смежных временноподобных кривых 93

Глава III. Хронометрия в римановом пространстве — времени 97

§ 1. Физические наблюдения (ФН) и математические наблюдения (МН) 97

§ 2. Хронометрия и римановы гипотезы 99

§ 3. Гипотезы геодезических 102

§ 4. Пространственная мера, ортогональность и скалярные произведения 104

§ 5. Жесткость в смысле Борна и системы отнесения 106

§ 6. Измерение направления 109

§ 7. Относительная скорость и эффект Допплера 110

§ 8. Перенос Ферми и отражающийся фотон 113

§ 9. Падающее яблоко 121

§ 10. Проблема баллистического самоубийства 127

§ 11. Статическое измерение гравитационных полей 130

§ 12. Перенос Ферми — Уолкера вдоль пространственноподобной кривой и его физический смысл 134
§ 13. Физический смысл абсолютного дифференцирования и систематическое измерение гравитационных полей 140

Глава IV. Материальные среды 142
§ 1. Статистическая модель 142
§ 2. Законы сохранения в статистической модели 146
§ 3. Кинематика континуума 150
§ 4. Тензор энергии континуума 153
§ 5. Уравнения поля и сравнение с теорией Ньютона 157
§ 6. Обсуждение уравнений поля и координатных условий 161
§ 7. Замечания о движении изолированного тела 169

Глава V. Некоторые свойства полей Эйнштейна 174
§ 1. Основная формула для запаздывающего (или опережающего) потенциала 174
§ 2. Линейное приближение 176
§ 3. Статическое поле Эйнштейна в присутствие тел 178
§ 4. Две леммы 183
§ 5. Проблема Коши в нормальных гауссовых координатах 184
§ 6. Проблема Коши в нормальных гауссовых координатах для случая идеальной жидкости 189
§ 7. Характеристики и ударные волны 193

Глава VI. Интегральные законы сохранения и уравнения движения 198
§ 1. Понятие об интегральных законах сохранения 198
§ 2. Интегральные законы сохранения, связанные с тензором Эйнштейна 200
§ 3. Пространство — время, допускающее группу движений 202
§ 4. Интегральные законы сохранения, связанные с тензором Римана 204
§ 5. Пространство — время, рассматриваемое с евклидовой точки зрения 209
§ 6. Уравнения движения изолированного тела 213
§ 7. Псевдовектор 217

Глава VII. Поля со сферической симметрией 221
§ 1. Пространство — время постоянной кривизны (пространство де Ситтера) 221
§ 2. Метрические формы в случае сферической симметрии 228
§ 3. Различные формулы для случая сферической симметрии 232
§ 4. Внешнее поле Шварцшильда 236
§ 5. Полное поле в случае сферически симметричного распределения материи 239
§ 6. Масса звезды конечного радиуса и теорема Гаусса 241
§ 7. Поле жидкости, обладающей сферической симметрией, и полное поле Шварцшильда 244
§ 8. Орбиты и лучи в поле Солнца 248
§ 9. Спектральные смещения и мировая функция 255

Глава VIII. Некоторые специальные пространства 264
§ 1. Аксиальная симметрия 264
§ 2. Конформно соответствующие и конформно плоские пространства 270
§ 3. Космологическое красное смещение 274
§ 4. Пространства типа Геделя 280
§ 5. Статические пространства 286

Глава IX. Гравитационные волны 290
§ 1. Плоские гравитационные волны 290
§ 2. Мировая функция для плоской гравитационной волны и квазидекартовы координаты 293
§ 3. Плоская гравитационная волна специального вида и замечания о цилиндрических и сферических волнах 295

Глава X. Электромагнетизм 299
§ 1. Уравнения Максвелла и тензор электромагнитной энергии . . 299
§ 2. Проблема Коши для некогерентной заряженной жидкости . . 303

§ 3. Интегральные теоремы электромагнетизма 306
§ 4. Пространства электровакуума 309

Глава XI. Геометрическая оптика 314
§ 1. Кинематика волн в пространстве — времени 314
§ 2. Волны, лучи и фотоны в диспергирующей среде 317
§ 3. Вариационные принципы в геометрической оптике 320
§ 4. Геометрическая оптика в статической вселенной 325
§ 5. Астрономические наблюдения 329
§ 6. Звездная аберрация 331
§ 7. Дифференциальная хронометрия 337
§ 8. Пятиточечный детектор кривизны 342
§ 9. Спектральное смещение в среде 344

Дополнение А. Обозначения 348
Переход от сигнатуры (+2) к сигнатуре (—2) 349
Дифференцирование 350
Перечень основных символов с указанием параграфов, где эти символы вводятся 350

Дополнение Б. Численные значения некоторых физических величин, выраженные в секундах 354

Библиография 358

Именной указатель 418
Предметный указатель 420

Дж. Л. Синг

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Редактор *В. Захаров*

Переплет художника *К. П. Сиротова.* Технический редактор *Р Н. Рубаненко*
Сдано в производство 2/VIII 1962 г. Подписано к печати 2/II 1963 г.
Бумага 70×108$^{1}/_{16}$=13,5 бум. л. 37,0 печ. л. Уч.-изд. л 32,5.
Изд. № 2/1136. Цена 2 р. 48 к. Зак. 400.

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Московская типография № 5 Мосгорсовнархоза
Москва, Трехпрудный пер., 9